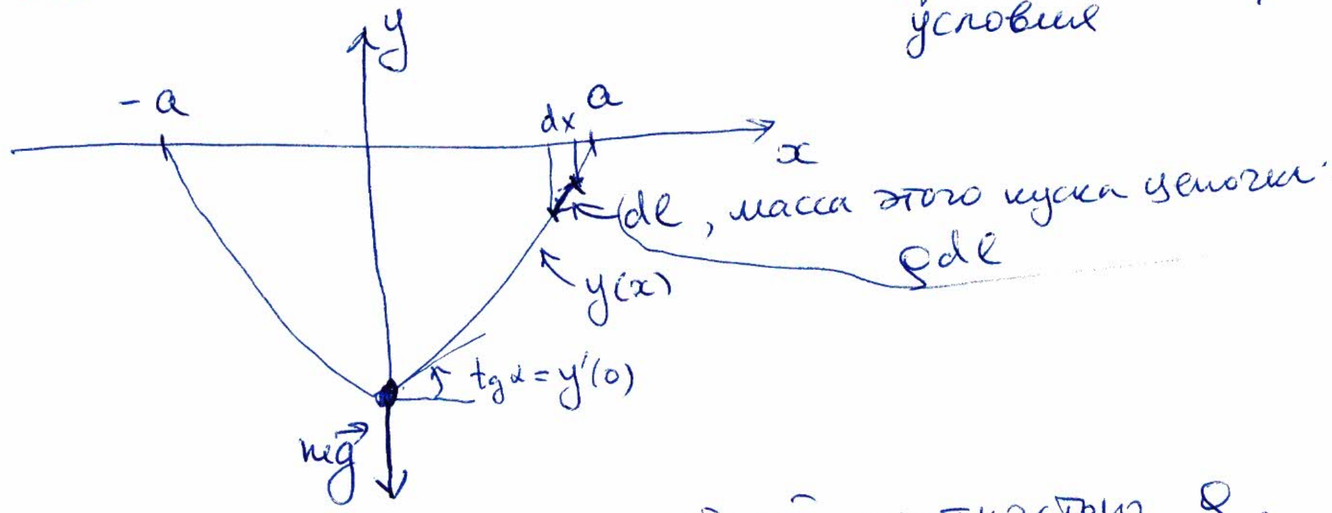
Задача о бусинке на цепочке (кулон) / множитель Лагранжа + нетривиальные граничные условия /



Цепочка однородная с линейной плотностью ρ, фиксированной длиной l $(l \geq 2a)$, закреплена в точках $\pm a$ на оси $O\vec{x}$.

Посередине цепочки висит бусинка массы m, действует однородная сила тяжести с ускорением $\vec{g}$.

$y(x) \in C^0[-a,a]$ – профиль цепочки.

Из условий симметрии $y(x)$ – чётная функция, у неё излом производной в $x=0$, $y(x)\big|_{x\geq 0} \in C^2[0,a]$

Условие связи на длину цепочки:

$$\boxed{\int_{-a}^{a} \sqrt{1+y'^2}\,dx - l = 0} \qquad (1)$$

Потенциальная энергия цепочки с бусинкой в поле тяжести

$$\boxed{U[y(x)] = \int_{-a}^{a} g\, y(x)\, \underbrace{\rho \underbrace{\sqrt{1+y'^2}\,dx}_{dl\text{ – кусок цепочки}}}_{\text{его масса (см. рис.)}} + \overbrace{mg\,y(0)}^{\text{пот. энергия бусинки}}} \qquad (2)$$

Добавляя условие связи (1) с множителем Лагранжа λ имеем функционал для варьирования:

$$\tilde U[y(x),\lambda] = \int_{-a}^{a} \rho g y\sqrt{1+y'^2}\,dx + mg\,y(0) + \lambda\left\{\int_{-a}^{a}\sqrt{1+y'^2}\,dx - \ell\right\}$$

С учётом чётности $y(x)$ перейдем к интегрированию $\int_0^a dx$ ($\int_{-a}^0 dx \to \int_0^a dx$ заменой $x\to -x$):

$$\boxed{\tilde U[y(x),\lambda] = 2\int_0^a (\rho g y+\lambda)\sqrt{1+y'^2}\,dx + mg\,y(0) - \lambda\ell} \qquad (3)$$

Требование $\frac{d\tilde U}{d\lambda}=0$ => условие связи (1).

