§3 R-матрицы и инварианты узлов/зацеплений.

В этом разделе мы кратко изложим конструкцию инвариантов узлов/зацеплений, использующую R-матричные представления группы кос. Для этого нам потребуются результаты о связи узлов/зацеплений и кос.

Def Узел (зацепление) — это класс изотопий замкнутой кривой (нескольких замкнутых кривых) в $\mathbb{R}^3$ без само- и взаимных пересечений.

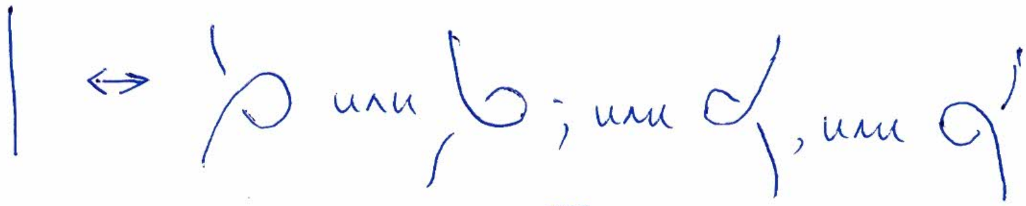
Def Регулярная проекция узла/зацепления — это такая его проекция в $\mathbb{R}^2$, в которой нет наложения более 2-х кривых в одной точке, и при наложениях указывается кто над кем проходит (относительно плоскости проекции).

- Узел/зацепление однозначно задаётся любой своей регулярной проекцией.
- Регулярные проекции одного узла/зацепление связаны между собой конечной последовательностью движений Рейдемейстера.

Движения Рейдемейстера (1927г)

/ Kurt Reidemeister (1893–1971), Германия – ученик Эриха Гекке/

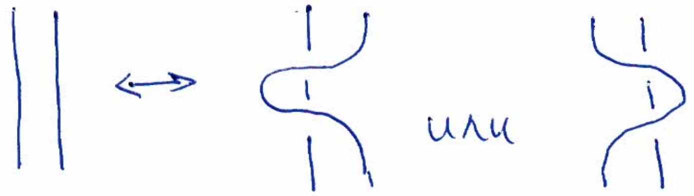
I тип:



(1а)

(аналог процедуры Tr, см. ниже)

II тип:



(1б)

(аналог соотн. $b_i b_i^{-1} = b_i^{-1} b_i = 1$)

III тип:

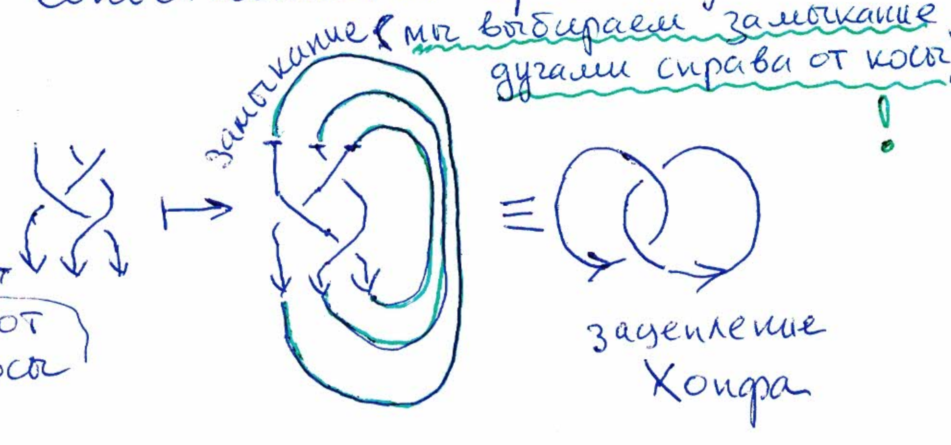
(1в)

(аналог соотношения кос)

Def Ориентация узла/зацепления задаётся указанием направлений движения вдоль всех его кривых (т.е., указанием стрелок).

Всякой косе сопоставляется ориентированное зацепление/узел.

Способ: $b_2 b_1^{-1} b_2 =$



(мы выбираем замыкание дугами справа от косы!

(стрелки различают "верх" и "низ" косы)

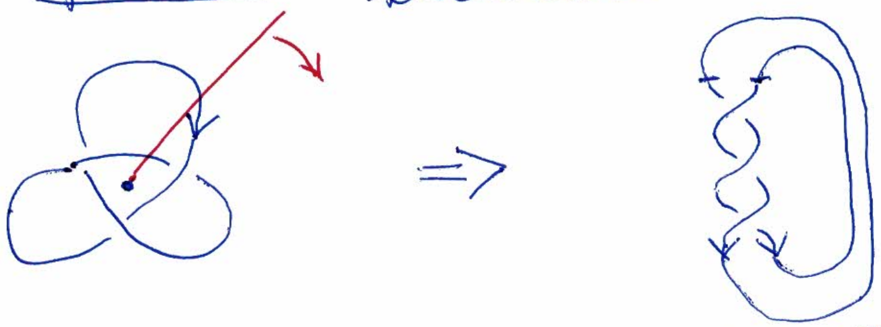
Обратное сопоставление описывается в теореме Александера (1928)

/ James Waddell Alexander II (1888–1971), США – один из первых сотрудников IAS, Princeton, один из основателей алгебраической топологии/

Теорема Всякому ориентированному зацеплению/узлу можно сопоставить замыкание некоторой косы (вообще говоря, не единственным образом).

Мы не будем детально доказывать, а только проиллюстрируем док-во примерами.

