НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ
ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ
Факультет математики

Специальный курс

СЛУЧАЙНЫЕ МАТРИЦЫ, СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ И ИНТЕГРИРУЕМЫЕ МОДЕЛИ

Лекции:
Поволоцкий Александр Маркович

Москва
2023

Оглавление

Введение

В данном курсе обсуждается круг вопросов, связанный с образованием предельных форм и наличием случайных отклонений, описываемых универсальными вероятностными законами. Ситуации, в которых сложные многокомпонентные системы при огрубленном рассмотрении ведут себя простым универсальным образом, не зависящим от деталей исходной системы, хорошо знакомы как математикам, так и физикам. В теории вероятности они описываются утверждениями, известными как Закон Больших Чисел (ЗБЧ) и Центральная Предельная Теорема (ЦПТ). Однако стандартные примеры таких утверждений, содержащиеся в учебниках, относятся к суммам большого числа независимых случайных величин, и хотя класс подобных задач достаточно широк, требование независимости ограничивает область приложений получаемых результатов. Естественно, возникает вопрос, можно ли сформулировать столь же содержательные и универсальные утверждения о каких-либо случайных системах с большим числом степеней свободы, выходящие за рамки невзаимодействующего мира.

В последние годы было найдено множество замечательных связей между, на первый взгляд, совершенно различными задачами математики, а также математической и теоретической физики. С математической стороны это комбинаторные и вероятностные задачи о системах с большим числом степеней свободы. Среди них задача описания собственных значений матриц со случайными элементами, задачи о статистике случайных диаграмм Юнга, задачи о замощении различных областей плоскости доминошками или ромбиками, задачи о перечислении непересекающихся путей на решётках. С физической стороны это задачи статистической физики о распространении границ разделов между различными средами, потоках взаимодействующих частиц, полимерах в неупорядоченных средах и т.д.

Курс посвящён возникновению универсального поведения в различных моделях многокомпонентных случайных систем. С формальной точки зрения мы рассмотрим широкий класс многомерных случайных величин и случайных процессов со взаимодействием, заданным простыми локальными правилами. Оказывается, что в правильно выбранных, естественных единицах измерения такие системы обнаруживают удивительно схожее поведение. А именно, если число степеней свободы в рассматриваемых системах велико, то возникающие при соответствующем перемасштабировании наборы случайных величин демонстрируют «свойство концентрации» к некоторым неслучайным детерминистическим предельным формам. Случайные отклонения от этих предельных форм, «флуктуации», измеренные в характерном «флуктуационном» масштабе, описываются небольшим набором универсальных вероятностных распределений, функциональный вид которых зависит только от глобальных симметрий системы, и не зависит от «микроподробностей» исходной задачи.

Вывод точного, явного вида универсальных распределений — это задача, которую можно решить аналитически лишь для систем, обладающих специальной математической структурой, которая обеспечивает наличие большого количества симметрий и которая оказывается тесно связанной с понятием интегрируемости. Эта структура стоит за множеством красивых точных математических результатов, которые в скейлинговом пределе приводят утверждениям, аналогичным ЗБЧ и ЦПТ.

Благодарности

Автор благодарит Хайдара Нурлигареева за составление конспектов лекций и подбор упражнений, которые легли в основу этого текста.

Глава 1

Необходимые сведения из теории вероятностей

В этом разделе мы напоминаем основные понятия теории вероятности, которые будут служить языком нашего изложения, а также приведем доказательства нескольких утверждений, которые понадобятся нам в дальнейшем.

1.1 Вероятностное пространство, случайные величины и их характеристики

Любой математический текст, посвященный обсуждению вероятностных задач, начинается с постулирования вероятностного пространства. Вероятностное пространство есть тройка $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, включающая

- пространство элементарных исходов Ω,
- сигма-алгебру его подмножеств $\mathcal{F} \subset 2^{\Omega}$
- и вероятностную меру $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$, ставящую в соответствие каждому множеству из $\mathcal{F}$ число от нуля до единицы.

На практике обычно изучается не само вероятностное пространство, а случайные величины, т.е. измеримые функции на нем

$$\xi : \Omega \to \mathfrak{X},$$

принимающие значения в некотором пространстве $\mathfrak{X}$, наделенном топологией и, соответственно, сигма-алгеброй борелевских множеств. В общем случае мы обычно будем понимать под $\mathfrak{X}$ польское (т.е. полное сепарабельное метрическое) пространство, в простейшем варианте сводящееся к $\mathbb{R}$ или подобным.

Рассмотрим простейший случай $\mathfrak{X} = \mathbb{R}$. Для случайной величины $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ можно определить матожидание

$$\mathbb{E}\xi := \int_{\Omega} \xi(\omega) d\mathbb{P} \tag{1.1}$$

Полезное понятие, обобщающее матожидание, – условное матожидание. Пусть $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ – σ-подалгебра $\mathcal{F}$. Условным матожиданием случайной величины ξ относительно $\mathcal{F}'$

называется случайная величина $\mathbb{E}(\xi|\mathcal{F}')$, измеримая относительно $\mathcal{F}'$, такая что для любой функции $\eta : \Omega \to \mathbb{R}$, также измеримой относительно $\mathcal{F}'$, имеем

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}(\xi|\mathcal{F}')\eta] = \mathbb{E}\xi\eta. \tag{1.2}$$

Как можно охарактеризовать случайную величину ξ на $\mathbb{R}$, так чтобы, не вникая в детали отображения $\xi(\omega)$, задать меру множеств, отображаемых в те или иные подмножества $\mathbb{R}$? Для этого служит функция распределения вероятности

$$F_\xi(x) := \mathbb{P}\left(\{\omega : \xi(\omega) \le x\}\right), \tag{1.3}$$

а если мера на $\mathbb{R}$, индуцируемая отображением ξ, абсолютно непрерывна относительно меры Лебега, то и плотность вероятности

$$f_\xi(x) = F'_\xi(x). \tag{1.4}$$

Аналогично можно рассматривать несколько случайных величин на одном и том же вероятностном пространстве. Они характеризуются совместными функциями распределения

$$F_{\xi_1,\dots,\xi_n}(x_1,\dots,x_n) = \mathbb{P}\left(\{\omega : \xi_1(\omega) \le x_1, \dots, \xi_n(\omega) \le, x_n\}\right) \tag{1.5}$$

При этом мы говорим, что случайные величины независимы, если их совместная функция распределения распадается в произведение индивидуальных функций распределения,

$$F_{\xi_1,\dots,\xi_n}(x_1,\dots,x_n) = \prod_{k=1}^{n} F_{\xi_k}(x_k), \tag{1.6}$$

что немедленно влечет подобную факторизацию матожиданий произведений, как самих случайных величин, так и их функций.

