Группа кос, квантовые группы и приложения

Листок 5. Структура алгебры Хопфа

Рекомендуемый срок сдачи: **27 апреля 2023**

Вся информация, необходимая для решения приведенных ниже задач, содержится в конспекте лекции "Структура алгебры Хопфа", который размещен на Интернет-странице курса.

1. Докажите корректность определения структур алгебры Хопфа для групповой алгебры $\mathbb{K}[G]$ конечной группы G и алгебры $\mathrm{Fun}_{\mathbb{K}}(G)$ линейных функций на этой групповой алгебре. Докажите также, что эти алгебры Хопфа дуальны друг другу относительно билинейной формы

$$\langle f, v\rangle = f(v), \quad f \in \mathrm{Fun}_{\mathbb{K}}(G),\ v \in \mathbb{K}[G].$$

Указание. Все необходимые определения даны в конспекте лекций в формулировках Утверждений 3.2, 3.3 и 3.4.

А именно, проверьте явным вычислением следующее:

а) Отображения Δ_G, ε_G и Δ_F, ε_F являются гомоморфизмами, а отображения S_G и S_F — антигомоморфизмами.

б) Для всех операций в алгебрах Хопфа $\mathbb{K}[G]$ и $\mathrm{Fun}_{\mathbb{K}}(G)$ выполнены аксиомы определения алгебры Хопфа.

в) Операции в алгебре Хопфа $\mathbb{K}[G]$ связаны с операциями в алгебре Хопфа $\mathrm{Fun}_{\mathbb{K}}(G)$ посредством билинейной формы в соответствии с Определением 2.3 (см. конспект лекции, стр. 16.)

2. На примере структур алгебры Хопфа в универсальной обертывающей алгебры Ли найдите связь следующих композиций отображений

$$(S \otimes S) \circ \Delta \quad \text{и} \quad \Delta \circ S,$$

а также вычислите значение композиции отображений $\varepsilon \circ S$ на произвольном элементе универсальной обертывающей. Здесь Δ, ε и S являются, соответственно, отображениями коумножения, коединицы и антипода.

Проверьте выполнение найденных формул для двух других примеров алгебр Хопфа: для групповой алгебры $\mathbb{K}[G]$ конечной группы G и для алгебры $\mathrm{Fun}_{\mathbb{K}}(G)$ линейных функций на групповой алгебре группы G.

3. Пусть $\hat{T} : G \to \mathrm{End}(V)$ представление конечной группы G в конечномерном линейном $\mathbb{K}$-пространстве V. Пользуясь структурой алгебры Хопфа на группововй алгебре $\mathbb{K}[G]$, постройте представление G в линейном пространстве $\mathrm{End}(V) \simeq V \otimes V^*$.

4. Матрицы q-антисимметризаторов $A^{(k)}_{12\ldots k}$ и q-симметризаторов $S^{(k)}_{12\ldots k}$ (образы в R-матричном представлении примитивных идемпотентов алгебры Гекке, отвечающих соответственно одностолбцовым и однострочным диаграммам Юнга) задаются следующими рекуррентными формулами:

$$A^{(1)} = I, \qquad A^{(k+1)}_{12\ldots k+1} = \frac{1}{(k+1)_q}\, A^{(k)}_{12\ldots k}\Big(q^k - k_q R_k\Big)A^{(k)}_{12\ldots k}, \quad k \geq 1,$$

$$S^{(1)} = I, \qquad S^{(k+1)}_{12\ldots k+1} = \frac{1}{(k+1)_q}\, S^{(k)}_{12\ldots k}\Big(q^{-k} + k_q R_k\Big)S^{(k)}_{12\ldots k}, \quad k \geq 1.$$

Напомним, что $R_i = R_{i\,i+1}$, где R является R-матрицей $GL(N)$ типа. Найдите явные выражения (в терминах q-антисимметризаторов и q-симметризаторов) для частичных R-следов $\mathrm{Tr}_{R(r+1\ldots k)}A^{(k)}$ и $\mathrm{Tr}_{R(r+1\ldots k)}S^{(k)}$, где $0 \leq r \leq k-1$.