Пример 1 Трилистник



– замыкание $b_1^3 \in B_2$

Описание процедуры: отмечаем точку на плоскости, выпускаем из нее луч. Он пересекает узел в 2-х точках. Начинаем вращать луч, скажем, по часовой стрелке, и следим, какие перекрестья нитей узла он проходит при вращении. Совершив полный оборот, получаем картинку замыкания узла. Фактически луч разрезает узел, превращая его в косу. Поворот луча "считывает" представление косы в виде произведения артиновых генераторов.

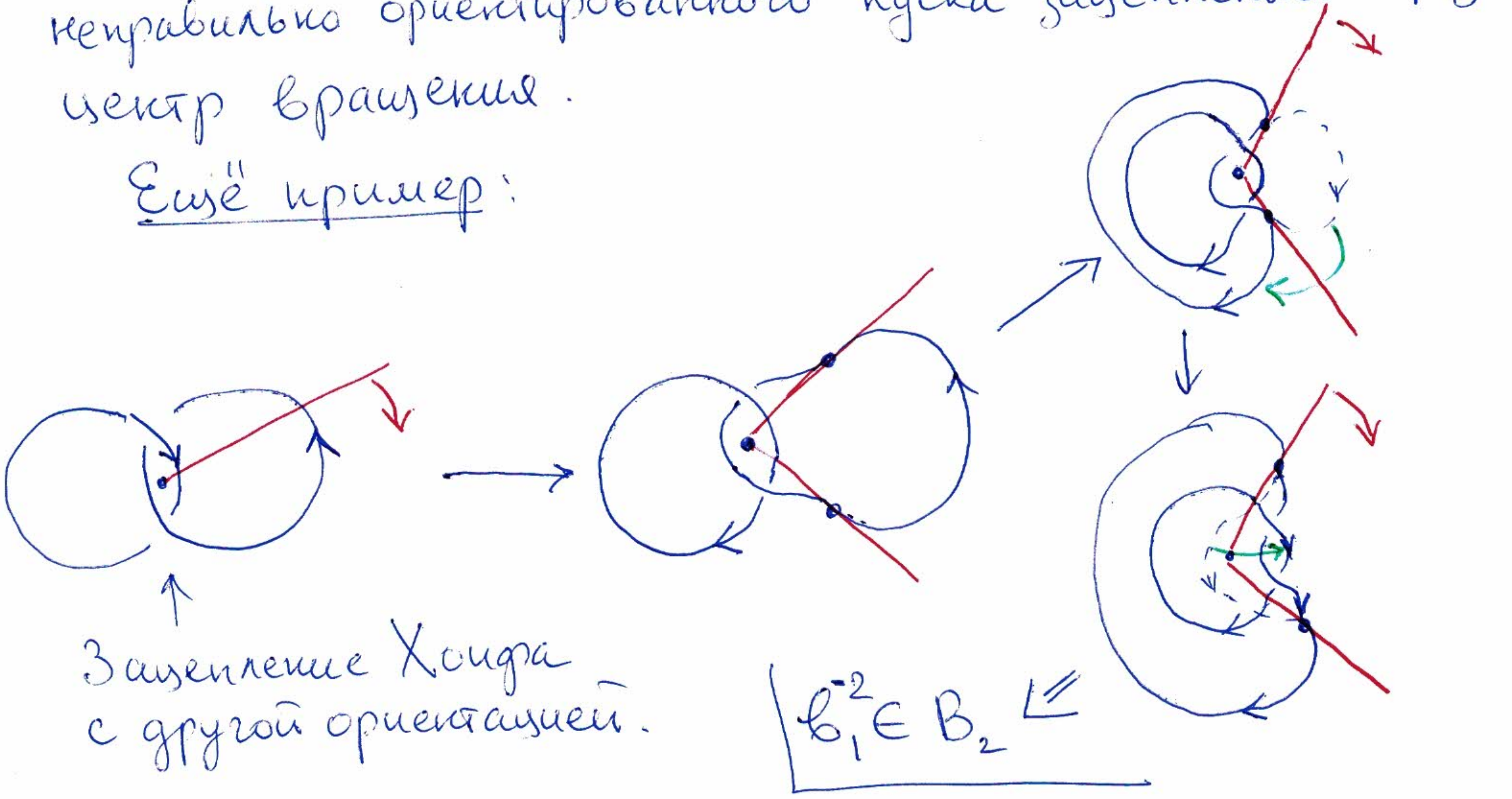
В примере нам повезло, что пересекающие луч нити ориентированы в одном направлении и что их число не изменяется при повороте луча.

Понятно, что это везение связано с выбором точки начала луча и проекции зацепления/узла.