Альтернативное описание распределения случайной величины ξ дает характеристическая функция

$$\varphi_\xi(x) = \mathbb{E}(e^{ix\xi}), \tag{1.7}$$

которая, будучи преобразованием Фурье меры, определяет распределение единственным образом.

Близко связанное с характеристической функцией понятие производящей функции моментов

$$M_\xi(x) = \mathbb{E}(e^{x\xi}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu_n x^n}{n!}. \tag{1.8}$$

определено, когда все моменты

$$\mu_n = \mathbb{E}(\xi^n) \tag{1.9}$$

распределения случайной величины ξ конечны. Ее можно понимать либо как формальный ряд, либо как аналитическую в некоторой окрестности нуля функцию. В первом случае экспонента под знаком матожидания в (1.8) также понимается как формальный ряд. Во втором предполагается, что ряд в правой части (1.8) сходится в некоторой окрестности нуля, что накладывает дополнительные ограничения на скорость убывания вероятности на бесконечности. Получившуюся аналитическую функцию можно аналитически продолжить из области сходимости как минимум на всю мнимую ось. Результат естественно совпадает с характеристической функцией.

Поскольку знание характеристической функции эквивалентно знанию распределения, мы подходим к ответу на естественный вопрос о том, можно ли, зная все моменты (кумулянты) случайной величины, однозначно восстановить распределение. Эта задача известна как *проблема моментов.* Одно из её решений состоит как раз в том, чтобы производящая функция моментов $M_\xi(x)$ была аналитической в некоторой окрестности нуля, то есть чтобы моменты убывали достаточно быстро. Это требование эквивалентно *критерию Рисса*:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mu_n^{\frac{1}{n}}}{n} < \infty. \tag{1.10}$$

В частности, если носитель распределения конечен, то есть $\mathrm{Supp}(\xi) \in [-M, M]$ для некоторой константы M, то при всех $n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство $\mu_n \leqslant M^n$ и проблема моментов имеет единственное решение.

Замечание 1.1. *Наиболее полное и чуть менее ограничительное решение той же проблемы дается критерием Карлемана, который требует сходимости ряда обратных четных моментов.*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_{2n}} < \infty. \tag{1.11}$$

Моменты не всегда являются удобной характеристикой распределения. Зачастую удобнее пользоваться *кумулянтами*, являющимися полиномиальными комбинациями моментов . Кумулянты определяются как коэффициенты c_n ряда Тейлора логарифма производящей функции моментов, который будем называть *производящей функцией кумулянтов*:

$$C_\xi(x) = \ln M_\xi(x) = \ln \mathbb{E}(e^{x\xi}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n x^n}{n!}. \tag{1.12}$$

Кумулянты исторически называют также *полуинвариантами* или *семиинвариантами.*

Упражнение 1.2. *Пусть случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ являются независимыми, а числа $a_1, \ldots, a_n$ представляют собой некоторый набор констант. Докажите, что (при условии, что указанные величины существуют):*
а) $\varphi_{a_1\xi_1+\ldots+a_n\xi_n}(x) = \varphi_{\xi_1}(a_1x) \cdot \ldots \cdot \varphi_{\xi_n}(a_nx)$,
б) $M_{a_1\xi_1+\ldots+a_n\xi_n}(x) = M_{\xi_1}(a_1x) \cdot \ldots \cdot M_{\xi_n}(a_nx)$,
в) $C_{a_1\xi_1+\ldots+a_n\xi_n}(x) = C_{\xi_1}(a_1x) + \ldots + C_{\xi_n}(a_nx)$.

Таким образом, как видно из упражнения 1.2, важной особенностью кумлянтов является их аддитивность: кумулянты суммы независимых случайных величин — это сумма кумулянтов этих величин.

Кумулянты и моменты содержат одинаковую информацию и могут быть однозначно выражены друг через друга формальным переразложением в ряд логарифмированного (соответственно, экспоненциированного) ряда для производящей функции моментов (кумулянтов).

Упражнение 1.3. *Докажите, что между первыми тремя моментами и кумулянтами выполняются следующие соотношения*

$$\mu_1 = c_1, \qquad \mu_2 = c_2 + c_1^2, \qquad \mu_3 = c_3 + 3c_1c_2 + c_1^3 \tag{1.13}$$

$$c_1 = \mu_1, \qquad c_2 = \mu_2 - \mu_1^2, \qquad c_3 = \mu_3 - 3\mu_1\mu_2 + 2\mu_1^3 \tag{1.14}$$

В частности, $c_1 = \mathbb{E}(\xi)$ *и* $c_2 = \mathbb{D}(\xi)$.

Общая формула, выражающая моменты через кумулянты, имеет вид

$$\mu_n = \sum_{\pi\in\mathcal{P}(n)} \prod_{I\in\pi} c_{|I|}. \tag{1.15}$$

Здесь суммирование ведётся по множеству

$$\mathcal{P}(n) = \{\pi = \{I_1, \dots, I_k\} : [n] = \bigcup_{i=1}^{k} I_i; I_i \bigcap I_j = \emptyset, i \neq j; k \in [n]\}. \tag{1.16}$$

разбиений множества

$$[n] := \{1, \dots, n\}$$

на все возможные подмножества.

Приведенные формулы моментов и кумулянтов одной случайной величины – частный случай более общих формул для характеристик набора случайных величин. Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$ – набор из n случайных величин, не обязательно различных, $n \in \mathbb{N}$. Определим совместные моменты как полилинейные функционалы степени n

$$\mu_n(\xi_1, \dots, \xi_n) := \mathbb{E}(\xi_1 \cdots \xi_n). \tag{1.17}$$

Тогда можно определить и совместные кумулянты, как полилинейные функционалы, $c_k(x_1, \dots, x_k)$, связанные с моментами соотношением, частным случаем, которого является соотношение (1.15),

$$\mu_n(\xi_1, \dots, \xi_n) = \sum_{\pi\in\mathcal{P}(n)} \prod_{I\in\pi} c_{|I|}(\xi_I), \tag{1.18}$$

где $I = (i_1, \dots, i_{|I|})$ – блоки разбиения π и мы ввели обозначение $\xi_I = (\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_{|I|}})$. К этому соотношению можно также прийти, введя производящие функции совместных моментов и совместных кумулянтов для наборов случайных величин, и потребовав, чтобы, так же как и в случае одной случайной величины они были связаны между собой соотношением (1.12). В частности из этой связи следует следующий важный факт: кумулянты вычисленные на наборе случайных величин, среди которых имеются хотя бы две независимых, равны нулю.[1] Позже при обсуждении свободной вероятности мы познакомимся с некоммутативными аналогами этогот факта и соотношения (1.18).