Варьирование по $y(x)$:

$$d\tilde U[y(x),\lambda] = 2\int_0^a\left\{\rho g\,\delta y(x)\sqrt{1+y'^2} + (\rho g y(x)+\lambda)\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\,\delta y'(x)\right\}dx$$

$$+\, mg\,\delta y(0) \overset{\text{интегрируем по частям}}{=}$$

$$= 2(\rho g y(x)+\lambda)\frac{y'(x)}{\sqrt{1+y'^2}}\,\delta y(x)\Big|_{x=0}^{x=a} + mg\,\delta y(0) + \qquad (4)$$

$$+\, 2\int_0^a \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial}{\partial y'}\right)\circ\{\underbrace{(\rho g y+\lambda)\sqrt{1+y'^2}}_{L(y,y')}\}}_{d\tilde U=0 \text{ порождает ур-ние Эйлера-Лагранжа для } L(y,y')}\,\delta y(x)\,dx = 0$$

Проварьировали явно, чтобы получить подчерк- (3)
нутые красным граничные члены.

Т.к. $\boxed{y(a) = 0}$ $\Rightarrow$ $\delta y(a) = 0$ доп. граничных
(5а) условий в т. $x = a$ не возникает

В $x = 0$ $\delta y(0) - \forall$, поэтому есть гран. условие:

$$\boxed{\left. mg - 2(\rho g y + \lambda)\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \right|_{x=0} = 0} \quad (5б)$$

Это коэффициент при $\delta y(0)$ в (4).

Ур-ние Э-Л. решать не будем, а воспользуемся
З.С.Э. для $L(y, y')$:

$$y'\frac{\partial L}{\partial y'} - L = \boxed{-\frac{(\rho g y + \lambda)}{\sqrt{1+y'^2}} = E = \text{const}}$$

$$\Downarrow$$

$$-E\sqrt{1+y'^2} = \rho g y + \lambda$$

$\Downarrow$ разрешаем относительно y'
и разделяем переменные

$$\boxed{dx = \frac{E\,dy}{\sqrt{(\lambda + \rho g y)^2 - E^2}}} \quad (6)$$

Знак "±" возникший из-за извлечения $\sqrt{}$ запихи-
ваем в константу E.

Заменой $y(x) \mapsto \varphi(x)$:

$$\lambda + \rho g y(x) = E \,\mathrm{ch}\, \varphi(x)$$
(обратимая при $x \in [0,a]$)

решаем дифур (6): $\varphi(x) = \frac{\rho g}{E} x + \varphi_0$, т.е.

$$\boxed{y(x) = \frac{E}{\rho g} \mathrm{ch}\left(\frac{\rho g}{E} x + \varphi_0\right) - \frac{\lambda}{\rho g}} \qquad (7)$$

Это общее решение дифура с 3-мя константами: E, φ_0, λ. Теперь осталось найти константы из граничных условий (5а, б) и условия связи (1).

