

Устойчивость особых точек

1. Пусть в окрестности  $U$  неподвижной точки  $0$  отображения  $F$  определена функция Ляпунова. Докажите, что есть окрестность  $V \ni 0$ , такая что  $F(C) \subset V$ .
2. Докажите, что если для векторного поля можно в окрестности особой точки определить функцию Четаева, то особая точка неустойчива по Ляпунову (см. опр. 8.1.17 и лемму 8.1.18).
3. Нарисуйте фазовый портрет системы  $\dot{x} = -\text{grad } U(x)$ , где  $U(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1^4 + 2x_2^2$ . Нарисуйте разбиение плоскости на множества уровня функции  $U$  и сравните два рисунка. Какую функцию можно взять в качестве функции Ляпунова/Четаева в окрестности каждой особой точки?
4. (Задача 7, с. 449) Рассмотрим уравнение  $\ddot{x} = -\text{grad } U(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
  - а) Пусть функция  $U$  имеет в нуле строгий локальный максимум. Докажите, что  $0$  — устойчивое положение равновесия.
  - б) Верно ли обратное утверждение для непостоянной  $U \in C^\infty$ ? Для непостоянной аналитической  $U$ ?Дополнение: постройте гладкую  $U$ , для которой  $0$  является устойчивым положением равновесия, но не является точкой минимума или максимума для  $U$ .