

Группа кос, квантовые группы и приложения

Листок 4. Скобки Пуассона на коммутативной алгебре

Рекомендуемый срок сдачи: 17 апреля 2023

1. Пусть M — гладкое n -мерное многообразие, $\{z^i\}_{1 \leq i \leq n}$ — локальные координаты в некоторой области $U \subset M$. Скобка Пуассона любых двух функций f и g из алгебры гладких функций $\mathcal{F}(M)$ в локальных координатах имеет вид:

$$\{f, g\} = \sum_{i, k=1}^n \partial_i f(z) \omega^{ik}(z) \partial_k g(z), \quad \partial_i f \equiv \frac{\partial f}{\partial z^i},$$

где $\omega^{ik}(z) = \{z^i, z^k\}$ — пуассонов тензор.

- Пользуясь определением пуассоновой структуры, выведите условия на пуассонов тензор, которые налагаются на него этим определением.
- Пусть матрица пуассонова тензора не вырождена в области $U \subset M$: $\det \|\omega^{ik}(z)\| \neq 0$. Обозначим символами $\omega_{ik}(z)$ матричные элементы обратной матрицы:

$$\sum_{k=1}^n \omega_{ik}(z) \omega^{kj}(z) = \delta_i^j.$$

Докажите, что дифференциальная 2-форма $\Omega = \sum_{i, k} \omega_{ik} dz^i \wedge dz^k$ является замкнутой и невырожденной в области U (то есть, задает симплектическую структуру в области U).

2. Пусть алгебра гладких функций $\mathcal{F}(M)$ на многообразии M снабжена пуассоновой структурой (см. задачу 1.). По любой заданной функции $f \in \mathcal{F}(M)$ определим гамильтоново векторное поле X_f из касательного расслоения TM следующим действием на функции:

$$X_f \triangleright g = \{f, g\}, \quad \forall g \in \mathcal{F}(M).$$

- Докажите, что множество гамильтоновых векторных полей образует алгебру Ли относительно операции коммутирования и стандартных операций сложения и умножения на элементы числового поля.
- Для невырожденной пуассоновой структуры найдите значение 2-формы $\Omega(X_f, X_g)$ (см. пункт б) задачи 1) на паре произвольных гамильтоновых векторных полей X_f и X_g .

3. Рассмотрим линейное пространство $gl(N)^*$ двойственное к алгебре Ли $gl(N)$. Обозначим символами t_i^j , $1 \leq i, j \leq N$, координаты в $gl(N)^*$ относительно базиса, двойственного к базису матричных единиц E_i^j в алгебре $gl(N)$. В алгебре $\mathcal{F}(gl(N)^*)$ полиномиальных функций на $gl(N)^*$ скобка Пуассона-Ли вводится с помощью структурных констант алгебры Ли $gl(N)$:

$$\{t_{i_1}^{j_1}, t_{i_2}^{j_2}\}_{PL} = t_{i_1}^{j_2} \delta_{i_2}^{j_1} - t_{i_2}^{j_1} \delta_{i_1}^{j_2},$$

или, в матричных обозначениях:

$$\{T_1, T_2\}_{PL} = P_{12} T_1 - T_1 P_{12},$$

где P_{12} — матрица транспозиции, а $T = \|t_i^j\|$ — $N \times N$ матрица, составленная из координат. Докажите, что однородные полиномы $p_k(t) = \text{Tr}(T^k)$ принадлежат пуассоновому центру скобки Пуассона-Ли.

4. Введем в алгебре $\mathcal{F}(gl(N)^*)$ билинейную операцию $\{, \}_{Sk}$ по формуле (обозначения из задачи 3):

$$\{T_1, T_2\}_{Sk} = T_1 T_2 r_{12} - r_{12} T_1 T_2,$$

и распространим ее на любые функции по правилу Лейбница $\{f, gh\}_{Sk} = \{f, g\}_{Sk} h + g \{f, h\}_{Sk}$. Здесь $r_{12} = \|r_{i_1 i_2}^{j_1 j_2}\|$ — $N^2 \times N^2$ числовая матрица матрица. При каких условиях на r_{12} введенная операция будет скобкой Пуассона?