Охарактеризуем на языке моментов, кумулянтов и их производящих функций некоторые важнейшие примеры распределений.

Пример 1.4. *Пусть случайная величина* $\xi = a$ *задаётся* дельта-мерой Дирака

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 1, & \text{если } a \in A \\ 0, & \text{если } a \notin A, \end{cases} \tag{1.19}$$

т.е. $\mathbb{P}(\xi = a) = 1$*, а её функция распределения представляет собой* функцию Хэвисайда*:*

$$F_\xi(x) = \theta(x - a) = \begin{cases} 1, & \text{если } x > a \\ 0, & \text{если } x \leqslant a. \end{cases} \tag{1.20}$$

---

[1] Эти факты также хорошо известны специалистам по квантовой теории поля и статистической физике, где совместные моменты и кумулянты известны под названием несвязные и связные корреляционные функции соответственно.

Тогда производящие функции моментов и кумулянтов имеют вид

$$M_\xi(x) = e^{xa}, \qquad C_\xi(x) = xa.$$

То есть единственный ненулевой кумулянт дельта-распределения — первый: $c_1 = a$.

Пример 1.5. *Второй и последний пример распределения, у которого почти все кумулянты равны нулю, а значит,* $C_\xi(x)$ *— многочлен, это распределение Гаусса. Для нормально распределённой случайной величины* $\xi \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$*, задаваемой плотностью*

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \tag{1.21}$$

имеем

$$M_\xi(x) = \exp\left(\mu x + \frac{\sigma^2 x^2}{2}\right), \qquad C_\xi(x) = \mu x + \frac{\sigma^2 x^2}{2}. \tag{1.22}$$

В частности, $c_1 = \mu$, $c_2 = \sigma^2$ *и* $c_k = 0$ *при* $k > 2$.

Пример 1.6. *Ещё одно важное дискретное распределение, распределение Пуассона* $\mathrm{Poi}(\lambda)$*, выделено тем, что все его кумулянты одинаковы:*

$$\mathbb{P}(\xi = k) \;=\; \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}, \tag{1.23}$$

$$M_\xi(x) = e^{e^{\lambda x}}, \qquad C_\xi(x) = e^{\lambda x} \tag{1.24}$$

и $c_k = \lambda$ *при всех* $k \in \mathbb{N}$.

Упражнение 1.7. *Убедитесь в справедливости формул* (1.22) *и* (1.24)*).*

Упражнение 1.8. *Докажите, что чётные моменты* полукругового распределения Вигнера *с плотностью* $f_{sc}(x) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{4-x^2}\cdot\mathbb{I}_{\{|x|\leqslant 2\}}$ *даются* числами Каталана*, а нечётные равны нулю:*

$$\mu_{2k} = C_k = \frac{C_{2k}^k}{k+1}, \qquad \mu_{2k+1} = 0. \tag{1.25}$$

.

1.2 Сходимость последовательностей случайных величин и предельные теоремы.

Определение 1.9. *Пусть* $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *— последовательность случайных величин определённых на одном вероятностном пространстве. Говорят, что эта последовательность сходится к случайной величине* ξ

- почти наверное *(или* почти всюду*), и пишут*

  $$\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.н.}} \xi,$$

  если

  $$\mathbb{P}\left(\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi\right) = \mathbb{P}\left(\omega\colon \xi_n(\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi(\omega)\right) = 1, \tag{1.26}$$

  т.е. имеет место поточечная сходимость везде, кроме, быть может, множества меры нуль;

- по вероятности, *и пишут*
$$\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \xi,$$
если для любого $\varepsilon > 0$*:*
$$\mathbb{P}\left(|\xi_n - \xi| > \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(\omega\colon |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| > \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0; \tag{1.27}$$
- по распределению или слабо, *и пишут*
$$\xi_n \xRightarrow[n\to\infty]{} \xi,$$
если для любой непрерывной ограниченной функции $g \in C_b$*:*
$$\mathbb{E}(g(\xi_n)) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}(g(\xi)), \tag{1.28}$$
или же, что эквивалентно сказанному выше, если последовательность функций распределения сходится к предельной функции распределения во всех её точках непрерывности:
$$\lim_{n\to\infty} F_{\xi_n}(t) \to F_\xi(t) \quad \forall\, t : F_\xi \in C(t); \tag{1.29}$$
- в L^p, *и пишут*
$$\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{L^p}} \xi,$$
если
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(|\xi_n - \xi|^p) = 0. \tag{1.30}$$

Упражнение 1.10. *Докажите эквивалентность определений сходимости по распределению, заданных формулами* (1.28) *and* (1.29).

Упражнение 1.11. *Докажите следующие свойства сходимостей:*
а) если $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.н.}} \xi$, *то* $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \xi$, *но обратное, вообще говоря, не верно;*
б) если $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{L^p}} \xi$ *и* $p \geqslant 2$, *то* $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \xi$, *но обратное, вообще говоря, не верно;*
в) если $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \xi$, *то* $\xi_n \xRightarrow[n\to\infty]{} \xi$, *но обратное, вообще говоря, не верно;*
г) если $\xi_n \xRightarrow[n\to\infty]{} \xi$ *и* ξ *вырожденная случайная величина, т.е.* $\mathbb{P}(\xi = a) = 1$, *то* $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \xi$.

Сходимость по распределению — это частный случай *слабой сходимости* мер; отчасти упражнение 1.11 объясняет последнее называние. Заметим, что здесь не обязательно требовать, чтобы члены последовательности и предельная случайная величина были определены на одном вероятностном пространстве. Отметим также, что хотя из сходимости по вероятности сходимость почти наверное не следует, *теорема Рисса* гарантирует нам, что из исходной последовательности можно извлечь подпоследовательность, которая будет сходиться к пределу почти наверное.

Опишем основные инструменты, используемые для доказательства сходимости.

