Гамильтонов формализм

Рассмотрим примеры перехода к Гамильтонову описанию лагранжевых систем.

Краткое напоминание.

Пусть $L(q,\dot{q},t)$ – лагранжиан механической системы, $\{q_i\}_{1\le i\le N}$ – набор её обобщённых координат.

По определению, $p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ – обобщённые импульсы (функции q и $\dot{q}$).

Матрица вторых производных по скоростям $\left\| \dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right\|$ называется Гессианом системы. Если эта матрица невырождена $\det \left\| \dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right\| \ne 0$, то из N равенств, определяющих p_i, можно выразить скорости $\dot{q}_i$:

$$\dot{q}_i = f(p,q)\,, \quad \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right|_{\dot{q}=f} \equiv p_i\,.$$

Переход к Гамильтонову описанию динамики даётся преобразованием Лежандра:

$$H(q,p,t):=\left(\sum_{i=1}^{N} p_i \dot q_i - L(q,\dot q,t)\right)\Big|_{\dot q_i = f_i(q,p)}$$

$H(q,p,t)$ – функция Гамильтона или Гамильтониан системы.

Гамильтониан определяет динамические уравнения системы:

$$\dot q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \dot p_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad 1 \le i \le n.$$

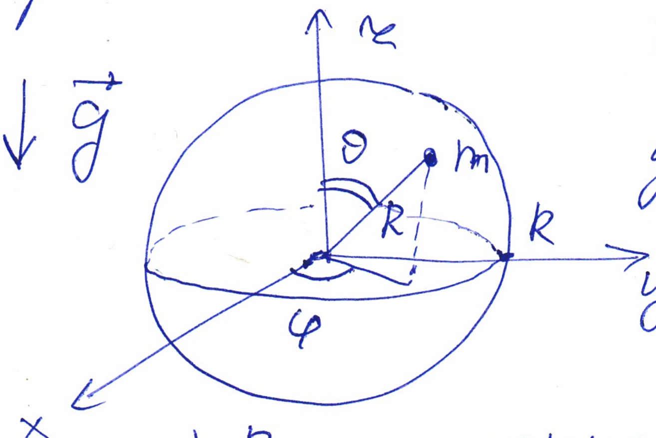
<u>Замечание</u>. Если Гессиан $\left\| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot q_i \partial \dot q_j} \right\|$ не вырожден, то Гамильтонов и Лагранжев формализмы полностью эквивалентны. В частности, можно совершить обратное преобразование Лежандра и перейти от Гамильтонова описания к Лагранжеву:

$$\dot q = \frac{\partial H}{\partial p_i} \Rightarrow p_i = \varphi_i(q,\dot q) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(q,\dot q) = \left(\sum_{i=1}^{N} p_i \dot q_i - H(q,p,t)\right)\Big|_{p_i = \varphi_i(q,\dot q)}.$$

Пример 1.

Частица массы m движется по поверхности сферы радиуса R в поле тяжести $\vec{g}=(0,0,-g)$, направленном против оси Oz:



Пользуясь сферическими углами θ и φ как обобщёнными координатами, найдите:

а) Выражение для Лагранжиана системы.

б) Выражение для обобщённых импульсов.

в) Гамильтониан системы и гамильтоновы уравнения движения.

Решение.

а) $$L = \frac{m}{2}R^2\left(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right) - mgR\cos\theta.$$

б) Обобщённые импульсы:

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mR^2\dot{\theta} \Rightarrow \boxed{\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mR^2}}$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mR^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi} \Rightarrow \boxed{\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mR^2\sin^2\theta}} \quad (*).$$

в) Гамильтониан:

$$H(\theta,\varphi,p_\theta,p_\varphi)=\left(\dot\theta p_\theta+\dot\varphi p_\varphi-L\right)\Big|_{\substack{\dot\theta=p_\theta/mR^2\\ \dot\varphi=p_\varphi/mR^2\sin^2\theta}}=$$

$$=\frac{p_\theta^2}{2mR^2}+\frac{p_\varphi^2}{2mR^2\sin^2\theta}+mgR\cos\theta$$

Уравнения движения:

$$\dot\theta=\frac{\partial H}{\partial p_\theta}=\frac{p_\theta}{mR^2};\quad \dot\varphi=\frac{\partial H}{\partial p_\varphi}=\frac{p_\varphi}{mR^2\sin^2\theta}$$

