# 11 Лекция 11. Невырожденные особые точки на плоскости

## 11.1 Формулировки

В этой лекции будут доказаны следующие ниже теоремы.

**Теорема 1** *Нелинейное седло имеет ровно 4 сепаратрисы. Они входят в седло по тем же направлениям, что и сепаратрисы линейной части поля в седле. Остальные фазовые кривые покидают малую окрестность седла.*

Напомним, что типичный узел – это узел с различными собственными значениями. Без ограничения общности можно считать, что эти собственные значения отрицательны: $\mu < \lambda < 0$. В противном случае мы обратим время.

**Теорема 2** *Пусть точка* $(0,0)$ *- типичный узел для системы*

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda x + f, \\ \dot{y} = \mu y + g, \end{cases} \quad \mu < \lambda < 0, \;\; f = O(r^2), \;\; g = O(r^2) \tag{1}$$

*Тогда две фазовые кривые уравнения входят в* $0$ *с противоположных сторон, касаясь оси* $y$*, а остальные входят в* $0$*, касаясь оси* $x$*.*

Заметим, что именно так ведут себя фазовые кривые линеной части системы (1).
с. 426

**Теорема 3** *По каждому направлению в дикритический узел входит ровно одна фазовая кривая системы*

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda x + O(r^2) \\ \dot{y} = \lambda y + O(r^2); \end{cases}$$

*Эти кривые заполняют некоторую окрестность нуля.*

**Теорема 4** *Существуют ровно две фазовые кривые, входящие в жорданов узел* $0$ *по противоположным направлениям и обладающзие следующим свойством. Их объединение делит окрестность нуля на две части; все фазовые кривые, расположенные в одной части, входят в* $0$*, касаясь одной из этих кривых, расположенные в другой части входят в* $0$*, касаясь другой кривой.*

Далее следует раздел 8.3.3, некоторые части которого требуют модификации, приведенной ниже.

## 11.2 Единственность сепаратрис

Докажем, что сепаратриса, входящая в ноль вдоль направления $\varphi = 0$, на самом деле одна. Это рассуждение не использует раздутие.

Мы покажем, что в исходных координатах в секторе $S_\varepsilon = \{|\varphi| \le \varepsilon, r \le x_0\}$ траектории нелинейной системы расходятся примерно так же, как траектории линейной, пока они остаются в секторе $S_\varepsilon$. Отсюда получается, что если в ноль входят две сепаратрисы по направлению $\varphi = 0$, то они должны разойтись на бесконечное расстояние — противоречие.

Запишем систему (1) как неавтономное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\mu y + g}{\lambda x + f} := v, \tag{2}$$

и пусть графики решений $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ лежат в секторе $S_\varepsilon$ над отрезком $x \in [0, x_0]$.

**Предложение 1** *В сделанных предположениях для любого $\delta > 0$ существует сколь угодно малое $x_0$ такое, что если графики решений $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ лежат в секторе $S_\varepsilon$ над отрезком $x \in [x_1, x_0]$, то*

$$|y_2(x_1) - y_1(x_1)| > |y_2(x_0) - y_1(x_0)| \left(\frac{x_1}{x_0}\right)^{\frac{\mu-\delta}{\lambda}} := \xi(x_1). \tag{3}$$

Поскольку показатель $\frac{\mu-\delta}{\lambda}$ отрицательный, $\xi(x) \to \infty$ при $x \to 0$. Отсюда следует, что никакие два решения, графики которых лежат в $S_\varepsilon$, не могут быть определены на отрезке $[0, x_0]$, то есть не могут одновременно входить в особую точку. Отсюда следует единственность сепаратрисы, входящей в ноль по направлению $\varphi = 0$. Нам осталось доказать предложение 1.

**Доказательство** [Доказательство предложения] Сравним правую часть уравнения (2) с функцией $\frac{\mu y}{\lambda x}$:

$$v - \frac{\mu y}{\lambda x} =: \frac{R}{\lambda x}, \qquad R = \frac{\lambda g - \mu \frac{fy}{x}}{\lambda + \frac{f}{x}}.$$

Заметим, что в секторе $S_\varepsilon$ функция $\frac{y}{x}$ ограничена, а функции $\frac{f}{x}, \frac{g}{x}$ и частные производные $f_y, g_y$ стремятся к нулю при $(x, y) \to 0$ в секторе $S_\varepsilon$. Следующая выкладка показывает, что $R_y \to 0$ при $(x, y) \to 0$:

$$R_y = \frac{\lambda g_y - \mu(f_y \frac{y}{x} + \frac{f}{x})(\lambda + \frac{f}{x}) - \frac{f_y}{x}(\lambda g - \mu \frac{fy}{x})}{(\lambda + \frac{f}{x})^2} \to 0.$$