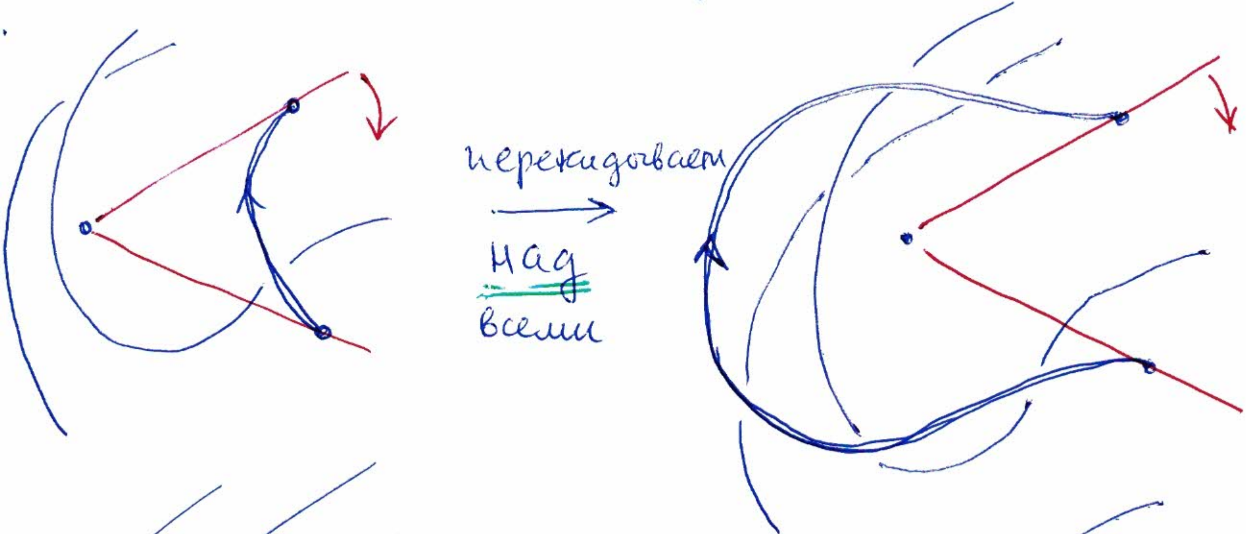
Простейший проблемный случай:

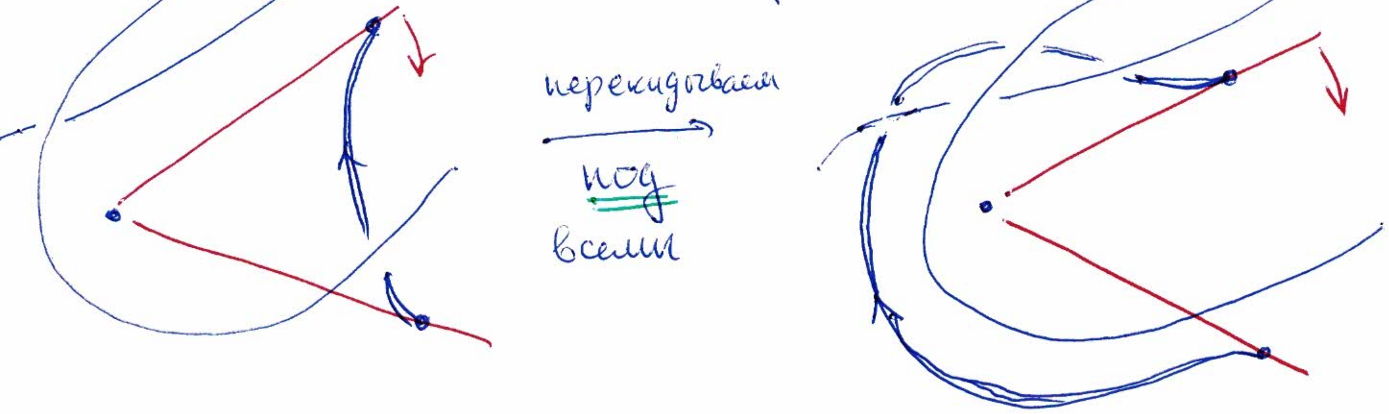
Проблема решается перекидыванием "плохого", т.е. неправильно ориентированного куска зацепления через центр вращения.

Ещё пример:

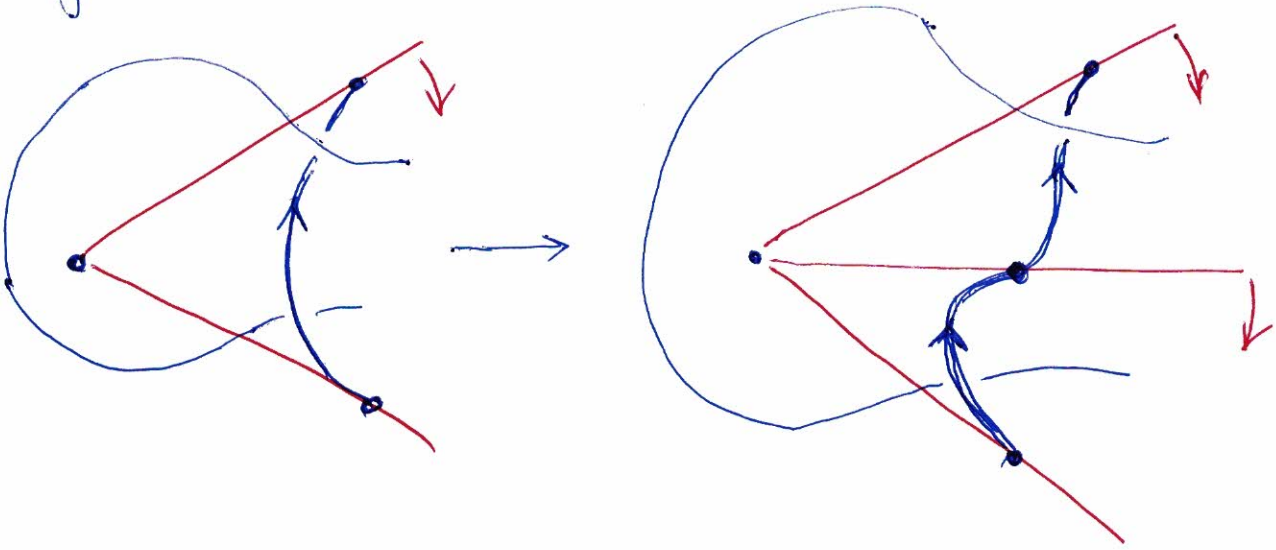


Из второго примера (последнее перекидывание) видно, что при перекидывании неправильно ориентированного участка нити надо учитывать ее расположение ("над" или "под") относительно других пересекающихся с ним нитей. Правила перекидывания:





Более сложные случаи разбиваются на элементарные куски



Таким образом за конечное число перекидываний можно исправить все неправильно ориентированные участки. Если же все участки зацепления/узла одинаково ориентированы относительно луча, то число пересечений луча при его повороте будет неизменным ▨

Rem Представленный метод — подобие предложенного Александером способа восстановления замыкания по ориентированному зацеплению/узлу. Он нагляден, но не поддаётся хорошей алгоритмизации. Хороший алгоритм восстановления косы по зацеплению был предложен в 1990 г. Пьером Вожелем (Pierre Vogel) / см. Прасолов - Сосинский "Узлы, зацепления, косы и 3-мерные многообразия", МЦНМО 1997, §6.6, стр 84./

● Сопоставление замкнутой косы ориентированному зацеплению/узлу неоднозначно

Семейство кос, чьё замыкание даёт один и тот же узел, описывается теоремой Маркова /Андрей Андреевич Марков-младший (1903-1979) СССР. Сын А.А. Маркова-старшего, по имени которого назвали Марковские процессы/.

Теорема была сформулирована в 1936г. Полное доказательство теоремы дано Joan Birman в 1974г. /см. Кассель, Тураев, "Группы кос" гл.2 §2.5/

Теорема Две косы, замыкание которых даёт один и тот же ориентированный узел/зацепление, связаны конечной последовательностью преобразований 2-х типов (преобразования Маркова):

I тип Сопряжение в B_n

$$x \leftrightarrow a x a^{-1} \quad \forall a, x \in B_n \qquad (2а)$$

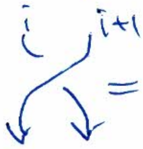
II тип Связь кос из B_n и B_{n+1}

$$\forall x \in B_n \qquad x \leftrightarrow x b_n^{\varepsilon} \in B_{n+1}, \text{ где } \varepsilon = \pm 1 \qquad (2б)$$

Предъявим теперь процедуру построения инвариантов зацеплений/узлов по R-матричным представлениям $H_n(q)$. Процедура была предложена Владимиром Тураевым в 1988 г.

Пусть R – строго кособратимая гекковская R-матрица.

Всякой косе сопоставим ее R-матричное представление, порождаемое R-матрицей $\varkappa R \in Aut(V^{\otimes 2})$. Здесь $\varkappa$ – масштабный параметр, который зафиксируем позже. В частности:



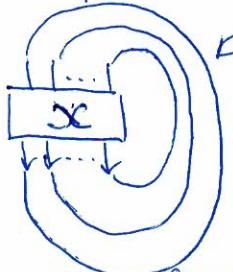
$= b_i \overset{\rho_{\varkappa R}}{\mapsto} \varkappa R_{i\,i+1}$,

$= b_i^{-1} \xrightarrow{\rho_{\varkappa R}} \frac{1}{\varkappa} R^{-1}_{i\,i+1}$

Замыкаем нити косы справа от косы и замыканию i-ой нити сопоставляем вычисление ϰR-следа:

$$\mathrm{Tr}_{\varkappa R_{(i)}}\ldots = \frac{1}{\varkappa}\mathrm{Tr}_{R_{(i)}}\ldots = \frac{1}{\varkappa}\mathrm{Tr}_{(i)} D_i^R\ldots$$

Таким образом, замыканию всякой косы $x \in B_n$ сопоставляем выражение $f_{L_x}(q,\varkappa)$

$x \in B_n \mapsto L_x =$ 

коса

ориентированной узел/зацепление

Замыканию справа сопоставляется $\mathrm{Tr}\,D^R$.

При выборе замыкания слева надо сопоставлять TrC

Смешивать правые и левые замыкания нельзя

$$f_{L_x}(q,\varkappa) := \mathrm{Tr}_{\varkappa R_{(1\ldots n)}}\rho_{\varkappa R}(x) = \frac{1}{\varkappa^n_n}\mathrm{Tr}_{(1\ldots n)} D_1^R\ldots D_n^R\,\rho_{\varkappa R}(x) \qquad ③$$

Функция f_{L_x} является многочленом по $q^{\pm 1}$ и $\varkappa^{\pm 1}$ (увидим позже). Она также может зависеть от характеристик R-матричного представления, например от $\dim V$. Она не зависит от параметров R-матричного представления, связанных с преобразованием твиста (см. (13), (14) в 1-й части записок про R-матрицы) Например для R_{DJ} (см. (10) 1-части записок) f_{L_x} не зависит от параметров x_{ij}.

Утверждение $f_{L_x}(q,\varkappa)$ — инвариант ориентированного зацепления/узла L_x, если выбрать

$$\boxed{\varkappa^2 = 1 - (q-q^{-1})\, \mathrm{Tr}\, D^R} \quad (4)$$

Доказательство:

1) Поскольку $\rho_{\varkappa R}$ является представлением группы кос, очевидна инвариантность ф-ции f_{L_x} относительно движений Рейдемейстера II и III типов внутри косы x, (1б,в)

2) В силу циклического свойства следа, а также следующего из Следствия 2 из записок о кособратимых R-матрицах (см. (17б) на стр 9): $[D^R_1 D^R_2, R_{12}] = 0$

имеем:

$$(D^R_1 \dots D^R_n)\rho_{\varkappa R}(x) = \rho_{\varkappa R}(x)(D^R_1 \dots D^R_n),$$

откуда следует цикличность R-следа для операторов R-матричных представлений:

$$\boxed{\mathrm{Tr}_{R(1\dots n)}\, \rho_R(x)\, \rho_R(y) = \mathrm{Tr}_{R(1\dots n)}\, \rho_R(y)\, \rho_R(x) \quad \forall\, x, y \in B_n} \quad (5$$

(здесь R можно заменить на $\varkappa R$).