Эти ↑ уравнения просто совпадают с преобразованием (*).

$$\dot p_\theta=-\frac{\partial H}{\partial\theta}=mgR\sin\theta+\frac{p_\varphi^2\cos\theta}{mR^2\sin^3\theta}$$

$$\dot p_\varphi=-\frac{\partial H}{\partial\varphi}=0\Rightarrow\boxed{p_\varphi=\mathrm{Const}}$$

Этот ↑ обобщённый импульс совпадает с z-компонентой углового момента $\vec{J}=[\vec r\times\vec p]$ в сферических координатах

$$J_z=xp_y-yp_x=mR^2\sin^2\theta\,\dot\varphi=p_\varphi.$$

Пример 2.

Лагранжиан частицы, движущейся вдоль прямой $O\vec{x}$, имеет вид:

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{k}{2}\left(x^2 - \frac{x^4}{2}\right), \quad k > 0.$$

а) Найдите Гамильтониан этой системы и выпишите гамильтоновы уравнения движения.

б) Напишите компоненты Гамильтонова векторного поля $\vec{X}_H$ и найдите его особые точки (т.е. точки, в которых $\vec{X}_H = 0$).

в) Нарисуйте фазовый портрет системы в плоскости (x, p) в окрестности особых точек поля $\vec{X}_H$.

Решение.

Обобщенная координата: $x \in \mathbb{R}$, отвечающий ей импульс:

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \Rightarrow \dot{x} = \frac{p}{m}$$

$$\boxed{H = \frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2}\left(\frac{x^2}{2} - 1\right)}$$

$$\boxed{\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = kx(x^2-1)} \quad (**)$$

б) Система уравнений первого порядка $\binom{*}{*}$ может быть записана в терминах двумерного векторного поля $\vec{X}_H \in TR^2_{(x,p)}$:

$$\dot{x} = \vec{X}_H \triangleright x = \left(X_1 \frac{\partial}{\partial x} + X_2 \frac{\partial}{\partial p}\right)x = \frac{p}{m}$$

$$\dot{p} = \vec{X}_H \triangleright p = \left(X_1 \partial_x + X_2 \partial_p\right)p = kx(x^2-1)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{X}_H = \frac{p}{m}\frac{\partial}{\partial x} + kx(x^2-1)\frac{\partial}{\partial p}}$$

Особые точки: $\vec{X}_H = 0 \Leftrightarrow X_1 = X_2 = 0 \Rightarrow$ в (x,p) координатах :

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= (0,0) \\ A_2 &= (1,0) \\ A_3 &= (-1,0) \end{aligned}\right\}$$

Три особые точки. Они отвечают трём стационарным решениям Гамильтоновых уравнений:

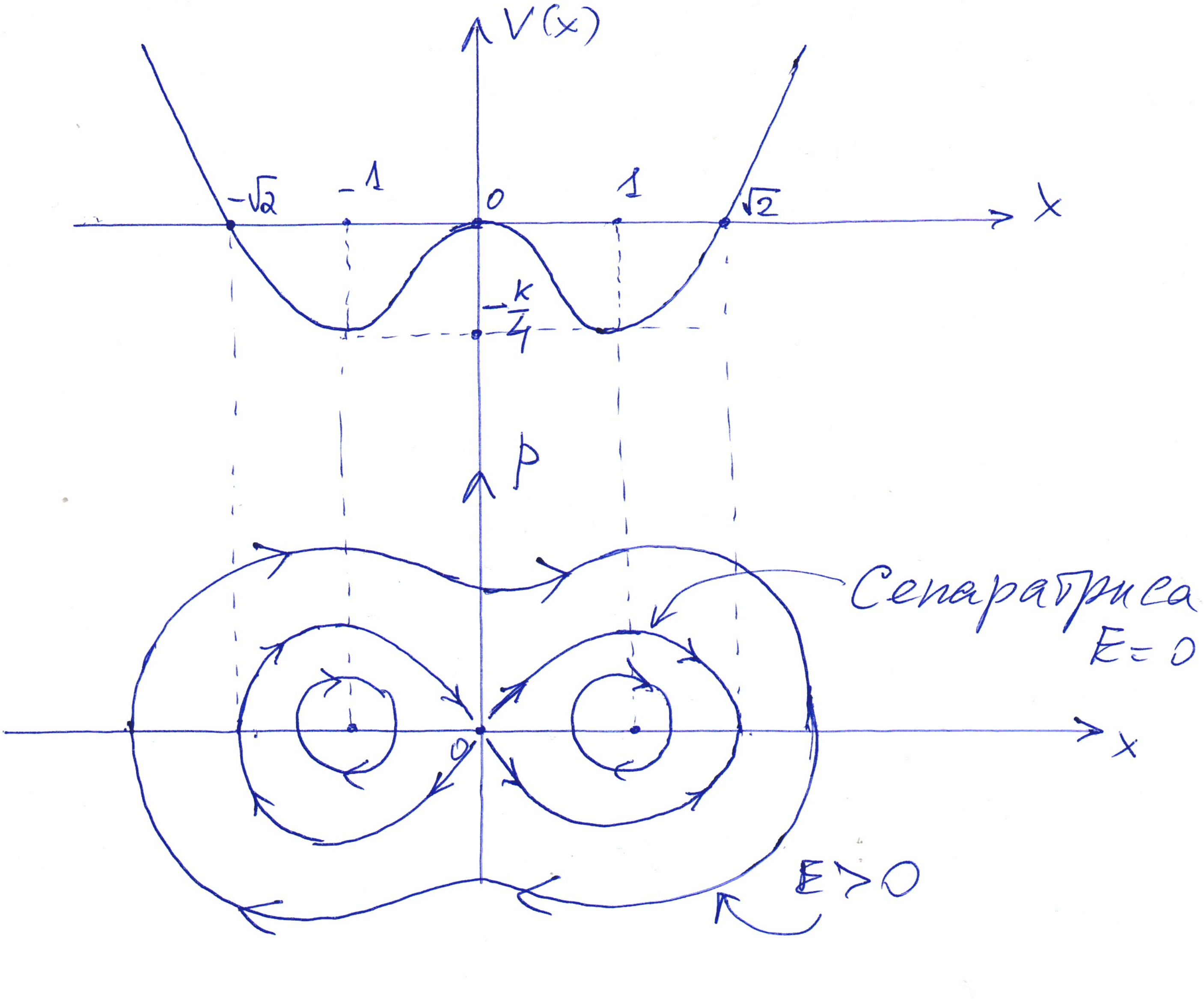
$$\underbrace{\begin{cases} x_1(t) = 0 \\ p_1(t) = 0 \end{cases}}_{A_1} \qquad \underbrace{\begin{cases} x_2(t) = 1 \\ p_2(t) = 0 \end{cases}}_{A_2} \qquad \underbrace{\begin{cases} x_3(t) = -1 \\ p_3(t) = 0 \end{cases}}_{A_3}$$

в) Поскольку $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$, то на решениях уравнений движения $H = E = \mathrm{Const}$ (полная энергия системы)

$\Rightarrow$ фазовые кривые в плоскости (x, p):

$$\frac{p^2}{2m} + \underbrace{\frac{kx^2}{2}\left(\frac{x^2}{2} - 1\right)}_{V(x)\text{ — потенциальная энергия.}} = E.$$

Фазовый портрет:



Пример 3

Рассмотрим обратный переход к Лагранжеву формализму на модели с вырождением Гессиана.

Гамильтониан системы с тремя степенями свободы задан выражением:

$$\boxed{H_m(\vec{r},\vec{p}) = \frac{c}{n(\vec{r})}\sqrt{\vec{p}^{\,2}+m^2c^2}} \quad (*)$$

Здесь $n(\vec{r})$ – гладкая функция декартовых координат пространства $\mathbb{R}^3$; $\vec{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, константа c – скорость света, а $c\sqrt{\vec{p}^{\,2}+m^2c^2}$ энергия релятивистской частицы с массой покоя m.

В пределе $m \to 0$:

$$H_m \xrightarrow[m\to 0]{} \frac{c|\vec{p}|}{n(\vec{r})} = H_0(\vec{r},\vec{p})$$

Гамильтониан H_0 применяется для построения хода световых лучей в среде с показателем преломления $n(\vec{r})$ ~~(в~~ неоднородной среде показатель зависит от $\vec{r}$).

По определению $n = \dfrac{c}{v_{среда}} \geqslant 1$

($v_{среда}$ — скорость луча света в среде, всегда меньше, чем c — скорость в вакууме). Поэтому будем дополнительно считать, что $n(\vec{r}) \geqslant 1$ для $\forall \vec{r}$.

