СЕМИНАР 12 4 апреля 2023

Вычисление нетеровских интегралов движения

Пример 1 Механическая система с трением

задаётся (как убедимся) лагранжианом

$$\boxed{L(x, \dot{x}, t) = \frac{1}{2}\left(\dot{x}^2 - k^2 x^2\right) e^{2nt}} \quad (2)$$

Определим, при каких значениях параметра a семейство преобразований

$$\Delta_\varepsilon : \left\| \begin{array}{l} x \longmapsto \tilde{x} = e^{-\varepsilon a} x \\ t \longmapsto \tilde{t} = t + \varepsilon \end{array} \right. \qquad (3)$$

является симметрией действия. С этой целью посчитаем

$$S^{(0)}[\tilde{x}(\tilde{t})] = \int_{\tilde{t}_1}^{\tilde{t}_2} L\left(\tilde{x}, \frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}}, \tilde{t}\right) d\tilde{t} =$$

возвращаемся к переменной интегрирования t, учтя $d\tilde{t}/dt = 1$

$$= \int_{t_1}^{t_2} L\left(e^{-\varepsilon a} x, e^{-\varepsilon a} \frac{dx}{dt}, t + \varepsilon\right) dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2}\left(e^{-2\varepsilon a} \dot{x}^2 - k^2 e^{-2\varepsilon a} x^2\right) e^{2n(t+\varepsilon)} dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} e^{2\varepsilon(n-a)} \left(\dot{x}^2 - k^2 x^2\right) e^{2nt} dt$$

Очевидно, при $a = n$ $S^{(0)}[\tilde{x}(\tilde{t})] = S^{(0)}[x(t)]$ и преобразования (3) являются симметрией действия механической системы (2) при выборе функции $\Lambda(\tilde{x}, \tilde{t}; \varepsilon) = 0$ (см. (3а) в Лекции 8).

Очевидно также, что при $n \neq a$ никаким выбором $\Lambda(\tilde{x}, \tilde{t}; \varepsilon)$ мы не сможем обеспечить $S^{(0)}[x(t)] = S^{(\Lambda)}[\tilde{x}(\tilde{t})]$ так как разность $S^{(0)}[\tilde{x}(\tilde{t})] - S^{(0)}[x(t)]$ при $n \neq a$ содержит в подынтегральном выражении член квадратичный по $\dot{x}$, а компенсация, вносимая $\Lambda(\tilde{x}, \tilde{t}; \varepsilon)$ содержит только члены степеней 0 и 1 по $\dot{x}$.

Итак $\left\{\begin{array}{l} \tilde{x}_\varepsilon = e^{-n\varepsilon} x \\ \tilde{t}_\varepsilon = t + \varepsilon \end{array}\right.$ – симметрия действия

Соответствующий нётеровский ток

$$\left(\xi_0 = \frac{\partial \tilde{t}_\varepsilon}{\partial \varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} = 1,\ \xi_1 = \frac{\partial \tilde{x}_\varepsilon}{\partial \varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} = -nx, \quad \lambda = 0 \right)$$

имеет вид

$$I = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(-nx) - \left(\dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - L\right)\cdot 1 =$$

$$= \boxed{-\frac{1}{2} e^{2nt}\left(\dot{x}^2 + k^2 x^2 + 2nx\dot{x}\right) = \text{const}} \quad (4)$$

Это замена закона сохранения энергии для этой неконсервативной системы (термин для обозначения систем, в которых энергия не сохраняется)

Что описывает эта система?

Её уравнения Эйлера-Лагранжа приводятся к виду

$$\boxed{\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = 0} \quad (5)$$

Такое уравнение описывает гармонический осциллятор в среде с трением, пропорциональным скорости. n – коэффициент трения.

При $0 < n < |k|$ имеем затухающие гармонические колебания:

$$\boxed{x(t) = A e^{-nt} \cos(\omega t + \varphi)}, \text{ где } \omega = \sqrt{k^2 - n^2} -$$

общее решение дифура (A и φ определяются начальными данными задачи).