(5а) → выражение для λ: $\boxed{\lambda = E \,\mathrm{ch}\left(\frac{\rho g}{E} a + \varphi_0\right)}$ (8)

Итак:

$$\boxed{y(x) = \frac{E}{\rho g}\left(\mathrm{ch}\left(\frac{\rho g}{E} x + \varphi_0\right) - \mathrm{ch}\left(\frac{\rho g}{E} a + \varphi_0\right)\right)} \qquad (7')$$

Нас интересует $y(x) \leq 0$ при $x \in [0,a]$ $\Rightarrow$ $E > 0$

Вычислим:

$$y'(x) = \mathrm{sh}\left(\frac{\rho g}{E} x + \varphi_0\right)$$

$$\sqrt{1 + y'^2} = \mathrm{ch}\left(\frac{\rho g}{E} x + \varphi_0\right)$$

$$\rho g y + \lambda = E \,\mathrm{ch}\left(\frac{\rho g}{E} x + \varphi_0\right)$$

Подставляем в ^{гран.} условие (5б):

$$\boxed{\operatorname{sh}\varphi_0 = \frac{mg}{2E}} \qquad (8а)$$

и в условие связи (1), только его надо переписать, для $x \in [0, a]$: $\int_0^a \sqrt{1+y'^2}\,dx = \frac{\ell}{2}$

$$\frac{E}{\rho g}\left(\operatorname{sh}\left(\frac{\rho g}{E}a + \varphi_0\right) - \operatorname{sh}\varphi_0\right) = \frac{\ell}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\operatorname{sh}\left(\frac{\rho g}{E}a + \varphi_0\right) = \frac{\rho g\ell + mg}{2E}} \qquad (8б)$$

Наша задача: разрешить (8а, б) относительно E, φ_0.

Заменим для удобства $\boxed{E \mapsto z = \frac{\rho g a}{E}}$, $z > 0$

Переобозначим и константы:

$$\boxed{u := \frac{m}{2\rho a}, \quad C := \frac{\ell}{2a}}$$

(8а, б) превращается в

$$\boxed{\begin{cases} \operatorname{sh}\varphi_0 = uz \\ \operatorname{sh}(z+\varphi_0) = (u+C)z \end{cases}} \qquad (9)$$

Исключаем φ_0:

$$\operatorname{ch}\varphi_0 = \sqrt{1+u^2z^2}$$

$$\operatorname{sh}(z+\varphi_0) = \operatorname{sh}z\sqrt{1+u^2z^2} + \operatorname{ch}z \cdot uz$$

(9) $\Rightarrow$

$$\boxed{\underbrace{\operatorname{sh}z\sqrt{1+u^2z^2} + uz(\operatorname{ch}z-1)}_{f(u,z)} = Cz} \qquad (10)$$

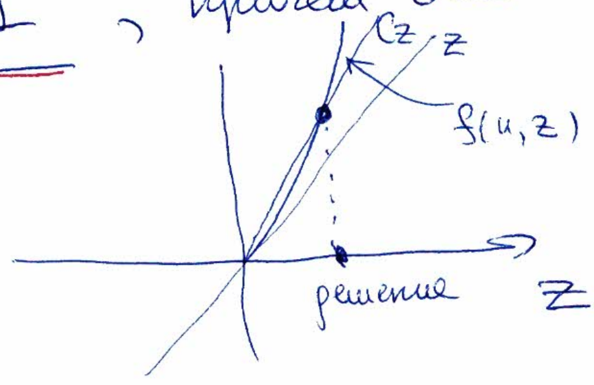
Функция $f(u,z)$, стоящая в левой части (10) является возрастающей при $z \geq 0$.

Её производная по z:

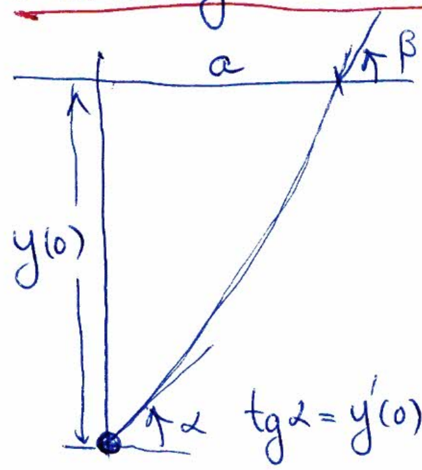
$$\frac{\partial f}{\partial z} = \operatorname{ch}z\left(\sqrt{1+u^2z^2}+u\right) + \operatorname{sh}z\left(\frac{u^2z}{\sqrt{1+u^2z^2}} + uz\right) - u$$