Следовательно f_{L_x} инвариантна относительно марковских преобразований I типа (2а).

3) Инвариантность относительно движений Рейдемейстера I типа (1а), они же марковские преобразования II типа (2б), достигается выбором $\varkappa$.

Действительно, инвариантность f_{L_x} относительно (2б) с $\varepsilon = +1$ выполняется для $\forall \varkappa$:

$$B_n \ni x \Leftrightarrow x\, b_n \iff \mathrm{Tr}_{\varkappa R(n+1)}\, \rho_{\varkappa R}(x) (\varkappa R)_{n\, n+1} = \rho_{\varkappa R}(x)$$

Чтобы обеспечить выполнение (2б) при $\varepsilon = -1$ подберём подходящую $\varkappa$:

$$B_n \ni x \Leftrightarrow x b_n^{-1}$$

$$\mathrm{Tr}_{\varkappa R(n+1)}\, \rho_{\varkappa R}(x)\, (\varkappa R)^{-1}_{n n+1} = \frac{1}{\varkappa^2}\, \mathrm{Tr}_{R(n+1)}\, \rho_{\varkappa R}(x)\, R^{-1}_{n n+1} =$$

$$\underset{\uparrow}{=} \frac{(1-(q-q^{-1})\,\mathrm{Tr} D^R)}{\varkappa^2}\, \mathrm{Tr}_{R^{-1}(n+1)}\, \rho_{\varkappa R}(x) R^{-1}_{n n+1} = \frac{1-(q-q^{-1})\,\mathrm{Tr} D^R}{\varkappa^2}\, \rho_{\varkappa R}(x)$$

применим формулу (23б) для выражения D_R через D_R^{-1} из записок про косообратимые R-матрицы (см. стр. 14).

Итак, при выполнении условия (4) функция $f_{L_\varkappa}$ инвариантна относительно преобразований Маркова II типа. ▨

Заметим, что в формулах (3), (4) для $f_{L_\varkappa}$ явно присутствуют 3 параметра: $\varkappa$, q и $\mathrm{Tr}_R Id = \mathrm{Tr} D^R =: d$. Только один из этих параметров — d — зависит от явного вида гекковской R-матрицы, но формула (4) может быть интерпретирована не как выражение для $\varkappa$ в терминах q и d, а как выражение для d в терминах независимых q и $\varkappa$:

$$\boxed{d = \frac{1-\varkappa^2}{q-q^{-1}}} \qquad (4')$$

Остаётся только уточнить: а действительно ли d — независимый от q параметр? Вычисления d для R-матрицы Дринфельда-Джимбо дают:

$$\underline{d = \mathrm{Tr}\, D^{R_{DJ}} = q^{-N}[N]_q}$$ (см формулу (27а) записок по косообратимым R-матрицам)

Значит, для каждой конкретной R^{DJ} ($N=\dim V$ – фиксировано) параметр α не независим от q. Но если рассматривать всю серию R^{DJ} целиком (т.е., считать N целой переменной), то α и q – независимы.

Аналогично для пары q и $\varkappa$: условие (4) для R^{DJ} даёт $\varkappa^2 = q^{-2N}$, т.е. можно выбрать

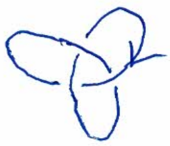
$$\boxed{R^{DJ} \rightarrow \boxed{\varkappa = q^{-N}}} \tag{⑥}$$

Если считать $N \in \mathbb{Z}$, то q и $\varkappa$ остаются независимой парой.

Таким образом $f_{L_\varkappa}$ – инвариант ориентированных зацеплений/узлов, зависящий, как минимум, от двух переменных q и $\varkappa$. Попытки подставлять другие, отличные от R^{DJ} гекковские R-матрицы, не приводят к появлению дополнительных параметров (скажем R^{KS} ничего нового не даст).

Естественно предположить, что вычисление $f_{L_\varkappa}$ не зависит от конкретного вида гекковской R-матрицы, а определяется алгебраической структурой $H_n(q)$. Чтобы это проверить, вычислим примеры.

Ⓐ Трилистник:



Ориентированному таким образом трилистнику мы сопоставляем косу $b_1^3 \in B_2$ (см. стр. 3), поэтому

$$f_{\text{Трилистн.}} = \mathrm{Tr}_{\varkappa R(12)}\, \rho_{\varkappa R}(b_1^3) = \frac{\varkappa^3}{\varkappa^2}\, \mathrm{Tr}_{R(12)}\, \rho_R(g_1^3) \overset{*}{=}$$

Заменим $b_1 \mapsto g_1$, т.к. ρ_R – представление алгебры Гекке

Для генераторов ал. Гекке выполняются соотношения Гекке:

$$\boxed{g_1^3 = (1+\lambda^2)\, g_1 + \lambda \cdot 1 \quad \text{где } \lambda := q - q^{-1}}$$

Вычисляем R-следы: $\mathrm{Tr}_{R(2)} R_{12} = \mathrm{Id}_1$, $\mathrm{Tr}_R \mathrm{Id} = d$

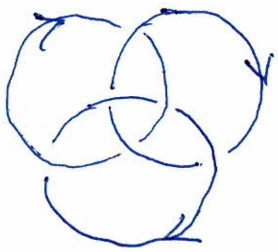
$$\overset{*}{=} \varkappa\, \mathrm{Tr}_{R(12)} \{(1+\lambda^2) R_{12} + \lambda\, \mathrm{Id}_{12}\} \overset{\downarrow}{=} \varkappa \{(1+\lambda^2) d + \lambda d^2\}$$

