Семинар 9.

Задача 1. Докажите, что кубика, заданная в Вейрштрассовой форме $y^2 = f_3(x)$, неособа (в том числе и в бесконечности) тогда и только тогда, когда кубический многочлен $f_3(x)$ не имеет кратных корней.

Задача 2. Докажите, что неособая кубика, заданная в Вейрштрассовой форме, имеет в аффинной карте ровно 8 точек перегиба. (Точку перегиба $(0:0:1)$ мы отметили отдельно.)

Задача 3. *Системой Штейнера* называется конечное множество S и некоторый набор его подмножеств $\mathcal{L} \subset 2^S$, называемых "прямыми", так что через любые две точки S проходит единственная "прямая" и любая "прямая" содержит ровно три точки S.
1) Найдите какие-нибудь численные ограничений на число точек в S.
2) Опишите все системы Штейнера, состоящие из не более, чем 9 точек. (Одна такая система Штейнера из 9 точек - аффинная плоскость над полем из 3 элементов, уже была найдена на семинаре.)

Задача 4. * Докажите, что любая неособая кубика подходящим выбором проективных координат приводится к Вейрштрассовой форме.

Задача 5. * Хорошо известно, что для аффинной кривой с уравнением $y = f(x)$ точки перегиба находятся из уравнения $f'' = 0$. Попробуйте, исходя из этого, получить уравнение на точки перегиба кривой, заданной в однородных координатах уравнением $F(x_0 : x_1 : x_2) = 0$, в терминах формы F. (Очевидный подход к решению: в аффинной части кривая задается уравнением $F(1, x, y) = 0$, это соотношение задает y как неявную функцию от x, и, казалось бы, остается только вычислить y''.)