тоже возрастает при $z \geq 0$ (все зависящие от z четыре сомножителя в формуле для $\frac{\partial f}{\partial z}$ возрастают), причем $\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{z=0} = 1$

Значит (10) имеет решение при $z > 0$ только при условии $\boxed{C = \frac{l}{2a} > 1}$, причем оно будет единственным!



Наглядные численные ответы для справки:



$y'(0) = \mathrm{sh}\,\varphi_0 = uz$

$y'(a) = \mathrm{sh}(z+\varphi_0) = (u+c)z$

см $y'(x)$ в конце стр4 и eq. (9)

$$\boxed{\frac{y(x)}{a} = \frac{1}{z}\left\{\mathrm{ch}\left(z\frac{x}{a}+\varphi_0\right) - \mathrm{ch}(z+\varphi_0)\right\}}$$

где φ_0: $\mathrm{sh}\,\varphi_0 = uz$, а z определяется из уравнения (10)

В частности: $\boxed{y(0) = \frac{a}{z}\left\{\mathrm{ch}\,\varphi_0 - \mathrm{ch}(z+\varphi_0)\right\}}$

Для примера выберем $\boxed{C = \frac{l}{2a} = 2}$ — цепочка в 2 раза длиннее расстояния между её концами.

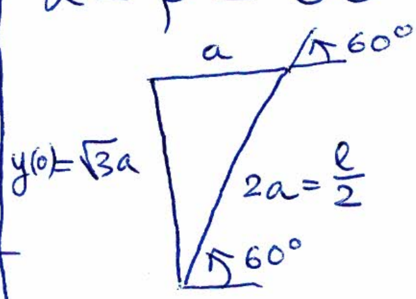
$$\boxed{u/c = \frac{m}{\rho\cdot l} \text{ (см. стр.5) } = \frac{m_{\text{бусинки}}}{m_{\text{цепочки}}}}$$

Меняем этот параметр и смотрим, что выйдет

$\frac{m_{бус}}{m_{цеп}}$	$y(0)$	α	β
0	$-1{,}59a$	0°	77°
1/2	$-1{,}71a$	42°	70°
1	$-1{,}72a$	50°	67°
2	$-1{,}73a$	$54{,}5^\circ$	64°
100	$-1{,}732a$	$59{,}9^\circ$	$60{,}1^\circ$

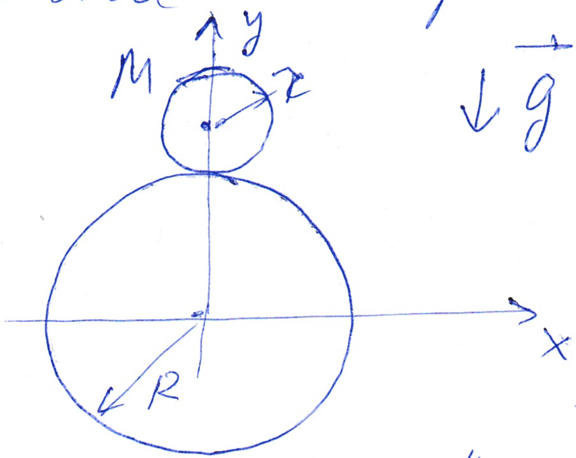
При $\frac{m_{бус}}{m_{цеп}} \to \infty$

$\alpha = \beta \equiv 60^\circ$.



