Группа кос, квантовые группы и приложения

Листок 3. R-матрицы и инварианты зацеплений

Рекомендуемый срок сдачи: 05.04.2023

---

1. Представление Бурау. Проверьте, что формулы

$$\begin{cases} g_i\, v_k &= \; q\, v_k, \;\; \forall\, k \neq i, i+1, \\ g_i\, v_i &= \; (q - q^{-1})\, v_i + x^{-1}\, v_{i+1}, \qquad \forall\, i = 1, \ldots, n-1, \\ g_i\, v_{i+1} &= \; x\, v_i, \end{cases}$$

где $x, q \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, задают действие артиновых генераторов $g_i \in H_n(q)$ на n-мерном пространстве с базисом $\{v_k\}_{k=1,\ldots,n}$. Постройте разложение этого представления в прямую сумму неприводимых 1-мерного и $(n-1)$-мерного представлений. Каким диаграммам Юнга отвечают эти неприводимые представления?

2. Проверьте, что R-матрицы, действующие на тензорном квадрате двумерных (примеры а)-в)) или трехмерных (примеры г),д)) пространств, удовлетворяют соотношению кос $R_{12}R_{23}R_{12} = R_{23}R_{12}R_{23}$.

Для R-матриц из примеров а)-г) проверьте, что они удовлетворяют соотношению Гекке $(R - qId)(R + q^{-1}Id) = 0$, и определите кратности собственных значений q и q^{-1}.

Для R-матрицы из примера д) убедитесь, что ее минимальный многочлен имеет вид $(R - qId)(R + q^{-1}Id)(R - q^2 Id) = 0$, и определите кратности собственных значений.

Подсказка. Для упрощения вычислений можно воспользоваться соображениями, приведенными на стр.8 записок лекции про R-матричные представления группы кос. Допустимо также реализовать проверку с использованием программы Wolfram Mathematica.

а) $R = \begin{pmatrix} q & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \lambda & x & \cdot \\ \cdot & x^{-1} & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & q \end{pmatrix}$ — R-матрица Дринфельда-Джимбо, тип $GL(2)$. Здесь и далее: $\lambda := q - q^{-1}$; в R-матрицах явно выписаны все компоненты нетривиальных диагональных матричных блоков; нулевые компоненты недиагональных блоков обозначены точками "$\cdot$".

б) $R = \begin{pmatrix} q & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \lambda & x & \cdot \\ \cdot & x^{-1} & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -\frac{1}{q} \end{pmatrix}$ — R-матрица Кулиша-Склянина, тип $GL(1|1)$.

в) $R = \begin{pmatrix} q & \cdot & \cdot & y \\ \cdot & \lambda & x & \cdot \\ \cdot & x^{-1} & 0 & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & -\frac{1}{q} \end{pmatrix}$ — R-матрица Риттенберга, тип $GL(1|1)$. Здесь параметры x и $y \neq 0$ не произвольны. Их следует подобрать так, чтобы выполнялось соотношение кос.

г)[*1] $R = \begin{pmatrix} q & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \lambda & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \lambda & \cdot & -\frac{x}{q} & \cdot & \frac{1}{q} & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 & \cdot & q & \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \lambda & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & q & \cdot & qx & \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & q \end{pmatrix}$ — R-матрица Креммера-Жерве, тип $GL(3)$. Здесь $x \neq 0$.

д)* $R = \begin{pmatrix} q & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \lambda & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \frac{(q-1)\lambda}{q} & \cdot & \frac{\lambda y}{q} & \cdot & \frac{1}{q} & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \frac{\lambda}{y} & \cdot & 1 & \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \lambda & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \frac{1}{q} & \cdot & 0 & \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & q \end{pmatrix}$ — R-матрица ортогонального типа $O(3)$. Она порождает серию R-матричных представлений алгебр Бирман-Мураками-Венцля $BMW_n(q, \mu = q^{-2})$ (см. самый конец записок лекций по алгебрам Гекке).