Выберем $x_0$ так, что $|R_y| < \delta$ в секторе $S_\varepsilon$, а частное $\frac{f_y}{x}$ ограничено в этом секторе. Теперь мы готовы оценить расхождение решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$. Так как разные фазовые кривые не пересекаются, $y_1(x) - y_2(x) \neq 0$; будем считать $y_1(x) - y_2(x) > 0$. В секторе $S_\varepsilon$

$$\frac{d}{dx}(y_1-y_2) = \frac{\mu y_1}{\lambda x} - \frac{\mu y_2}{\lambda x} + \frac{R(y_1,x)}{\lambda x} - \frac{R(y_2,x)}{\lambda x} = \frac{\mu(y_1-y_2)}{\lambda x} + \frac{R_y(\eta,x)(y_1-y_2)}{\lambda x} \leq \frac{\mu-\delta}{\lambda x}(y_1-y_2),$$

где $\eta \in [y_1, y_2]$; мы воспользовались теоремой Лагранжа о конечных приращениях и оценкой на $R_y$. Отсюда

$$\frac{d}{dx}(\ln(y_1-y_2)) \leq \frac{\mu-\delta}{\lambda x}.$$

Интегрируя это неравенство, по формуле Ньютона–Лейбница, учитывая, что $x_1 < x_0$, получаем

$$\ln(y_1(x_0) - y_2(x_0)) \leq \ln(y_1(x_1) - y_2(x_1)) + \frac{\mu-\delta}{\lambda}\ln\left|\frac{x_0}{x_1}\right|,$$

поэтому

$$y_1(x_1) - y_2(x_1) \geq (y_1(x_0) - y_2(x_0))\left(\frac{x_1}{x_0}\right)^{\frac{\mu-\delta}{\lambda}}.$$

Предложение доказано; тем самым доказана единственность входящей сепаратрисы для нелинейного седла. □

## 11.3 В разделе Жорданов узел доказательство предложения 8.3.39 должно читаться так:

**Доказательство** Мы докажем это предложение, не используя приведенного выше описания фазового портрета седлоузла. Построим на цилиндре области, из которых фазовые кривые раздутой системы не могут выйти (*поглощающие области*). Это, во-первых, кольцо $U(r_0) : r \in [0, r_0],\ r_0 > 0$ мало. Во-вторых, в окрестности точки 0 и $\pi$ рассмотрим кривые $\Gamma_0$ и $\Gamma_\pi$;

$$\Gamma_0 = \{r \in [0, r_0],\ r = \varphi^2\}$$

$$\Gamma_\pi = \{r \in [0, r_0],\ r = (\pi - \varphi)^2\}$$

Пусть $\Gamma_0^+(\Gamma_0^-)$ - правая (левая) ветвь параболы $\Gamma_0$ :

$$\Gamma_0^+ = \{(\varphi, r) \in \Gamma_0,\ \varphi > 0\},$$

$$\Gamma_0^- = \{(\varphi, r) \in \Gamma_0,\ \varphi < 0\}.$$

Аналогично определяются $\Gamma_\pi^\pm$. Докажем, что область $\Omega^-$ кольца $r \in [0, r_0]$ между кривыми $\Gamma_0^+$ и $\Gamma_\pi^-$ (заштриховано на рис. 20) является поглощающей. Через кривую $r = r_0$ фазовые кривые поля (8.27) входят в $\Omega$; кривая $r = 0$ инвариантна. Докажем,