Лемма 1.12. *[Неравенство Маркова] Пусть* ξ *— неотрицательная случайная величина с конечным математическим ожиданием:* $\xi \geqslant 0$ *и* $\mathbb{E}\xi \leqslant \infty$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *справедливо следующее неравенство:*
$$\mathbb{P}\big(\xi > \varepsilon\big) \leqslant \frac{\mathbb{E}\xi}{\varepsilon}. \tag{1.31}$$

В частности, если при некотором $k \in \mathbb{N}$ для случайной величины ξ выполнено неравенство $\mathbb{E}|\xi - \mathbb{E}\xi|^k < \infty$, то

$$\mathbb{P}\big(|\xi - \mathbb{E}\xi| > \varepsilon\big) \leqslant \frac{\mathbb{E}|\xi - \mathbb{E}\xi|^k}{\varepsilon^k} \tag{1.32}$$

При $k = 2$ неравенство (1.32) превращается в *неравенство Чебышева* и используется для доказательства сходимости по вероятности: последняя имеет место, когда $\mathbb{D}\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Наиболее сложный случай сходимости — сходимость почти наверное, поскольку для его обоснования требуется привлекать утверждения о событиях, включающих бесконечное число членов последовательности. Однако если типичная последовательность сходится достаточно быстро, для доказательства также можно воспользоваться неравенством Маркова в комбинации с леммой Бореля-Контелли.

Лемма 1.13. *[Лемма Бореля-Кантелли] Пусть $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность случайных событий. Обозначим*

$$A = \limsup_{n\to\infty} A_n \equiv \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m\right) = \big\{\,\omega\colon\ \forall n \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{N}, m > n\colon \omega \in A_m\,\big\},$$

т.е. A — это исходы, которые происходят бесконечно часто. Тогда:

I) если числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(A_n\right)$ сходится, то $\mathbb{P}(A) = 0$;

II) если все события A_n независимы в совокупности и числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(A_n\right)$ расходится, то $\mathbb{P}(A) = 1$.

Теперь для обоснования сходимости почти наверное можно действовать следующим образом. Рассмотрим событие $A_n = \{\omega : |\xi_n - \xi| > \varepsilon\}$. Если при некотором $k > 0$ ряд, составленный из $\mathbb{E}|\xi_n - \xi|^k$, сходится, то первая часть леммы Бореля-Контелли совместно с неравенством Маркова гарантируют сходимость почти наверное.

Вернемся к сходимости по распределению. Незаменимый инструмент для доказательства такой сходимости дает теорема Леви о непрерывности.

Теорема 1.14. *[Теорема Леви о непрерывности] Пусть $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность случайных величин. Тогда если $\xi_n \xRightarrow[n\to\infty]{} \xi$, то для любого $t \in \mathbb{R}$:*

$$\varphi_{\xi_n}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi_{\xi}(t).$$

Обратно, если $\varphi(t) \in C(0)$ — функция действительного аргумента, непрерывная в нуле, и для каждого $t \in \mathbb{R}$ имеет место сходимость $\varphi_{\xi_n}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi(t)$, то $\varphi(t)$ является характеристической функцией случайной величины ξ, для которой $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{D} \xi$.

Часто вместо анализа сходимости характеристической функции удобнее исследовать сходимость моментов (кумулянтов) распределения.

Определение 1.15. *Пусть для всех $k, n \in \mathbb{N}$ моменты*

$$\mu_n^{(k)} = \mathbb{E}(\xi_k^n) \quad \text{и} \quad \mu_n = \mathbb{E}(\xi^n)$$

случайных величин ξ_k и ξ соответственно конечны для любого порядка n. Будем говорить, что ξ_n сходится к ξ в смысле моментов, *если для каждого $n \in \mathbb{N}$:*

$$\lim_{k\to\infty} \mu_n^{(k)} = \mu_n. \tag{1.33}$$

Вообще говоря, сходимости в смысле моментов и по распределению не эквивалентны и ни одна из них не влечет другую.

Упражнение 1.16. *На примере меры*

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\delta_0+\frac{1}{n}\delta_n$$

убедитесь в том, что из сходимости по распределению (и даже по вероятности), сходимость в смысле моментов не следует.

Тем не менее, в некоторых случаях можно утверждать, что из сходимости в смысле моментов следует сходимость по распределению. Так же, как в проблеме моментов, для этого достаточно, чтобы моменты росли не слишком быстро. В частности, если и ξ, и все ξ_n имеют компактный носитель, то сходимость следует из *теоремы Вейерштрасса о полиномиальной аппроксимации.*

Теорема 1.17. *[Теорема Вейерштрасса о полиномиальной аппроксимации] Пусть f — функция, определённая на отрезке $[a,b]$ и непрерывная на этом отрезке. Тогда для любого $\varepsilon>0$ существует такой многочлен $P\in\mathbb{R}[x]$, что для всех $x\in[a,b]$ выполняется $|f(x)-p(x)|<\varepsilon$.*

В свою очередь, сходимость математических ожиданий многочленов от случайной величины немедленно следует из сходимости моментов.

От требования ограниченности носителя можно избавиться, наложив определённые условия на предельную случайную величину. А именно, достаточно, чтобы моменты предельной случайной величины гарантировали единственность решения проблемы моментов, например, удовлетворяя критерию Карлемана. Мы докажем более слабое утверждение, которое пригодится нам в дальнейшем, потребовав компактности носителя, но лишь для предельной величины.

Лемма 1.18. *Пусть последовательность ξ_n сходится в смысле моментов к случайной величине ξ с ограниченным носителем, т.е. $\operatorname{Supp}(\xi)\subset[-a,a]$ для некоторого $a>0$. Тогда имеет место сходимость по распределению:*

$$\xi_n \xRightarrow[n\to\infty]{} \xi.$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную ограниченную непрерывную функцию $g(x)$, такую, что $|g(x)|<b$ для некоторого $b>0$. Докажем, что

$$\left|\int_{\mathbb{R}} g\,dF_\xi-\int_{\mathbb{R}} g\,dF_{\xi_n}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Для этого разобьём область интегрирования на отрезок $A=[-2a,2a]$ и его дополнение. По теореме Вейерштрасса о полиномиальной аппроксимации (теорема 1.17) для любого $\varepsilon>0$ можно найти многочлен $P(x)$, для которого верно

$$\big|g(x)-P(x)\big|<\frac{\varepsilon}{8}\qquad\forall\,x\in A.$$

Кроме того, имеет место неравенство

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}} g\,dF_\xi - \int_{\mathbb{R}} g\,dF_{\xi_n}\right| \;&\leqslant\; \int_A |g-P|\,dF_\xi + \int_A |g-P|\,dF_{\xi_n} \\ &\quad + \left|\int_{\mathbb{R}} P\,dF_\xi - \int_{\mathbb{R}} P\,dF_{\xi_n}\right| + \int_{\mathbb{R}\setminus A} (|g|+|P|)\,dF_{\xi_n},\end{aligned}$$