Последнее выражение преобразуем к удобному виду, выразив d через $\varkappa$ (см. (4')) и учитывая, что

$$\boxed{f_{\bigcirc} = \mathrm{Tr}_{\varkappa R}\, \rho_{\varkappa R}(1) = \frac{1}{\varkappa} \mathrm{Tr}_R\, \mathrm{Id}_1 = \frac{d}{\varkappa}.} \quad ⑦$$

$$\boxed{f_{\text{Трилистн.}}} = \frac{d}{\varkappa} \cdot \varkappa^2 \{1 + \lambda^2 + \underset{\substack{\| (4') \\ (1-\varkappa^2)}}{\lambda d}\} = \boxed{f_{\bigcirc} \cdot \varkappa^2 \{2 + \lambda^2 - \varkappa^2\}} \quad ⑧$$

Ⓑ Зацепление "Кольца Борромео"



с указанной ориентацией соответствует замыканию косы $b_1 b_2^{-1} b_1 b_2^{-1} b_1 b_2^{-1}$

$$f_{\substack{\text{кол.}\\ \text{Борромео}}} = \mathrm{Tr}_{\varkappa R(123)}\, \rho_{\varkappa R}(b_1 b_2^{-1} b_1 b_2^{-1} b_1 b_2^{-1}) =$$

$$= \frac{1}{\varkappa^3} \mathrm{Tr}_{R(123)}\, \rho_R(\underbrace{g_1 g_2^{-1} g_1 g_2^{-1} g_1 g_2^{-1}})$$

Для вычисления R-следа преобразуем это выражение

$$\underset{\substack{\| \text{Гекке} \\ \boxed{g_2 - \lambda\cdot 1}}}{g_1 g_2^{-1}} g_1 g_2^{-1} g_1 g_2^{-1} = (\underbrace{g_1 g_2 g_1}_{\text{соотн. кос}}) g_2^{-1} g_1 g_2^{-1} - \lambda g_1^2 \underbrace{g_2^{-1}}_{\text{Гекке}} g_1 g_2^{-1} =$$

$$= \underbrace{g_2 g_1^2 g_2^{-1}}_{\text{цикл.}} - \lambda g_1^2 (\underbrace{g_2 g_1 g_2^{-1}}_{\text{соотн. кос}}) + \lambda^2 g_1^3 \underbrace{g_2^{-1}}_{\text{Гекке}} =$$

Учитываем циклическое свойство (5) R-следа

$$\overset{\text{цикл.}}{=} g_1^2 - \lambda \underbrace{g_1 g_2 g_1}_{\text{цикл.}} + \lambda^2 g_1^3 g_2 - \lambda^3 g_1^3 =$$

$$\overset{\text{цикл.}}{=} g_1^2 - \lambda^3 g_1^3 - \lambda g_1^2 g_2 + \lambda^2 g_1^3 g_2$$

⊛ Обратим внимание, что при преобразовании мы добились, чтобы старший артинов генератор $g_2 \in H_3$ встречался в окончательном выражении не более 1 раза. – это общая стратегия вычисления f_{L_x}.

⊛ И еще: было удобно делать циклическую перестановку, чтобы добиться упрощений. В принципе этого делать было не обязательно.

Результат:

$$f_{\substack{\text{кол.}\\ \text{Борромео}}} = \frac{1}{\varkappa^3} \mathrm{Tr}_{R(123)}\, \rho_R\big((g_1^2 - \lambda^2 g_1^3) + (\lambda^2 g_1^3 - \lambda g_1^2) g_2\big) =$$

$$\underset{\uparrow}{=}\ \frac{d}{x^3}\mathrm{Tr}_{R(12)}\rho_R\left(g_1^3-\lambda^2 g_1^3\right)+\frac{1}{x^3}\mathrm{Tr}_{R(12)}\rho_R\left(\lambda^2 g_1^3-\lambda g_1^2\right)$$

Вычислим $\mathrm{Tr}_{R(3)}$

Для дальнейшего преобразования вычислим:

$$\begin{cases}\mathrm{Tr}_{R(12)}\rho_R(g_1^2)=d^2+\lambda d=d(d+\lambda)\\ \mathrm{Tr}_{R(12)}\rho_R(g_1^3)=\lambda d^2+d(1+\lambda^2)=d(1+\lambda^2+\lambda d)\end{cases}$$

С учётом $d=\frac{1-x^2}{\lambda}$ окончательно вычислим

$$\boxed{f_{\text{кол.}\ \text{Борромео}}}=\frac{d}{x^3}\left\{d^2-\lambda^2+\lambda^2(1-\lambda d)(1+\lambda d+\lambda^2)\right\}=$$

$$=\frac{d}{x}\left\{\frac{(1-x^2)^2}{\lambda^2x^2}-\frac{\lambda^2(1-x^2)^2}{x^2}+\lambda^4\right\}=$$

$$\boxed{=f_{\bigcirc}\cdot\left\{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2\left(\frac{1}{\lambda^2}-\lambda^2\right)+\lambda^4\right\}}\qquad(9)$$

Итак, мы проиллюстрировали метод вычисления f_{L_x} с использованием алгебраических соотношений в $H_n(q)$, циклического свойства R-следа и формул $\mathrm{Tr}_{R(2)}R_{12}=Id_1$ и $\mathrm{Tr}_R\,Id=d$. Больше ничего и не требуется => инвариант f_{L_x} связан с $H_n(q)$, а не её конкретным R-матричным представлением.

f_{L_x} – это фактически знаменитый HOMFLY-(PT) полином $P_{L_x}(x,\lambda)$.