5. Пуассонова структура $\{, \}_{Sk}$ называется скобкой Складина. Докажите, что

- а) Линейный полином $p_1(t) = \text{Tr}(T)$ не лежит в пуассоновом центре скобки Складина, заданной классической r -матрицей Дринфельда-Джимбо.
- б)* Детерминант матрицы координат $\det(T)$ является элементом пуассонова центра скобки Складина.

Указание. Для решения задачи из пункта б) полезны следующие формулы, выражающие детерминант матрицы в терминах полностью антисимметрического тензора ранга N :

$$\begin{aligned} \sum_{i_1 \dots i_N} \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_N} t_{j_1}^{i_1} t_{j_2}^{i_2} \dots t_{j_N}^{i_N} &= \det(T) \varepsilon_{j_1 j_2 \dots j_N}, \\ \sum_{i_2 \dots i_N} \varepsilon_{a i_2 i_3 \dots i_N} \varepsilon^{b i_2 i_3 \dots i_N} &= (N-1)! \delta_a^b, \\ \det(T) &= \frac{1}{N!} \sum_{\{i\}, \{j\}} \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_N} t_{j_1}^{i_1} t_{j_2}^{i_2} \dots t_{j_N}^{i_N} \varepsilon^{j_1 j_2 \dots j_N}. \end{aligned}$$

6. На алгебре полиномиальных функций можно ввести другую квадратичную пуассонову структуру, связанную с классической r -матрицей (скобка Семенова Тянь-Шанского):

$$\{T_1, T_2\}_{STS} = r_{21} T_1 T_2 - T_1 T_2 r_{12} + T_2 r_{12} T_1 - T_1 r_{21} T_2,$$

где $r_{21} = P_{12} r_{12} P_{12}$. Пользуясь классической r -матрицей Дринфельда-Джимбо, получите явный вид скобки Семенова Тянь-Шанского для случая $N = 2$ и докажите, что след и детерминант матрицы координат лежат в пуассоновом центре этой скобки. При решении задачи пользуйтесь следующим обозначением для координат пространства $gl(2)^*$:

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

7. Пусть \mathcal{A}_h — квантование коммутативной алгебры \mathcal{A} , $a \star b$ — новое умножение в векторном пространстве $\mathcal{A}[[h]]$, порожденное изоморфизмом квантования α_h :

$$a \star b = \alpha_h^{-1}(\alpha_h(a) * \alpha_h(b)) = a \cdot b + h c_1(a, b) + h^2 c_2(a, b) + \dots, \quad \forall a, b \in \mathcal{A}.$$

Рассмотрим автоморфизм некоммутативной ассоциативной алгебры $\omega_h : \mathcal{A}[[h]] \rightarrow \mathcal{A}[[h]]$, тождественный на компоненте пространства $\mathcal{A}[[h]]$ нулевой степени по h : $\mathcal{A} = \mathcal{A}[[h]] / (h\mathcal{A}[[h]])$, то есть, как $\mathbb{C}[[h]]$ -линейное отображение изоморфизм ω_h имеет следующую структуру:

$$\omega_h = \text{id} + h\omega_1 + h^2\omega_2 + \dots$$

- а) Докажите, что линейное отображение ω_1 является дифференцированием коммутативной алгебры \mathcal{A} , то есть,

$$\omega_1(a \cdot b) = \omega_1(a) \cdot b + a \cdot \omega_1(b), \quad \forall a, b \in \mathcal{A}.$$

- б) Докажите, что антисимметрическая часть $c_1(a, b) - c_1(b, a)$ линейного по h слагаемого в произведении $a \star b$ не изменяется при действии автоморфизма ω_h . Таким образом, алгебра $\omega_h(\mathcal{A}[[\hbar]])$ также является квантованием коммутативной алгебры \mathcal{A} с той же пуассоновой структурой.