Дополнительные главы теории дифференциальных уравнений, весна 2023г.

Семинар 11

Теорема Гробмана-Хартмана и топологическая эквивалентность

1. Пусть F_a – семейство гладких отображений, гладко зависящих от конечномерного параметра a. Пусть отображение F_0 имеет неподвижную точку p и единица не является собственным значением для $F_0'(p)$. Докажите, что при a, близких к нулю, существует единственная неподвижная точка для F_a вблизи точки p.

2. При каком (достаточном) условии на собственные числа линеаризации особая точка векторного поля «выживает» при возмущении этого поля в конечнопараметрическом семействе векторных полей?

3. Пусть p – периодическая точка периода m для C^1-отображения F и $(F^m)'(p)$ не имеет собственного значения 1. Докажите, что тогда для всех отображений G, C^1-близких к F, существует единственная точка периода m, близкая к p. (Уравнение на периодическую точку переписывается в виде $x = (F^m - \mathrm{Id})^{-1}(F^m - G^m)(x)$. Справа стоит отображение, сжимающее некоторый шар с центром в нуле.)

4. Существует ли (a) диффеоморфизм, (b) гомеоморфизм h, сопрягающий линейные отображения прямой $f\colon x \mapsto \frac{1}{2}x$ и $g\colon x \mapsto \frac{1}{4}x$? Т.е. такой, что $h \circ f = g \circ h$. (h переводит неподвижную точку в неподвижную точку; рассмотрите производные в неподвижных точках – как они связаны для отображений, сопряженных диффеоморфизмом? Рассмотрите $h(x) = x^2$. Альтернативное предложение: рассмотрите фундаментальные области для f и g (промежутки между соседними точками одной орбиты) и произвольный гомеоморфизм между ними.)

5. Являются ли линейные операторы на плоскости $\frac{1}{2}\mathrm{Id}$ и $-\frac{1}{2}\mathrm{Id}$ топологически эквивалентными в окрестности нуля? (Из доказательства глобальной версии теоремы Г.-Х. следует, что при малом возмущении гиперболического линейного отображения в классе линейных операторов получается отображение, топологически эквивалентное исходному вблизи нуля. Выведите отсюда, что если два гиперболических линейных отображения можно соединить путем из гиперболических линейных отображений, то они топ. эквивалентны в окрестности нуля.) Являются ли они глобально топологически эквивалентными?

6. При каком условии два гиперболических линейных оператора в $\mathbb{R}^n$ топологически эквивалентны в окрестности нуля? глобально?

7. Пусть у векторного поля в $\mathbb{R}^{n+1}$ есть гиперболический предельный цикл. Докажите, что отображение Пуанкаре P для этого цикла сохраняет ориентацию. Пусть $n = 2$, у неподвижной точки отображения Пуанкаре одномерные устойчивое и неустойчивое инвариантные подпространства и производная отображения Пуанкаре в ограничении на них меняет ориентацию. Как выглядит насыщение устойчивого и неустойчивого многообразий неподвижной точки отображения P траекториями векторного поля в окрестности цикла? (См. раздел 8.3.2 учебника.)