Пример 2

Тонкий обруч массы m и радиуса r может катиться по внешней поверхности закреплённого обруча R без проскальзывания. Движение плоское, поле тяжести $\vec{g}$. В начальный момент подвижный обруч покоится в верхней точке обруча R:



В результате "слабого горизонтального толчка" (это значит, что полученной от толчка кинетической энергией можно пренебречь) обруч m начинает скатываться вниз. В какой точке обруча R произойдёт отрыв обруча m от R?

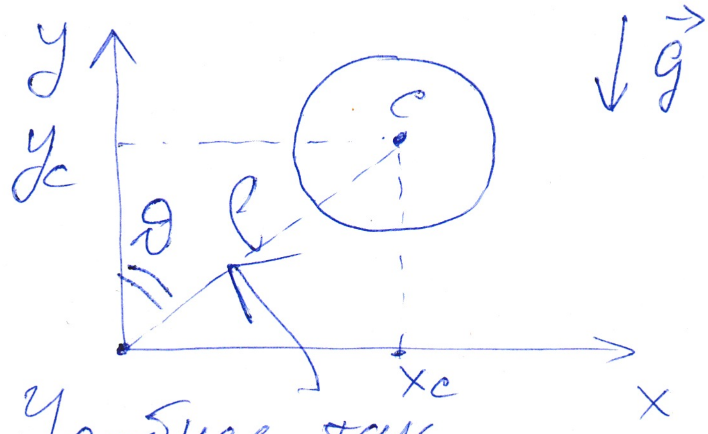
Решение.

Запишем лагранжиан системы в предположении, что m не может оторваться от R.

Для этого воспользуемся методом лагранжевых множителей.

Свободный обруч m в плоскости xOy имеет 3 степени свободы: 2 координаты центра масс и угол φ поворота вокруг центра масс.

В полярных координатах плоскости



$\downarrow \vec{g}$

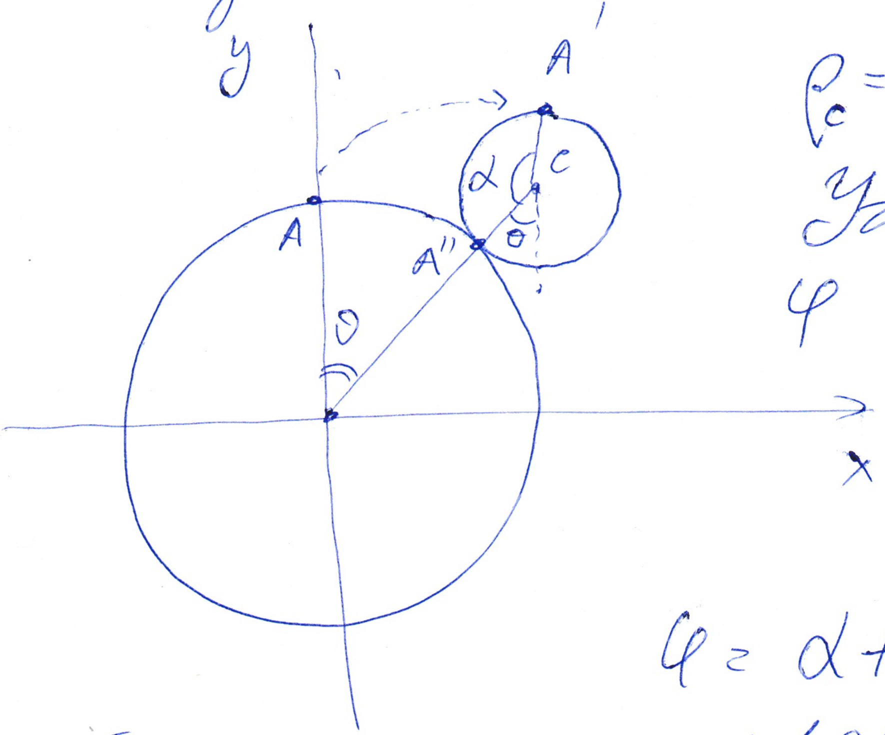
$$x_c = \rho \sin\vartheta$$

$$y_c = \rho \cos\vartheta$$

Удобнее так выбрать полярный угол

$$L_{free} = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\vartheta}^2\right) + \frac{m r^2 \dot{\varphi}^2}{2} - mg\rho\cos\vartheta$$

Движение по R без проскальзывания накладывает 2 связи:



$\rho_c = R + r$

Угол поворота φ обруча т в системе его центра масс:

$\varphi = \alpha + \theta$ (см. рис.)

