Семинар 2

1. Проверьте, что метрика $g = \frac{|dz|^2}{(\mathrm{Im} z)^2}$ инвариантна относительно дробно-линейных преобразований комплексной плоскости, сохраняющих верхнюю полуплоскость $\mathrm{Im} z > 0$.

Конформная модель плоскости Лобачевского в единичном диске D.

Зададим в единичном диске $|w| < 1$, $w = u + iv$ метрику $g = \frac{4(du^2+dv^2)}{(1-u^2-v^2)^2} = \frac{4|dw|^2}{(1-|w|^2)^2}$.

2. Докажите, что отрезками в этой модели являются лежащие в диске дуги окружностей, перпендикулярных границе диска (Совет: рассмотреть дробно-линейное отображение $w = \frac{z-i}{z+i}$, переводящее верхнюю полуплоскость $\mathrm{Im} z > 0$ в диск D, и воспользоваться описанием отрезков в модели верхней полуплоскости).

3. Вычислить в этой модели расстояние от центра диска до точки $(0, 5)i$.

4. Пользуясь моделью Пуанкаре в диске, найти на плоскости Лобачевского длину окружности радиуса R.

5. Докажите,что если $\gamma(t)$ – это параметризованная кривая в E^2 с постоянной скоростью $|\dot{\gamma}(t)|$, то $\ddot{\gamma}(t) \perp \dot{\gamma}(t)$.

6. Составить уравнение кругового цилиндра минимального радиуса с направляющей, параллельной вектору $(1, 2, -4)$, целиком содержащего эллипсоид $(X-2)^2 + Y^2 + 3Z^2 = 1$.

7. Составить уравнение поверхности, образованной касательными к линии $Y^2 = X$, $X^2 = Z$.

8. Доказать, что если гладкая поверхность и плоскость имеют только одну общую точку, то плоскость является касательной плоскостью к поверхности в этой точке.

9. Найти периметр и внутренние углы криволинейного треугольника, расположенного на поверхности с метрикой $g = (du)^2 + (u^2+1)(dv)^2$ и ограниченного линиями $u = v, u = -v, v = 1$.