То, что естественно назвать физической энергией системы $\boxed{E_{физ} = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{k^2}{2}x^2}$

кинетическая и потенциальная энергии осциллятора

уменьшается со временем экспоненциально (e^{-2nt}), испытывая при этом колебания с частотой 2ω (влияние слагаемого $2nx\dot{x}$), как видно из (4). Но никогда не растет.

Математическое определение энергии $\boxed{E_{мат} = \dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - L = e^{2nt} E_{физ}}$ не убывает, а колеблется.

Отличие "математической" энергии от физической – верный признак нефундаментальности этой модели.

Пример 2. Модельная система с симметрией

Действие механической системы с двумя степенями свободы имеет вид:

$$S[x(t),y(t)] \;=\; \int \Big\{\dot{x}^2 y^{-4} + \dot{y}^2 t^2 - x^2 y^2 t\Big\}\, dt$$

а) При каких значениях параметров $a, b \in \mathbb{R}$ преобразование Δ_ε:

$$\tilde{x} = e^{\varepsilon} x, \qquad \tilde{y} = e^{a\varepsilon} y, \qquad \tilde{t} = e^{b\varepsilon} t,$$

является симметрией действия?

б) В случае, когда Δ_ε является симметрией, постройте соответствующий Нетеровский интеграл движения.

Решение.

а) Выразим все старые переменные через новые:

$$x = e^{-\varepsilon}\tilde{x}, \quad y = e^{-a\varepsilon}\tilde{y}, \quad t = e^{-b\varepsilon}\tilde{t} \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = \frac{dx}{dt} = e^{(b-1)\varepsilon}\dot{\tilde{x}}, \quad \dot{y} = e^{(b-a)\varepsilon}\dot{\tilde{y}},$$

где символ $\dot{\tilde{x}}$ означает производную по времени $\tilde{t}$: $\dot{\tilde{x}} = d\tilde{x}/d\tilde{t}$.

Подставим эти выражения в действие системы:

$$\tilde{S}[\tilde{x}(\tilde{t}),\tilde{y}(\tilde{t})] = \int \Big\{e^{2(b-1+2a)\varepsilon}\dot{\tilde{x}}^2\tilde{y}^{-4} + e^{-2a\varepsilon}\dot{\tilde{y}}^2\tilde{t}^2 - e^{-(b+2a+2)\varepsilon}\tilde{x}^2\tilde{y}^2\tilde{t}\Big\}\, e^{-b\varepsilon} d\tilde{t}.$$

Требование инвариантности действия $\tilde{S} = S$ приводит к трем соотношениями на два параметра a и b:

$$b + 4a - 2 = 0, \quad b + 2a = 0, \quad 2b + 2a + 2 = 0,$$

которые совместны при $b = -2$, $a = 1$. Итак, преобразования

$$\tilde{x} = e^{\varepsilon} x, \qquad \tilde{y} = e^{\varepsilon} y, \qquad \tilde{t} = e^{-2\varepsilon} t, \tag{1}$$

являются симметрией системы.

б) Для построения Нетеровского интеграла необходимо найти генераторы однопараметрической группы преобразований (1). Единице группы отвечает значение параметра $\varepsilon = 0$, поэтому генераторы даются следующими формулами:

$$\xi_0 = \frac{d\tilde{t}}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = -2t, \qquad \xi_x = \frac{d\tilde{x}}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = x, \qquad \xi_y = \frac{d\tilde{y}}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = y.$$

Нётеровский интеграл движения:

$$I = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\,\xi_x + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\,\xi_y + \left(L - \dot{x}\,\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \dot{y}\,\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right)\xi_0 = 2\dot{x}xy^{-4} + 2\dot{y}yt^2 + 2t(\dot{x}^2y^{-4} + \dot{y}^2t^2 + x^2y^2t).$$