Отсутствие проскальзывания:

$$\breve{AA''} = \breve{A''A'} \Rightarrow R\theta = r\alpha \quad \alpha = \frac{R}{r}\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi = \alpha + \theta = \frac{R+r}{r}\theta$$

Обозначим $a = R + r \Rightarrow \varphi = \frac{a}{r}\theta \Rightarrow$

$$\Rightarrow r^2\dot{\varphi}^2 = a^2\dot{\theta}^2 .$$

Вводим связи в L_{free} с помощью 2х множителей Лагранжа:

11

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\theta^2 + r^2\dot\varphi^2\right) - mg\rho\cos\theta$$
$$+ \lambda_1\left(\rho^2 - a^2\right) + \lambda_2\left(\varphi - \frac{a}{r}\theta\right).$$

Система уравнений Э.-Л.: $a = R + r$

$$\begin{cases} \rho^2 - a^2 = 0 \\ \varphi = \frac{a}{r}\theta \\ \frac{d}{dt}(m\dot\rho) = m\rho\dot\theta^2 - mg\cos\theta + 2\rho\lambda_1 & (i) \\ \frac{d}{dt}\left(m\rho^2\dot\theta\right) = mg\rho\sin\theta - \frac{a}{r}\lambda_2 & (ii) \\ \frac{d}{dt}\left(mr^2\dot\varphi\right) = \lambda_2 & (iii) \end{cases}$$

Учитывая $\rho = a = \underline{const}$ и $\varphi = \frac{a}{r}$,

получаем из (i):

$$\lambda_1 = \frac{mg}{2a}\cos\theta - \frac{m\dot\theta^2}{2},$$

а (ii) и (iii) дают λ_2:

$$\begin{cases} ma^2\ddot\theta = mga\sin\theta - \frac{a}{r}\lambda_2 \\ mra\ddot\theta = \lambda_2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\lambda_2 = \frac{mgr}{2}\sin\theta}$$

Для определения λ_1 надо (12)

исключить $\dot\theta$, это можно сделать, воспользовавшись интегралом движения — полной энергией E:

$$E = T + U = \underline{const}$$

На поверхности связей:

$$E\Big|_{\substack{\rho = a \\ \varphi = \frac{a}{r}\theta}} = \frac{m}{2}\Big(a^2\dot\theta^2 + \underbrace{a^2\dot\theta^2}_{\text{это } r^2\dot\varphi^2}\Big) + mga\cos\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{m\dot\theta^2}{2} = \frac{(E - mga\cos\theta)}{2a^2}$$

В итоге получаем λ_1:

$$\boxed{\lambda_1 = \frac{mg\cos\theta}{a} - \frac{E}{2a^2}}$$

Найдем <u>радиальную</u> компоненту силы реакции обруча R:

$$N_\rho \sim (\vec N \cdot \vec\rho) = N_x \cdot x + N_y \cdot y$$

$$N_x = \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x}(\rho^2 - a^2) + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi - \frac{a}{2}\vartheta\right)$$

N_y = ... аналогичное выражение.