Найдём Лагранжиан $L(\vec{r}, \dot{\vec{r}})$, отвечающий Гамильтониану $(\cancel{A})$:

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H_m}{\partial p_i} = \frac{c}{n} \frac{p_i}{\sqrt{\vec{p}^2 + m^2c^2}}$$

<u>Замечание</u>. Матрица вторых производных:

$$\left\| \frac{\partial^2 H_m}{\partial p_i \, \partial p_j} \right\| = \frac{c}{n(p^2+m^2c^2)^{3/2}} \| W_{ij} \|,$$

где $W_{ij} = (p^2+m^2c^2)\delta_{ij} - p_i p_j$

$\boxed{\nabla}$ $\det \| W_{ij} \| \neq 0 \Longleftrightarrow m^2 \neq 0.$

<u>Доказательство:</u>

Можно "в лоб" посчитать детерминант 3×3 матрицы, но это довольно громоздко. Мы попробуем найти нулевой собствен-ный вектор: (если $\det W = 0$) $\Longleftrightarrow$ $\exists \vec{a} \neq 0$.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\sum_{j=1}^{3} W_{ij} a_j = 0$$

$$\Downarrow$$

$$a_i (p^2 + m^2 c^2) - p_i (\vec{a}\vec{p}) = 0 \quad \boxed{\star}.$$

Умножим на p_i и возьмём $\sum_{i=1}^{3}$:

$$(\vec{a}\vec{p})(p^2 + m^2c^2) - p^2(\vec{a}\vec{p}) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$m^2 c^2 (\vec{a}\vec{p}) = 0$$

Если $\underline{m^2 \neq 0}$ $\Rightarrow$ $\underline{\vec{a} \perp \vec{p}}$ (напоминаем, что мы ищем $\vec{a} \neq \vec{0}$).

Умножим теперь $\boxed{\star}$ на a_i и $\sum_{i=1}^{3}$ с учётом $\vec{a}\vec{p} = 0$:

$$(\vec{a}^2)(p^2 + m^2c^2) = 0 \Rightarrow \vec{a}^2 = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ есть только $\vec{a} = \vec{0}$ при $m \neq 0$.

При $m=0$: $W_{ij} = p^2\delta_{ij} - p_i p_j$

и $\vec{p}$ – нулевой собственный вектор такой матрицы:

$$\sum_{j=1}^{3} W_{ij} p_j = 0. \Rightarrow \det\|p^2\delta_{ij} - p_i p_j\| = 0$$

Итак, для $m \neq 0$ мы можем выразить компоненты импульса p_i через скорости $\dot{x}_i$, т.е. обратить выражение на стр. =9=. Для этого берём скалярный квадрат скорости $\sum_{i=1}^{3} \dot{x}_i^2 = \vec{v}^2$ (обозначим так для компактности):

$$\vec{v}^2 = \frac{c^2}{n^2} \frac{\vec{p}^2}{\vec{p}^2 + m^2c^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{p}^2 = \frac{m^2 n^2 \vec{v}^2}{1 - n^2\frac{\vec{v}^2}{c^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_i = \frac{n}{c}\dot{x}_i\sqrt{\vec{p}^2 + m^2c^2} = \frac{n \cdot m\dot{x}_i}{\sqrt{1 - n^2\frac{\vec{v}^2}{c^2}}}$$

Теперь получаем лагранжиан:

$$L_m(\vec{r},\dot{\vec{r}})=\left[\sum_{i=1}^{3} p_i \dot{x}_i - H_m(\vec{r},\vec{p})\right]_{p_i=f_i(\vec{x},\dot{\vec{x}})}=$$

$$=-\frac{mc^2}{n(\vec{r})}\sqrt{1-n^2(\vec{r})\frac{\vec{v}^2}{c^2}}$$

<u>Замечание</u>. При $n(\vec{r})\equiv 1$ получим обычный лагранжиан свободной частицы в вакууме (<u>релятивистской</u> частицы).

Мы видим, что в пределе $m\to 0$

$L_m \longrightarrow L_0 \equiv 0$. Лагранжев формализм плохо работает для фотонов ($m=0$).

Гамильтониан $H_0=\lim\limits_{m\to 0} H_m$ тем не менее <u>хорошо</u> описывает геометрическую оптику.