3. Для R-матриц из предыдущей задачи проверьте, что

а) ядру R-матричного представления $H_3(q)$, порождаемого R-матрицей Дринфельда-Джимбо 2.а), принадлежит идемпотент, отвечающий разбиению $\{1,1,1\} \vdash 3$;

б) ядру R-матричного представления $H_4(q)$, порождаемого R-матрицей Креммера-Жерве 2.г), принадлежит идемпотент, отвечающий разбиению $\{1,1,1,1\} \vdash 4$;

в)* ядрам R-матричных представлений $H_4(q)$, порождаемых R-матрицами Кулиша-Склянина и Риттенберга, принадлежат примитивные идемпотенты, отвечающие разбиению $\{2,2\} \vdash 4$ (для каждой R-матрицы достаточно проверить утверждение для одного из примитивных идемпотентов).

Подсказка. Для упрощения вычислений можно применить метод, использованный в лекциях по R-матричным представлениям для вычисления рангов идемпотентов, отвечающих диаграммам-столбцам – q-антисимметризаторов (см. стр.17-19 записок про кософбратимые R-матрицы).

Допустимо также провести проверку с помощью Wolfram Mathematica, вычисляя выражения для идемпотентов в терминах элементов Юциса-Мерфи (см. лекции по алгебрам Гекке).

4. Для R-матриц из задачи 2 вычислите матрицы R-следа C^R и D^R.

5. Пусть $R \equiv R_{12} \in \mathrm{Aut}(V \otimes V)$ — кософбратимая R-матрица. V — $\mathbb{C}$-линейное пространство, $N = \dim V$.

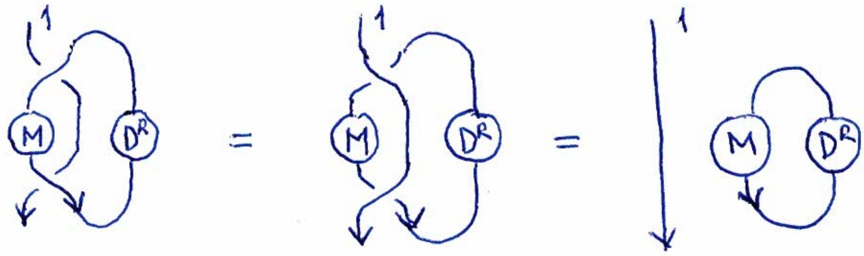
Пусть $M \in \mathrm{Mat}_N(U)$ — произвольная $N \times N$ матрица, компоненты которой являются элементами некоторого $\mathbb{C}$-линейного пространства U. Докажите соотношения

$$\mathrm{Tr}_{R_{(2)}} \left(R_{12}^{\varepsilon} M_1 R_{12}^{-\varepsilon} \right) = \mathrm{Id}_1 \left(\mathrm{Tr}_R M \right), \quad \text{где } \varepsilon = \pm 1, \quad \mathrm{Tr}_R M := \mathrm{Tr}(D^R M).$$

[1] Задачи, помеченные значком $*$ являются дополнительными.

Подсказка. Воспользуйтесь формулами (14а,б) со стр.7 записок про кособратимые R-матрицы.

Графически эти соотношения можно изобразить так:

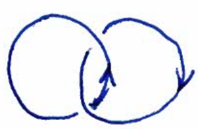


6. Для всех изображенных на рисунках ниже ориентированных узлов/зацеплений L постройте косы, замыканием которых они являются, и вычислите инвариант HOMFLY-(PT) $P_L(\varkappa, \lambda)$ (см. записки лекции по инвариантам узлов/зацеплений, формулы (3), (4/4'), (10)).

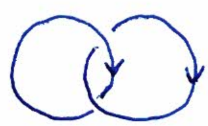
Для разных примеров можно провести вычисления как с помощью R-матричной техники, так и с использованием скейн-соотношений.

а) Зацепления Хопфа

1)



2)



б) Узел трилистник и его зеркальное отражение

1)

2)

в) Узел "восьмерка"

г) Зацепление "узел Соломона"