Семинар 1

1. Запишите евклидову метрику $(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2$ в $\mathbb{R}^3$ в цилиндрических и сферических координатах.

2. Проверьте, что на ориентированном римановом многообразии формула $\mathrm{Vol}g = \sqrt{\det g} dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n$ на карте ориентирующего атласа с локальными координатами $x_1, \ldots, x_n$ корректно определяет каноническую (нигде не равную нулю) форму объема $\mathrm{Vol}g$.

3. Евклидова метрика $(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2$ в $\mathbb{R}^3$ индуцирует риманову метрику $g = g_{ij} du^i dv^j$ на гладкой поверхности $S \subset \mathbb{R}^3$, заданной с помощью вектор-значной функции $p(u,v)$. Докажите,что $\sqrt{\det g} = \mid \frac{\partial p}{\partial u} \times \frac{\partial p}{\partial v} \mid$ (=длина векторного произведения в E^3).

4. Поверхность геликоида задана параметрическими уравнениями: $x = v\cos u$, $y = v \sin u$, $z = au$. Вычислить матрицу Грама индуцированной на поверхности римановой метрики в базисе $(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v})$.

5. В пространстве $\mathbb{R}^3$ с псевдоримановой метрикой Минковского $(dx)^2+(dy)^2-(dz)^2$ рассмотрим связную компоненту гиперболоида $x^2+y^2-z^2=-1$, $z>0$. Проверьте, что метрика Минковского индуцирует на этой поверхности риманову метрику.

6. На поверхности гиперболоида из задачи 5 рассмотрим кривую $(0, \sinh t, \cosh t)$. Найти длину отрезка этой кривой между точками $t=0, t=5$.

7. Докажите, что на плоскости с римановой метрикой $(dx)^2+(dy)^2$ расстояние путешественника равно евклидову расстоянию между двумя точками.

8. На верхней полуплоскости Пуанкаре найдите расстояние между точками $-1+i, 1+i$.