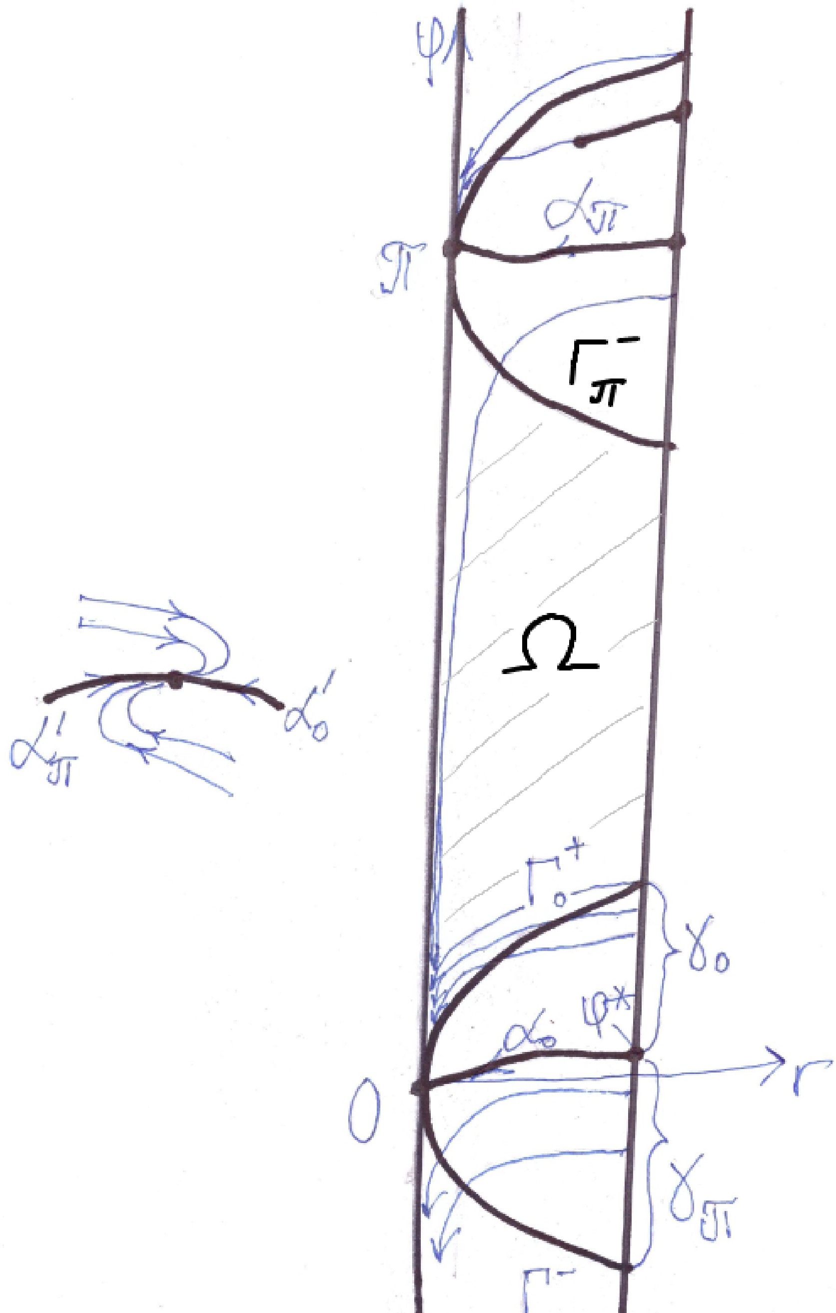


Рис. 20: Поглощающая область раздутой системы для жорданова узла

что фазовые кривые входят в $\Omega$ через $\Gamma_0^+$ и $\Gamma_\pi^-$. Для этого докажем, что поле (8.27) направлено "под" кривую $\Gamma_0$; аналогичный результат будет одновременно доказан для кривой $\Gamma_\pi$. На кривой $\Gamma_0$ поле (8.27) имеет вид

$$\dot{r}, \dot{\varphi}|_{\Gamma_0} = (\lambda\varphi^2 + O(\varphi^3), -\varphi^2 + O(\varphi^3)) \tag{4}$$

при $\varphi \to 0$.

Касательное векторное поле к $\Gamma_0$ имеет вид $(2\varphi, 1)$. Имеем

$$\begin{vmatrix} \lambda\varphi^2 + O(\varphi^3) & -\varphi^2 + O(\varphi^3) \\ 2\varphi & 1 \end{vmatrix} = \lambda\varphi^2 + O(\varphi^3) < 0$$

при малых $\varphi$. Мы считаем $r_0$ столь малым, что это соотношение выполняется на всей кривой $\Gamma_0$. Итак, вращение от вектора поля к касательному вектору кривой $\Gamma_0$ происходит по часовой стрелке. Значит, поле (8.27) на $\Gamma_0$ направлено внутрь $\Omega$. Значит, область $\Omega$ поглощающая.

Все фазовые кривые с началом в $\Omega$ приближаются к кривой $r = 0$ и близки к фазовым кривым уравнения $\dot{\varphi} = -\sin^2\varphi$. Значит, они все входят в точку 0.

Рассмотрим дугу $\gamma$ на окружности $r = r_0$ между ветвями параболы $\Gamma_0 : \gamma = \{(\varphi, r_0) || \varphi| \leq \sqrt{r_0}\}$. Фазовая кривая, выходящая из верхнего конца $\gamma$ входит в 0, из нижнего - в $\pi$. Пусть $\gamma_0 \subset \gamma$ и $\gamma_\pi \subset \gamma$ - два подмножества, выходя из которых траекторнии входят в 0 и $\pi$ соответственно. Множество $\gamma_\pi$ открыто (это множество точек, выходя из которых фазовые кривые пересекают открытую дугу $\Gamma_0^- \setminus \{0\}$). Множество $\gamma_0$ выпукло: если $(\varphi_0, r_0) \in \gamma_0$, то $(\varphi, r_0) \in \gamma_0$ для всех $\varphi \in [\varphi_0, -\sqrt{r_0}]$. Возьмем самую нижнюю точку $(\varphi^*, r_0) \in \gamma_0$. Выходящая из нее фазовая кривая $\alpha_0$ - сепаратриса в следующем смысле: по одну сторону от нее фазовые кривые входят в ноль, по другую - в $\pi$. Аналогично строится сепаратриса $\alpha_\pi$, входящая в $\pi$. Проекции этих сепаратрис на плоскость $(x, y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ отделяют фазовые кривые, входящие в 0 по направлению $\varphi = 0$ от кривых, входящих в 0 по направлению $\varphi = \pi$. Теорема 4 доказана.

$\square$