где в правой части уже опущены два интеграла по dF_ξ по области $\mathbb{R}\setminus A$, поскольку там dF_ξ равен нулю тождественно. Ясно, что первые два слагаемых правой части в сумме меньше $\varepsilon/4$ в силу выбора многочлена P и вероятностности меры. Выбрав достаточно большое n, можно добиться, чтобы третье слагаемое также не превышало $\varepsilon/4$; здесь мы пользуемся сходимостью моментов и тем, что P — многочлен. Наконец, четвертое слагаемое оценивается с помощью неравенства Маркова (лемма 1.12). В самом деле, пусть $2q$ — чётное число, большее или равное степени многочлена P и $p \in \mathbb{N}$ — некоторое натуральное число. Тогда найдётся такая константа c, что $|P(x)| \leqslant c(1+|x|^{2q})$, откуда

$$\int_{\mathbb{R}\setminus A} (|g|+|P|)\,dF_{\xi_n} \leqslant \int_{\mathbb{R}\setminus A} \big(b + c(1+|x|^{2q})\big)\,dF_{\xi_n} \leqslant \left(\frac{b+c}{(2a)^{2(q+p)}} + \frac{c}{(2a)^{2p}}\right)\int_{\mathbb{R}} x^{2(q+p)}\,dF_{\xi_n}.$$

Интеграл в правой части сходится к $\mu_{2(q+p)} \leqslant a^{2(p+q)}$. Поэтому, увеличивая p, можно добиться того, чтобы для достаточно больших n правая часть не превышала $\varepsilon/4$. □

Наконец, приведём формулировки обещанных выше ЗБЧ и ЦПТ, и докажем их, воспользовавшись теоремой Леви о непрерывности.

Теорема 1.19. *[ЗБЧ] Пусть (ξ_n) — последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин, обладающих конечным математическим ожиданием $\mathbb{E}(\xi_n) = \mu$. Тогда*

$$\overline{\xi}_n = \frac{S_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \mu. \tag{1.34}$$

Теорема 1.20. *[ЦПТ] Если же, помимо конечных математических ожиданий, (ξ_n) имеют ещё и конечную дисперсию $\mathbb{D}(\xi_n) = \sigma^2$, то*

$$\zeta_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{D} \eta, \tag{1.35}$$

где случайная величина η имеет стандартное нормальное распределение $\mathcal{N}(0,1)$.

Доказательство. Прежде всего, заметим, что если все моменты ξ_n существуют, то из независимости и аддитивности кумулянтов мы немедленно устанавливаем, что все кумулянты случайных величин $\overline{\xi}_n$ и ζ_n стремятся к нулю при $n \to \infty$, за исключением $\mathbb{E}(\overline{\xi}_n) \to \mu$ в первом случае, и $\mathbb{E}(\zeta_n^2) \to 1$ во втором. Однако нет надобности ограничивать класс распределений; общий случай следует из предельных переходов для характеристической функции и теоремы Леви (теорема 1.14). Действительно, существование математического ожидания гарантирует существование первой прозводной $\varphi_{\xi_1}(x)$ в $x = 0$, откуда вытекает, что

$$\varphi_{\xi_1}(x) = 1 + \mathrm{i}\mu x + o(x), \qquad x \to 0.$$

В силу линейности (упражнение 1.2) это означает, что

$$\varphi_{\overline{\xi}_n}(x) = \left(\varphi_{\xi_1}\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n = \left(1 + \mathrm{i}\,\frac{\mu x}{n} + o\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{\mathrm{i}\mu x}.$$

Следовательно, $\overline{\xi}_n \xrightarrow[n\to\infty]{D} \mu$, а значит, в силу упражнения 1.11 мы имеем $\overline{\xi}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \mu$.

Аналогично, поскольку характеристическая функция случайной величины

$$\eta_k = \frac{\xi_k - \mu}{\sigma}$$

имеет вид

$$\varphi_{\eta_1}(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2), \qquad x \to 0,$$

для $\zeta_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\eta_k}{\sqrt{n}}$ мы имеем

$$\varphi_{\zeta_n}(x) = \left(\varphi_{\eta_1}\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right)^n = \left(1 - \frac{x^2}{2n} + o\left(\frac{x^2}{n}\right)\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

Следовательно, согласно теореме Леви, $\zeta_n \xrightarrow[n\to\infty]{D} \eta$, к чему мы и стремились. □

Замечание 1.21. *Существует также усиленный закон больших чисел, гарантирующий сходимость почти наверное при условии совокупной независимости всех членов последовательности и конечности матожидания.*

На практике ЗБЧ и ЦПТ означают, что при больших n величина S_n детерминистически растёт линейно по n. Случайные отклонения от детерминистического линейного роста, которые могут быть обнаружены с конечной вероятностью, имеют порядок величины $O(\sqrt{n})$ и описываются нормальным распределением, независимо от деталей исходных случайных величин:

$$S_n \sim \mu n + \sigma\sqrt{n} \cdot \mathcal{N}(0, 1). \tag{1.36}$$

1.3 Мартингалы и концентрация меры

ЗБЧ это пример концентрации меры, вокруг неслучайной величины. Этот результат, будучи в большой степени универсальным, тем не менее, ограничен суммами последовательностей независимых случайных величин. Еще одним классом процессов, в которых наблюдается подобное явление, не основанных на независимости случайных величин, являются мартингалы.

Определение 1.22. *Мартингалом (в дискретном времени) относительно последовательности сигма алгебр $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_3 \ldots$ называют последовательность случайных величин $(\chi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ такую, что для всех $n \in \mathbb{N}$ величина χ_n измерима относительно $\mathcal{F}_n$, $\mathbb{E}|\chi_n| < \infty$ и*

$$\mathbb{E}(\chi_n|\mathcal{F}_{n-1}) = \chi_{n-1} \tag{1.37}$$

Видно, что мартингал это процесс, который в среднем никуда не смещается. Поэтому не удивительно, что приятной особенностью мартингалов являются различные утверждения о их сходимости. Один из инструментов, который позволяет их делать — мартингальные неравенства. Докажем одно такое неравенство, котрое будет нам полезно для доказательства свойства концентрации меры.

