Семинар 10

Пусть $(x_0 : x_1 : x_2)$ - однородные координаты в $\mathbb{P}^2$, $F(x_0, x_1, x_2)$ - форма степени d, $X = V(F)$ - кривая в $\mathbb{P}^2$. Напомним, что полярная коника $Q_a(X) = P_a^{d-2}(X)$ точки $a \in \mathbb{P}^2$ относительно кривой X имеет уравнение:

$$Q_a(X) = \{\sum_{i,j=0}^{2} x_i x_j \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(a) = 0\}.$$

Дадим еще одно определение. Кривая $He(X)$ в $\mathbb{P}^2$ с уравнением

$$He(X) = \{x \in \mathbb{P}^2 \mid \det \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right) = 0\}.$$

называется *гессианом* (или *кривой Гессе*) кривой X. Нетрудно видеть, что гессиан $He(X)$ имеет степень $3(d-2)$. (В частности, гессиан кубической кривой является также кубической кривой.)

Задача 1. Докажите, что

$$\{\text{множество точек перегиба кривой X}\} \ \subset \ X \cap He(X),$$

то есть каждая точка перегиба на X лежит в пересечении кривой X с ее гессианом $He(X)$.
Указание. Воспользоваться тем, что, как было установлено на семинаре, касательная прямая к X в точке перегиба a является компонентой полярной коники $Q_a(X)$.

Задача 2. Докажите, что

$$\mathrm{Sing} X \ \subset \ X \cap He(X),$$

то есть каждая особая точка кривой X лежит в пересечении кривой X с ее гессианом $He(X)$.

Задача 3. Докажите, что на X нет других точек пересечения с ее гессианом $He(X)$, кроме точек, описанных в задачах 1 и 2, то есть каждая точка пересечения кривой X с ее гессианом либо является точкой перегиба кривой X, либо является особой точкой на X:

$$\{\text{множество точек перегиба кривой X}\} \ \cup \ \mathrm{Sing} X \ = \ X \cap He(X).$$