Классическая теория поля 2023

Листок 2. Электромагнитное поле и обобщенные функции

Срок сдачи: до конца дня **05 апреля 2023**

---

1. Лоренцевы инварианты электромагнитного поля. Рассмотрим тензор напряженности электромагнитного поля $F^{\mu\nu}$ и дуальный тензор

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}F_{\rho\lambda}.$$

Здесь $\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}$ — полностью антисимметрический тензор четвертого ранга, $\varepsilon^{0123} = 1$.

а) Выразите в терминах компонент векторов напряженности электрического и магнитного полей $\vec{E}$ и $\vec{H}$ лоренцевы инварианты $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ и $\tilde{F}_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$.

б) Выразите пфаффиан кососимметрической 4×4 матрицы $F^{\mu\nu}$:

$$\mathrm{Pf}F = \frac{1}{8}\,\varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda}F^{\mu\nu}F^{\rho\lambda} = \frac{1}{4}\,F^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}, \quad (\det F = (\mathrm{Pf}F)^2)$$

в терминах компонент векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$.

2. В некоторой системе отсчета существуют однородные и постоянные электрическое и магнитное поля, вектора которых $\vec{E}$ и $\vec{H}$ не параллельны друг другу. Докажите, что *почти всегда* существует инерциальная система отсчета, в которой эти поля будут параллельны и найдите скорость этой системы отсчета относительно исходной системы. Единственно ли решение задачи? В каком случае задача не имеет решения?

Указание. Рассмотрите лоренцевский буст вдоль прямой перпендикулярной к плоскости, натянутой на вектора $\vec{E}$ и $\vec{H}$. Для поиска исключительного случая полезно воспользоваться лоренцевскими инвариантами, найденными в задаче 1.

3. Найдите пространственную плотность заряда, отвечающую сферически симметричному потенциалу следующего вида (потенциал Юкавы):

$$\phi(\vec{r}) = \frac{e^{-r/a}}{r}, \quad r = |\vec{r}|,$$

где a — постоянный положительный параметр. Потенциал ϕ – нулевая компонента 4-вектора $A^\mu = (\phi, 0, 0, 0)$.

4. В пространстве Минковского M_3 найдите запаздывающую функцию Грина для уравнения движения свободного безмассового скалярного поля:

$$\Box\, G(x) = \delta^{(3)}(x), \qquad G(x) \equiv 0 \quad \text{при} \quad x^0 < 0.$$

Здесь $\Box = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu$, а $\eta^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1)$ — метрический тензор в пространстве M_3.

Математическое дополнение: задачи про обобщенные функции

Напомним, что дельта-функцией Дирака, сосредоточенной в точке $x_0 \in \mathbb{R}$, называется линейный непрерывный функционал δ_{x_0} на пространстве Шварца основных функций $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ (бесконечно дифференцируемых вещественнозначных функций на $\mathbb{R}$, быстро убывающих на бесконечности, то же справедливо и для любых их производных), действующий по правилу:

$$\delta_{x_0}[f] = f(x_0).$$

С функционалом δ_{x_0} удобно обращаться как с ядерным функционалом, вводя фиктивное ядро – *дельта-функцию* $\delta(x - x_0)$, и записывая его действие в виде интеграла

$$\delta_{x_0}[f] \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) f(x) dx = f(x_0).$$

5. Докажите следующие равенства:

а) $$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x), \quad \forall\, a \in \mathbb{R} \setminus 0.$$

б) $$w - \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{\exp(-\frac{x^2}{\varepsilon})}{\sqrt{\pi\varepsilon}} = \delta(x).$$

Напомним, что предел здесь понимается в слабом смысле, т.е. как предел линейных функционалов на пространстве основных функций $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

в) Докажите, что на пространстве основных функций $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ имеет место равенство обобщенных функций

$$\frac{d\theta(x - x_0)}{dx} = \delta(x - x_0),$$

где $\theta(x)$ — функция Хевисайда

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

6. Пусть кусочно-гладкая функция $f(x)$ медленного роста имеет разрывы первого рода (конечные скачки) в точках $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

а) Запишите обобщенную производную функции $f(x)$ с помощью дельта-функций.

б) Проиллюстрируйте общую формулу, найдя производную кусочно-гладкой функции следующего вида:

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & x < 1 \\ x^2 + 2 & x \geq 1. \end{cases}$$