Лемма 1.23 (Неравенство Азумы). *Пусть* $(\chi_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ *- мартингал с ограниченными приращениями, т.е. для некоторых* $a_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots$

$$|\chi_{n+1} - \chi_n| \leq a_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}. \tag{1.38}$$

тогда справедлива следующая оценка

$$\mathbb{P}(|\chi_0 - \chi_n| > t) \leq 2e^{-\dfrac{t^2}{2\sum_{k=1}^n a_k^2}} \tag{1.39}$$

Доказательство. Запишем экспоненциальное неравенство Маркова для величины $(\chi_0 - \chi_n)$

$$\mathbb{P}(\chi_n - \chi_0 > t) = \mathbb{P}(e^{\lambda(\chi_n - \chi_0)} > e^{\lambda t}) \leq \frac{\mathbb{E}e^{\lambda(\chi_n - \chi_0)}}{e^{\lambda t}}, \tag{1.40}$$

где предпоалагается, что $\lambda > 0$. Оценим знаменатель в правой части. Для этого введем линейную функцию

$$h_a(x) = \operatorname{ch} a\lambda + \frac{x}{a}\operatorname{sh} a\lambda, \qquad a > 0 \tag{1.41}$$

и заметим, что в силу выпуклости экспоненты неравенство

$$e^{\lambda x} \leq h_a(x) \tag{1.42}$$

выполняется при $-a \leq x \leq a$. Тогда

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}e^{\lambda(\chi_n - \chi_0)} &= \mathbb{E}\big(\mathbb{E}(e^{\lambda(\chi_n - \chi_{n-1})}|\mathcal{F}_{n-1})e^{\lambda(\chi_{n-1} - \chi_0)}\big) && (1.43)\\
&\leq \mathbb{E}\big(\mathbb{E}(h_{a_n}(\chi_n - \chi_{n-1})|\mathcal{F}_{n-1})e^{\lambda(\chi_{n-1} - \chi_0)}\big) = h_{a_n}(0)\mathbb{E}e^{\lambda(\chi_{n-1} - \chi_0)} && (1.44)\\
&= \operatorname{ch}(\lambda a_n)\mathbb{E}e^{\lambda(\chi_{n-1} - \chi_0)} \leq e^{\frac{\lambda^2 a_n^2}{2}}\mathbb{E}e^{\lambda(\chi_{n-1} - \chi_0)} \leq e^{\frac{\lambda^2 \sum_{k=1}^n a_k^2}{2}} && (1.45)
\end{aligned}$$

где в первом переходе мы воспользовались измеримостью разности $(\chi_{n-1} - \chi_0)$ относительно $\mathcal{F}_n$, во втором неравенством (1.42), в третьем тем, что χ_n – мартингал, и наконец тем, что гиперболический косинус мажорируется экспонентой от квадратичной функции. Тогда из (1.40) имеем

$$\mathbb{P}(\chi_n - \chi_0 > t) \leq e^{\frac{\lambda^2}{2}\sum_{k=1}^n a_k^2 - \lambda t} \leq e^{-\frac{t^2}{2\sum_{k=1}^n a_k^2}}, \tag{1.46}$$

где во втором неравенстве мы минимизировали экспоненту по λ. Для $\mathbb{P}(\chi_n - \chi_0 < -t)$ верна такая же оценка, и наконец

$$\mathbb{P}(|\chi_n - \chi_0| > t) \leq \mathbb{P}(\chi_n - \chi_0 < -t) + \mathbb{P}(\chi_n - \chi_0 > t) \leq 2e^{-\frac{t^2}{2\sum_{k=1}^n a_k^2}}. \tag{1.47}$$

□

Важный пример мартингала — мартингал Дуба.

Определение 1.24. *[мартингал Дуба] Пусть* $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_3 \ldots$ *- последовательность сигма-алгебр, а* χ *— произвольная случайная величина, такая что* $\mathbb{E}|\chi| < \infty$*. Тогда последовательность случайных величин*

$$\chi_n := \mathbb{E}(\chi|\mathcal{F}_n), \quad n \in \mathbb{N} \tag{1.48}$$

образует мартингал по отношению $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Действительно, имеет место цепочка равенств

$$\mathbb{E}(\chi_n|\mathcal{F}_{n-1}) = \mathbb{E}\big(\mathbb{E}(\chi|\mathcal{F}_n)|\mathcal{F}_{n-1}\big) = \mathbb{E}\big(\chi|\mathcal{F}_{n-1}\big) = \chi_{n-1}$$

где во втором равенстве использовано телескопическое свойство условного матожидания по отношению к вложенным сигма-алгебрам и кроме того конечность матожидания модуля χ_n следует из аналогичного свойства величины χ,

$$\mathbb{E}|\chi_n| = \mathbb{E}|\mathbb{E}(\chi|\mathcal{F}_n)| \leq \mathbb{E}\mathbb{E}(|\chi||\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}|\chi| < \infty.$$

Применение неравенства Азумы к мартингалу Дуба позволяет доказывать свойство концентрации меры.

Пусть $\chi = (\chi_n)_{1\leq n\leq m}$ — набор независимых случайных величин, а $f(x_1, \ldots, x_m)$ — c-липшицева вещественнозначная функция m переменных, что означает, что изменение функции при варьировании одной переменной конечно, т.е.

$$|f(x_1, \ldots x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_m) - f(x_1, \ldots x_{k-1}, x'_k, x_{k+1}, \ldots, x_m)| \leq a_k. \tag{1.49}$$

для некоторого набора $a_k > 0, k = 1, \ldots, m$. Из этого следует, что $\mathbb{E}f(\chi_1, \ldots, \chi_m) < \infty$. Покажем также, что выполнено неравенство

$$\big|\mathbb{E}(f(\chi_1, \ldots, \chi_m)|\chi_k, \ldots, \chi_m) - \mathbb{E}(f(\chi_1, \ldots, \chi_m)|\chi_{k+1}, \ldots, \chi_m)\big| \leq a_k. \tag{1.50}$$

Для этого введем обозначение $\chi^{(i,j)} = \{\chi_i, \ldots, \chi_j\}$, где $1 \leq i < j \leq m$ для подмножеств χ состоящих из элементов с номерами от i до j. Тогда

$$\big|\mathbb{E}(f(\chi)|\chi^{(k,m)}) - \mathbb{E}(f(\chi)|\chi^{(k+1,m)})\big| = \big|\mathbb{E}[\mathbb{E}[f(\chi)|\chi\backslash\chi_k] - f(\chi)|\chi^{(k+1,m)}]\big|. \tag{1.51}$$

Заметим, что в виду независимости $\chi_1, \ldots, \chi_k$ имеет место равенство

$$\mathbb{E}[f(\chi)|\chi\backslash\chi_k] = \int_{\mathbb{R}} f(\chi^{(1,k-1)}, x, \chi^{(k+1,m)}) dF_{\chi_k}(x), \tag{1.52}$$

