

Семинар 3

1. Проверить, что дифференцирование векторных полей вдоль параметризованных кривых в E^3 обладает следующими свойствами:

а) $(X + Y)' = X' + Y'$;

б) $(fX)' = fX' + f'X$;

в) $(X, Y)' = (X', Y) + (X, Y')$, где поля X, Y и функция f определены вдоль параметризованной кривой.

Параметризованная кривая $\gamma: I \rightarrow S$ на поверхности $S \subset E^3$ называется геодезической, если вектор ее ускорения перпендикулярен поверхности.

2. Показать, что геодезическая параметризована с постоянной скоростью.

3. Показать, что регулярная перепараметризация геодезической тогда и только тогда есть снова геодезическая, когда она линейна.

4. Убедиться, что прямолинейные образующие однополостного гиперболоида являются геодезическими.

5. Рассмотрим в E^3 цилиндр $X^2 + Y^2 = 1$. Доказать, что геодезическими на цилиндре являются кривые вида $(\cos(at + b), \sin(at + b), ct + d)$ с некоторыми a, b, c, d , и только они.

Рассмотрим кривую $\gamma(t) = (r(t), z(t)): I \rightarrow \mathbb{R}^2, r(t) > 0, t \in I$, и поверхность, полученную вращением этой кривой в \mathbb{R}^3 вокруг оси Z .

6. Проверить, что естественная параметризация поверхности вращения выглядит так: $(r(t)\cos(\theta), r(t)\sin(\theta), z(t))$. Записать риманову метрику на поверхности в координатах (θ, t) . Доказать, что меридианы перпендикулярны параллелям в точках их пересечений.

7. Доказать, что меридианы $\theta = \text{const}$ являются геодезическими.

8. Выяснить, для каких t соответствующая параллель будет геодезической.