Формула связи:

$$\boxed{P_{L_x}(x,\lambda) = \left.\frac{f_{L_x}(q,x)}{f_{\bigcirc}(q,x)}\right|_{q\mapsto\lambda:=q-q^{-1}}} \qquad (10)$$

Фактически в выражениях для $f_{\text{трилистн}}$ (8) и $f_{\text{Кол. Борромео}}$ (9) мы уже осуществили замену переменной $q\mapsto\lambda$. Вычислять с λ удобнее.

Немного истории: Многочлен HOMFLY-(PT) открыли независимо Peter Freyd, David Yetter, Jim Hoste, William Lickorish, Kenneth Millett, Adrian Ocneanu (FYHLMO – порядок авторов в совместной статье) в 1985г, и Josef Przytycki, Pawel Traczyk в 1987г.

Этот многочлен обобщает знаменитые многочлены от одной переменной:

⊛ Многочлен Джонса (Vaughan Jones), 1984г.

$$\boxed{V_L(t) = P_L(x,\lambda)\Big|_{\substack{x=t\\ \lambda=t^{1/2}-t^{-1/2}}}} \qquad (11)$$

→ Фактически многочлен Джонса соответствует $N=\dim V=2$ в наших R-матричных рассмотрениях. В этом случае $x=q^{-2}$ (см. (6)) и $\lambda=q-q^{-1}$, что заменой $q=-t^{-1/2}$ даёт многочлен Джонса.

⊛ Многочлен Александера-Конвея

J. W. Alexander II, 1923г; John Conway 1969г.

В нормировке Конвея:

$$\boxed{C_{L_x}(\lambda) := P_{L_x}(\varkappa, \lambda)\Big|_{\varkappa=1}} \qquad (12а)$$

Нормировка Александера:

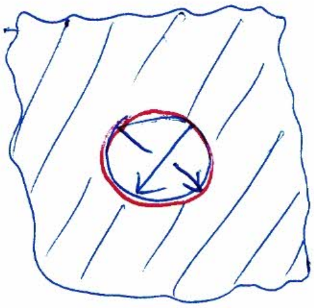
$$\boxed{A_{L_x}(t) := C_{L_x}(\lambda)\Big|_{\lambda = t^{1/2}-t^{-1/2}}} \qquad (12б)$$

Для всех этих многочленов есть графически удобное описание, использующее, так называемые, скейн-соотношения (skein relations), т.е. соотношения разматывания.

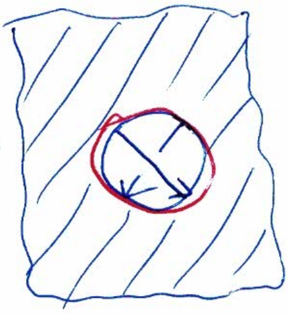
/ Skein (англ.) — моток /

Введем обозначения для тройки взаимосвязанных ориентированных зацеплений/узлов

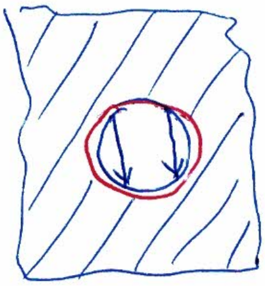
$L_+ :=$



$L_- :=$



$L_0 :=$



Проекции этих зацеплений тождественны везде, кроме одного пересечения, где они выглядят, как указано на рисунке.

Теорема Инвариант $f_L(q,\varkappa)$ однозначно характеризуется скейн-соотношением

$$\boxed{\frac{1}{\varkappa} f_{L_+} - \varkappa f_{L_-} = \lambda f_{L_0} \quad (\lambda := q - q^{-1}) \quad (13)}$$

и значением на тривиальном узле

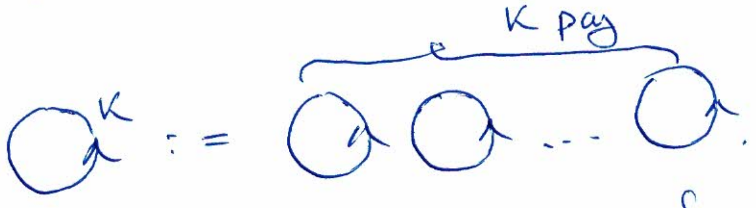
$$f_{\bigcirc} = \frac{1}{\varkappa}\mathrm{Tr}\, D^R = \frac{d}{\varkappa} = \frac{\varkappa^{-1}-\varkappa}{q-q^{-1}} \ (\text{см}(4'))$$

Доказательство:

Скейн-соотношение следует из соотношения Гекке для R-матрицы:

$$\frac{1}{\varkappa}(\varkappa R) - \varkappa(\varkappa R)^{-1} = \lambda\, \mathrm{Id}.$$

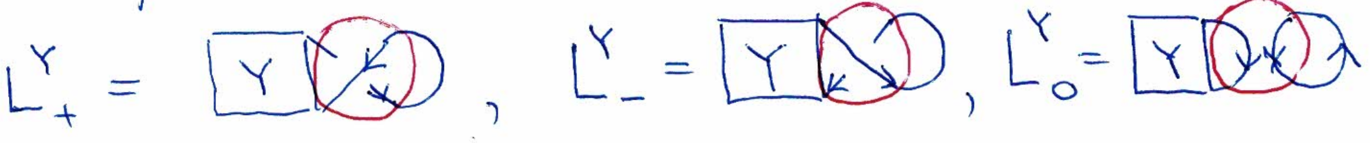
Заметим, что с использованием скейн-соотношений за конечное число шагов любой узел/зацепление можно "размотать" в линейную комбинацию зацеплений вида:



$k = 1, 2, \ldots$

Остается убедиться, что $f_{\bigcirc^k}$ однозначно вычисляется, если мы знаем $f_{\bigcirc}$.