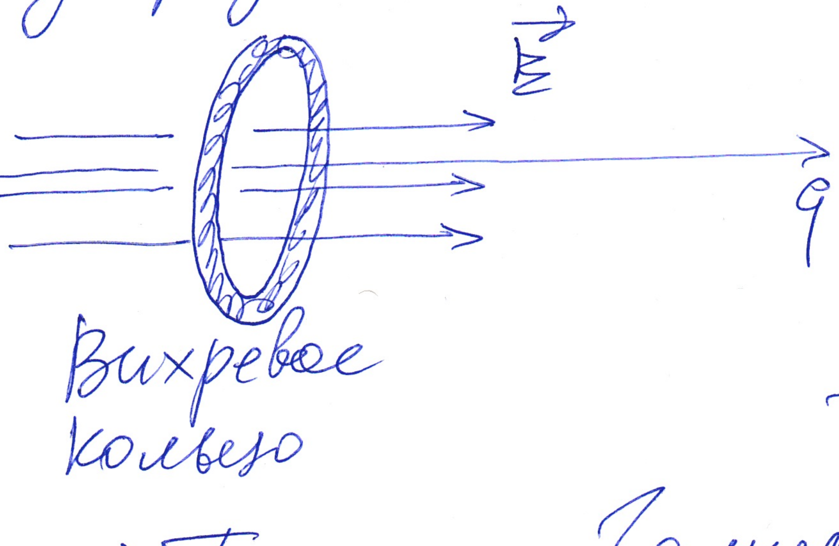
В пределе $m\to 0$ мы получаем для скорости $\dot{x}_i$:

$$\dot{x}_i=\frac{c}{n(\vec{r})}\frac{p_i}{|\vec{p}|} \Rightarrow \frac{x_i}{|\vec{x}|}=\frac{p_i}{|\vec{p}|}.$$

Величина импульса $|\vec{p}|$ не может быть найдена из выражения для $\dot{X}_i$. Мы только можем заключить, что скорость $\dot{\vec{x}} \parallel \vec{p}$. Это следствие вырожденности Гамильтоновой системы при $m \to 0$.

Пример 4 (бонусная задача).

Модельный Лагранжиан, приближённо описывающий движение заряженных вихрей в жидком Гелии в однородном электрическом поле:



Вихревое кольцо

$$L = -\frac{A^2}{4\dot{q}} + Fq,$$

$A>0$ и $F>0$ — константы.

а) Построить Гамильтониан системы

б) Написать и решить Гамильтоновы уравнения движения.

в) Сравнить с Лагранжевыми ур-ми и решениями.

Решение:

а) Обобщённый импульс:

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot q} = \frac{A^2}{4\dot q^2} \Rightarrow \dot q = \frac{A}{2\sqrt{p}}$$ — выбран знак "+" — рассматриваем движение с $\dot q > 0$.

$$H(q,p) = (p\dot q - L)\Big|_{\dot q = \frac{A}{2\sqrt{p}}} = A\sqrt{p} - qF,$$

$\underline{p > 0}$.

б). Уравнения движения:

$$\dot q = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{A}{2\sqrt{p}}; \quad \dot p = -\frac{\partial H}{\partial q} = F \Rightarrow \boxed{p = p_0 + Ft}$$

$$\Downarrow$$

$$\dot q = \frac{A}{2\sqrt{p_0 + Ft}} \Rightarrow \boxed{q(t) = \frac{A}{F}\left(\sqrt{p_0 + Ft} - \sqrt{p_0}\right) + q_0}$$

С течением времени импульс вихря линейно растёт, а его скорость $\dot q = \frac{A}{2\sqrt{p}}$ — уменьшается. Это означает, что со временем растёт

<u>масса</u> вихревого кольца:
оно втягивает в себя вещество из окружающей среды.

б). Лагранжевы уравнения движения:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right) = \frac{\partial L}{\partial q} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{A^2}{4\dot q^2}\right) = F \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{A^2}{4\dot q^2} = Ft + C$$

$\uparrow$ $\forall$ константа

$$\dot q = \pm \frac{A}{2\sqrt{Ft+C}}$$

— с точностью до обозначения $C = p_0$ такое же уравнение, что и в Гамильтоновом формализме. В данном примере эти подходы эквивалентны.