Семинар 8.

Напомним некоторые обозначения и понятия. Пусть F - ненулевая форма от переменных $x_0, x_1, ..., x_n$, а $X = \{F(x_0, ..., x_n) = 0\}$ - гиперповерхность степени d в $\mathbb{P}^n$, определяемая формой F. Пусть $a = (a_0 : ... : a_n)$ и $b = (b_0 : ... : b_n)$ - точки в $\mathbb{P}^n$, $D_a :\ \mathbf{k}[x_0, ..., x_n] \to \mathbf{k}[x_0, ..., x_n],\ F \mapsto D_a F(x) := \sum_{i=0}^n a_i \frac{\partial F}{\partial x_i}$ - оператор поляризации, и $D_a^k := \underbrace{D_a \circ ... \circ D_a}_{k}$ - k-кратная композиция оператора D_a с самим собой.

Гиперповерхность $P_a(X) = \{x \in \mathbb{P}^n \mid (D_a F)(x) = 0\}$ в $\mathbb{P}^n$ называется *(первой) полярой точки a относительно гиперповерхности X*, а гиперповерхность $P_a^k(X) = \{x \in \mathbb{P}^n \mid (D_a^k F)(x) = 0\}$ в $\mathbb{P}^n$ называется *k-ой полярой точки a относительно гиперповерхности X*, $k \geqslant 1$.

Задача 1. 1) Проверьте, что $\frac{(D_a^d F)(b)}{d!} = F(a)$.
2) Докажите, что $\frac{(D_a^k F)(b)}{k!} = \frac{(D_b^{d-k} F)(a)}{(d-k)!},\quad 1 \leqslant k \leqslant d$.
3) Докажите, что если $b \in P_a^k(X)$, то $a \in P_b^{d-k}(X)$, и обратно.

Задача 2. Докажите, что для любых точек $a, b \in= \mathbb{P}^n$ верны следующие утверждения.
1) $P_b^m(P_a^k(X)) = P_a^k(P_b^m(X))$.
2) $P_a^m(P_a^k(X)) = P_a^{k+m}(X)$.
3) $a \in P_a^k(X)$ для любой точки $a \in X$ и любого k, $1 \leqslant k \leqslant d-1$.

Задача 3. Как было установлено на семинаре, касательное пространство $\mathbb{T}_b X$ к гиперповерхности X в произвольной точке $b \in X$ определяется формулой

$$\mathbb{T}_b X = \{x \in X \mid (D_x F)(b) = 0\}.$$

1) Докажите, что касательное пространство $\mathbb{T}_b X$ совпадает с $(d-1)$-ой (т.е. последней) полярой $P_b^{d-1}(X)$:

$$\mathbb{T}_b X = P_b^{d-1}(X).$$

2) Докажите, что $\mathbb{T}_b P_b^k(X) = \mathbb{T}_b X$ для любой точки $a \in X$ и любого k, $1 \leqslant k \leqslant d-1$.

Задача 4. Напомним, что точка $a \in X$ называется *особой*, если $\mathbb{T}_a X = \mathbb{P}^n$. Множество особых точек гиперповерхности X обозначается $\mathrm{Sing} X$.
1) Докажите, что если $b \in \mathrm{Sing} X$, то $b \in P_a(X)$ для любой точки $a \in X$.
2) Докажите, что если $a \in \mathrm{Sing} X$, то $a \in \mathrm{Sing} P_a^k(X)$ для любого k, $1 \leqslant k \leqslant d-1$.