где $F_{\chi_k}(x_k)$ – функция распределения χ_k. Используя неравенство Гёльдера, мы приходим к оценке

$$|\mathbb{E}[f(\chi)|\chi\backslash\chi_k] - f(\chi)| = \left|\int_{\mathbb{R}} \big(f(\chi^{(1,k-1)}, x, \chi^{(k+1,m)}) - f(\chi)\big)\, dF_{\chi_k}(x)\right| \leq a_k, \tag{1.53}$$

которая вкупе с (1.51) даёт (1.50). Отсюда, применяя неравенство Азумы, получим неравенство Мак-Диармида

$$\mathbb{P}\big(|f(\chi_1, \ldots, \chi_m) - \mathbb{E}f(\chi_1, \ldots, \chi_m)| > t\big) \leq 2e^{-\frac{t^2}{2\sum_{k=1}^m a_k^2}}. \tag{1.54}$$

Приведем пример его применения.

Пример 1.25. *Пусть* $f_m(x_1, \ldots, x_m)$*,* $m \in \mathbb{N}$*, — последовательность функций, для каждой из которых неравенство (1.50) выполнено с* $a_1 = \cdots = a_m = a = O(1/\sqrt{m(\ln m)^{(1+\epsilon)}})$ *с* $\epsilon > 0$ *при* $m \to \infty$*.. Тогда из неравенства Мак-Диармида и леммы Бореля-Контелли следует следующее свойство концентрации меры*

$$f_m(\chi_1, \ldots, \chi_m) - \mathbb{E}f_m(\chi_1, \ldots, \chi_m) \xrightarrow[m\to\infty]{\text{п.н.}} 0. \tag{1.55}$$

1.4 Слабая сходимость случайных мер

До сих пор мы обсуждали сходимость последовательностей случайных величин, принимающих значения в $\mathbb{R}$. При этом выяснилось, что случайные величины, построенные как функции большого числа других случайных величин, зачастую демонстрируют универсальное типичное поведение, которое проявляется в их сходимостях к неслучайным или универсальным случайным пределам, определяемым утверждениями типа ЗБЧ и ЦПТ. В более общем случае при рассмотрении многокомпонентных случайных систем, таких как случайные матрицы, уместно ставить вопросы о более детальном описании их типичного поведения в пределе когда число компонент неограниченно растет. Для этого хорошо приспособлен язык случайных мер и сходимости их последовательностей.

Пусть $\mathfrak{X}$ – польское пространство, $\mathcal{B}(\mathfrak{X})$ — борелевская сигма-алгебра его подмножеств, а $\mathcal{P}(\mathfrak{X})$ — пространство вероятностных борелевских мер на $(\mathfrak{X}, \mathcal{B}(\mathfrak{X}))$. В секции 1 было дано понятие слабой сходимости мер, которое можно определять через сходимость интегралов от ограниченных непрерывных функций. Отметим, что слабая сходимость может быть метризуема, например, при помощью метрики Леви-Прохорова, в случае $\mathfrak{X} = \mathbb{R}$ имеющую вид

$$\ell(\mu,\nu) = \inf\big\{\varepsilon > 0\colon\ F_\mu(x-\varepsilon) - \varepsilon \leqslant F_\nu(x) \leqslant F_\mu(x+\varepsilon) + \varepsilon, \quad \forall x \in \mathbb{R}\big\}, \tag{1.56}$$

с которой слабая сходимость превращается в привычную сходимость в метрическом пространстве. С такой метрикой пространство $\mathcal{P}(\mathfrak{X}))$ само является польским пространством.

Слабая сходимость[2] позволяет задать топологию в $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, а следовательно и борелевскую сигма-алгебру $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$. Если $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ — некоторое вероятностное пространство, то случайная вероятностная мера — это случайный элемент на этом пространстве, который принимает значения в $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Иными словами, случайная вероятностная мера — это измеримое отображение $(\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathcal{P}(\mathbb{R}), \mathcal{F}_{\mathcal{P}})$, определённое правилом $\omega \mapsto \mu(\omega)$. К таким мерам применимы обычные понятия сходимости, принятые в теории вероятности, с которыми мы имели дело в разделе 1.

Определение 1.26. *Пусть $\mu, \mu_1, \mu_2 \ldots$ — случайные вероятностные меры. Будем говорить, что последовательность (μ_n)* слабо сходится *к μ* почти наверное (по вероятности, в среднем)*, и писать*

$$\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.н.}(\mathbb{P},\mathbb{E})} \mu, \tag{1.57}$$

тогда и только тогда, когда

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)\, d\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.н.}(\mathbb{P},\mathbb{E})} \int_{\mathbb{R}} g(x)\, d\mu, \quad \forall g(x) \in C_b(\mathbb{R}).$$

Пример 1.27. *Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — выборка из некоторого распределения $F_\lambda(x)$ (то есть случайные величины $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — независимы и одинаково распределены как некоторая случайная величина λ распределенная с мерой μ_λ). Рассмотрим* эмпирическую выборочную меру

$$L_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \delta_{\lambda_k}. \tag{1.58}$$

---

[2] С точки зрения функционального анализа слабая сходимость мер — это *-слабая сходимость линейного функционала в двойственном пространстве.

Тогда

$$L_n \xRightarrow[n\to\infty]{\text{п.н.}} \mu_\lambda \tag{1.59}$$

Действительно, поскольку $\mathbb{I}_{\lambda<x}$ *распределена как бернуллиевская случайная величина, то Усиленный Закон Больших Чисел даёт нам*

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{I}_{\{\lambda_k<x\}} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.н.}} F_\lambda(x). \tag{1.60}$$

Из поточечной почти наверное сходимости последовательности функций распределения следует слабая сходимость мер почти наверное. Предел (1.59) *можно интерпретировать как пример Закона Больших Чисел для эмпирической спектральной меры диагональной матрицы, элементы которой являются одинаково распределенными случайными величинами.*

Глава 2

Метод моментов и закон Вигнера

Обсуждая ЗБЧ и ЦПТ, мы имели дело с независимыми случайными величинами. В дальнейшем мы будем пытаться высказывать подобного рода утверждения, скорее, для наборов зависимых величин. Оказывается, существуют широкие классы систем, демонстрирующих на больших масштабах характерное поведение, которое не зависит от микроскопических подробностей, и первым таким классом, который мы рассмотрим, станут случайные матрицы.