$\frac{\partial \vartheta}{\partial x}$? $\quad tg\,\vartheta = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2\vartheta}\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \frac{1}{y} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \frac{y}{\rho^2}$$

Аналогично $\quad \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = -\frac{x}{\rho^2}$

Отсюда

$$\vec{N} \cdot \vec{\rho} = \underline{2a^2 \lambda_1}$$

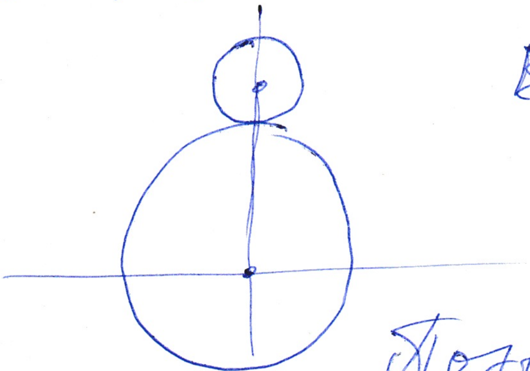
$\boxed{\text{Зам.}}$ Это ↑ можно получить сразу через дифф. в полярных координатах

$$N_\rho = \frac{(\vec{N}\,\vec{\rho})}{\rho} = \lambda_1 \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho^2 - a^2) + \lambda_2 \underbrace{\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\varphi - \frac{a}{2}\vartheta\right)}_{=0} =$$
$$= 2\rho\lambda_1$$

Итак, радиальная проекция силы реакции обруча R:

$$\boxed{N_\rho = 2a\lambda_1 = 2mg\cos\vartheta - \frac{E}{a}} \quad (*)$$

В нашей задаче константа E задаётся энергией обруча в начальный момент



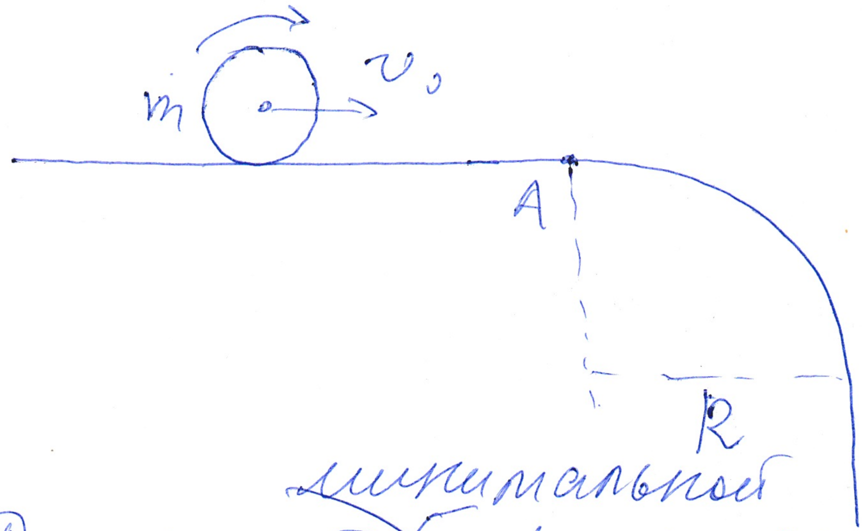
$E = mga = mg(R+a)$ — чисто потенциальная энергия.

Поэтому:

$$N_\rho = mg(2\cos\theta - 1)$$

Видно, что при прохождении точки $\cos\theta = \frac{1}{2}$ $\left(\theta = \frac{\pi}{3}\right)$ N_ρ меняет знак. Таким образом, если обруч и имеет возможность оторваться от R, это произойдёт в $\theta = \pi/3$.

Формула (*) показывает зависимость точки отрыва от начальной энергии E. С её помощью можно решить такую задачу:



При какой минимальной скорости v_0 обруч m оторвется от поверхности в т. A? (т.е. вообще не поедет по R).

Для этого надо потребовать в (*) $N_\rho = 0$ при $\theta = 0$, т.е.

$$2mg - \frac{E}{a} = 0$$

$$E = 2mga = mga + T_{кин}$$

$$T_{кин} = \underbrace{mv_0^2}_{T_{цм} + T_{вращ}} \Rightarrow \boxed{v_0^2 = ga}$$