Дополнительные главы теории дифференциальных уравнений, весна 2023г.

Семинары 9–10

Теорема Гробмана–Хартмана

1. Повторите вывод функционального уравнения.

2. Докажите лемму 8.3.35. Далее рассмотрите аффинный сжимающий оператор
$$\varphi^s \mapsto S\varphi^s + f^s \circ A^{-1}$$
и оцените расстояние между нулевой функцией и неподвижной точкой этого оператора, рассматривая орбиту нулевой функции (это рассуждение было проведено на лекции и повторено на семинаре). Получилась оценка на норму «устойчивой компоненты» решения гомологического уравнения.

3. Стартуя с «неустойчивой части» гомологического уравнения ($h^u \circ A - Mh^u = f^u$), превратите ее решение в неподвижную точку некоторого сжимающего оператора и получите оценку на норму решения. (Домножьте уравнение на M^{-1} слева.[1]).

4. Докажите, что непрерывная биекция из компактного пространства в хаусдорфово — гомеоморфизм.

5. Пусть $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — ограниченное липшицево отображение с константой Липшица меньше 1. Докажите, что $\mathrm{Id} + f$ — гомеоморфизм. (Прообраз точки оказывается неподвижной точкой сжимающего оператора.)

6. Пусть E — банахово пространство, L, G — ограниченные линейные операторы, $\|L\| = \lambda < 1$, а G обратим и $\|G^{-1}\| = \mu < 1$. Докажите, что

1) $\mathrm{Id} + L$ обратим и $\|(\mathrm{Id} + L)^{-1}\| < \frac{1}{1-\lambda}$.

2) $\mathrm{Id} + G$ обратим и $\|(\mathrm{Id} + G)^{-1}\| < \frac{\mu}{1-\mu}$.

7. Докажите предложение 8.3.33.

[1] M — это ограничение гиперболического дифференциала отображения из теоремы ГХ в неподвижной точке на растягивающееся (в правильной норме) инвариантное подпространство.