Рассмотрим зацепления вида:



Замечая, что $L_+^Y = L_-^Y = \boxed{Y})$, и выбирая $\boxed{Y}) = \bigcirc^k$ мы получаем, что для таких зацеплений скейн-соотношения (13) дают уравнения:

$$\boxed{\left(\frac{1}{x}-x\right) f_{\bigcirc^k} = \lambda f_{\bigcirc^{k+1}}},$$

откуда следует:

$$\boxed{f_{\bigcirc^k} = \left(\frac{\frac{1}{x}-x}{\lambda}\right)^{k-1} f_{\bigcirc}} \quad (14)$$

$$\boxed{\forall\, k>1}$$

▨

Rem Скейн-соотношения для полиномов Джонса и Конвея имеют вид:

$$\frac{1}{t}V_{L_+}(t) - tV_{L_-}(t) = (t^{1/2}-t^{-1/2})V_{L_0}(t)$$

$$C_{L_+}(\lambda) - C_{L_-}(\lambda) = \lambda C_{L_0}(\lambda)$$

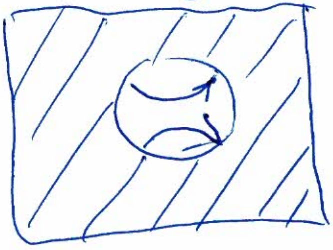
Граничные условия для них таковы

$$P_{\bigcirc} = V_{\bigcirc} = C_{\bigcirc} = 1$$

Финальные замечания об инвариантах зацеплений связанных с другими фактор-алгебрами группы кос и их R-матричными представлениями.

(А) Алгебры Бирман-Мураками-Венцле $BMW_n(q,\mu)$ имеют R-матричные представления только при определенных значениях μ: $\mu = \pm q^{Z(n)}$, $Z(n)$ - целое число. По таким R-матрицам строится инвариант Кауффмана 1990г /Luis Kauffmann/. Он также зависит от 2-х переменных: одна из них - q или $\lambda = q - q^{-1}$; вторая связана с TrD^R. Для инварианта Кауффмана также имеются скейн-соотношения, в которых присутствует 4-е слагаемое вида

$$L_= =$$



Это наиболее общее из известных сегодня скейн-соотношений.

(Б) Процедурой Fusion из гекковских и BMW-шных R-матриц можно строить более сложные R-матрицы, с минимальными многочленами высших (>3) степеней. По всей видимости, для них тоже удастся построить хорошую операцию

R-следа, уважающую марковские преобразования
II типа (≡ движения Рейдемейстера I типа). Известен
рецепт построения такой операции в рамках дуального
подхода: ленточные алгебры Хопфа — ribbon Hopf
algebras — это квазитреугольные алгебры Хопфа, снаб-
женные, ленточным элементом (ribbon element). Из этого ленточного
элемента строится R-след, называемый в этом
подходе q-следом или квантовым следом. Проблема
такого подхода — нетривиальность вычисления универ-
сальной R-матрицы и ленточного элемента. Подход ре-
ализован в простейшем случае ленточной алгебры
Хопфа, связанной с $U_q sl(2)$. На нашем двойствен-
ном языке — это "fusion" простейшей R-матрицы
Дринфельда-Джимбо, действующей над $V: \dim V=2$

Подход даёт семейство крашеных полино-
мов Джонса (colored Jones polynomials) — Николай
Решетихин, Владимир Тураев, 1991. Эти многочлены
зависят от одной непрерывной и одной дискретной
переменной n (цвет): $V_L^n(q)$, q - непрерывна.

$$\boxed{V_L^n(q)\Big|_{n=2} = V_L(q).}$$

(В) Наконец, у квантовых групп (≡ квази-треугольных алгебр Хопфа) – $U_q g$ – при значениях параметра $\boxed{q = \text{корень из } 1}$ имеются необычные, не встречающиеся в теории классических групп (алгебр) Ли, представления – циклические. С ними связаны непривычные R-матрицы. Простейшая такая R-матрица имеет вид: (dim V = 3)

$$R_{cycle} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
1 & & & \cdot & & & \cdot & & \\
 & 1+\omega s & & 1 & & & \cdot & & \\
 & & (1+\omega s)(1+\omega^2 s) & \cdot & -(1+\omega s)(1+\omega^2 s) & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\
\hline
\cdot & -\omega s & \cdot & 0 & & & \cdot & & \\
 & & \omega(1+\omega)s & & -\omega s & & 0 & & \\
 & & \cdot & & & s(\omega+s) & \cdot & \omega s(1+\omega) & \cdot \\
\hline
\cdot & \cdot & \omega^2 s^2 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & & \\
 & & \cdot & & & -s^2(1+\omega^2) & & 0 & \\
 & & \cdot & & & \cdot & & & s^2
\end{array}\right]$$

Здесь ω: $\omega^2 = 1+\omega$ и $\omega^3 = \underline{1}$, т.е. $\omega = e^{2\pi i/3}$ – это бывший параметр q. $s \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ – произвольный параметр. У R_{cycle} 3 разных собственных значения: $1, \omega s, s^2$, каждое встречается с кратностью 3 в характеристическом многочлене R_{cycle}. R_{cycle} порождает представление группы кос, не имеющее отношения к алгебрам BMW_n. По R_{cycle} можно строить инварианты зацеплений, они связаны с крашеными полиномами Джонса, но я не знаю, насколько эта связь однозначна.