Впервые случайные матрицы возникли в физике при изучении спектров ядер больших атомов. Несмотря на то, что задача диагонализации гамильтонианов больших взаимодействующих систем чрезвычайно сложна и не решается точно, оказалось, что статистически уровни энергии ведут себя как собственные значения некоторого класса случайных матриц. Позже выяснилось, что подобные утверждения справедливы и для других сложных систем, например, таких, как квантовые биллиарды, квантовые точки и др. С другой стороны, случайные матрицы представляют интерес и для математиков, например, потому что поведение, подобное собственным значениям случайных матриц, обнаруживается в структуре комплексных нулей ζ-функции Римана, которая, в свою очередь, тесно связана с распределением простых чисел.

Мы начнём с круга вопросов, касающихся изучения спектра случайных матриц. Как уже было упомянуто, изучение случайных матриц было мотивировано вопросом о типичном виде ядерных спектров, которые определяются наборами собственных чисел многомерных самосопряженных операторов. Основная идея состоит в том, что в достаточно общей ситуации типичный вид этого спектра не зависит от деталей отдельных матричных элементов, а определяется лишь симметриями оператора. Поэтому мы будем считать матричные элеметы случайными величинами, а цель будет заключаться в том, чтобы попытаться ответить на вопрос, как выглядит типичной спектр очень большой эрмитовой матрицы со случайными матричными элементами. Этот вопрос был впервые поставлен и решен математиком и физиком Юджном Вигнером в 1958 году сначала для матриц со случайными элементами, задаваемыми распределением Бернулли, а потом и для произвольных распределений.

Для простоты мы ограничимся случаем вещественных симметричных матриц, хотя те же утверждения относятся и к комплекснозначным эрмитовым матрицам, а также к вещественно-кватернионным эрмитовым матрицам.

Определение 2.1. *Матрицей Вигнера будем называть вещественную симметричную матрицу* $W = (w_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$*, элементы* $w_{ij} = w_{ji}$ *которой на главной диагонали и выше являются независимыми случайными величинами, одинаково распределёнными выше* *главной диагонали, а также одинаково (но, возможно, по-другому), распределёнными на главной диагонали:*

$$w_{ij} = w_{ji} \sim \xi, \quad 1 \leqslant i < j \leqslant n; \quad \mathbb{E}(\xi) = 0, \quad \mathbb{D}(\xi) = \sigma^2 < \infty; \tag{2.1}$$

$$w_{ii} \sim \eta, \quad 1 \leqslant i \leqslant n; \quad \mathbb{E}(\eta) = 0, \quad \mathbb{D}(\eta) < \infty. \tag{2.2}$$

Для упрощения технических деталей на протяжении всего этого раздела мы будем также предполагать, что все моменты распределений случайных величин ξ и η конечны.

Вопрос, на который мы хотим ответить в этом разделе, звучит следующим образом: «Как выглядит типичный спектр большой Вигнеровской матрицы?» Ответ оказывается удобно сформулировать в виде Закона Больших Чисел для эмпирической спектральной меры вигнеровской матрицы, отнормированной так, чтобы спектр находился в ограниченной области.

Определение 2.2. *Пусть $M = M^\dagger \in \mathbb{C}^{n\times n}$ — эрмитова матрица*[1]*, обладающая собственными значениями $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$. Всякой такой матрице можно сопоставить* эмпирическую спектральную меру *(ЭСМ)*

$$L_M = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \delta_{\lambda_k} \tag{2.3}$$

Поскольку матрицы Вигнера — случайные, их ЭСМ — также случайная мера. Однако если выбрать правильный масштаб, то мы увидим, что чем больше размер матрицы, тем менее вид спектра, а следовательно и ЭСМ, зависит от исходного распределения её матричных элементов, и тем ближе они становятся к единому универсальному закону. В пределе для ЭСМ вигнеровских матриц, перемасштабированных так, чтобы при увеличении размера спектр оставался в ограниченной области, справедлив аналог ЗБЧ, а именно, ЭСМ стремится к полукруговому закону Вигнера.

Теорема 2.3. *[Теорема Вигнера]*
Пусть $(w_{ij})_{1\leqslant i<j}$ и $(w_{ii})_{i\geqslant 1}$ — последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин, определенных на одном вероятностном пространстве, причём

$$\begin{aligned} \mathbb{E}w_{12} &= \mathbb{E}w_{11} = 0, & (2.4)\\ \mathbb{D}w_{12} &= \sigma^2, \quad \mathbb{D}w_{11} < \infty, & (2.5)\\ \mathbb{E}w_{12}^k &< \infty, \quad \mathbb{E}w_{ii}^k < \infty, \quad k \geqslant 2, & (2.6)\end{aligned}$$

а $W_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — матрица Вигнера с матричными элементами $w_{ij} = w_{ji}$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Введём перемасштабированную матрицу

$$M_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \cdot W_n. \tag{2.7}$$

Тогда последовательность ЭСМ матриц M_n слабо сходится к полукруговому закону Вигнера почти наверное, то есть

$$L_{M_n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.н.}} \mu_{sc}, \tag{2.8}$$

---

[1] Знак $\dagger$ означает транспонирование и комплексное сопряжение.

где мера μ_{sc} задаётся плотностью

$$f_{sc}(x) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{4 - x^2} \cdot \mathbb{I}_{\{|x| \leqslant 2\}}.$$

Доказательство. Для доказательства теоремы Вигнера мы будем использовать *метод моментов*. Суть его заключается в том, чтобы сначала доказать сходимость последовательности моментов ЭСМ к моментам полукругового закона, подобно тому, как мы это делали при доказательстве ЗБЧ в разделе 1. Если имеет место сходимость моментов почти наверное, то в силу ограниченности носителя полукругового распределения и леммы 1.18 мы будем иметь и слабую сходимость ЭСМ с вероятностью единица.

Для произвольной меры μ на $\mathbb{R}$ введём следующее обозначение

$$\langle \mu, f \rangle := \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \mu(dx). \tag{2.9}$$

В частности $\langle \mu, x^k \rangle$ — это k-ый момент случайной величины, заданной мерой μ. Определим усредненную меру $\bar{L}_{M_n}$, которая характеризуется тем свойством, что для любой измеримой функции $f(x)$ выполнено соотношение

$$\langle \bar{L}_{M_n}, f(x) \rangle = \mathbb{E}_W \langle L_{M_n}, f(x) \rangle, \tag{2.10}$$

где нижний индекс W подчеркивает, что матожидание берется по отношению к мере на матрицах Вигнера.

Стратегия доказательства следующая. Сначала доказывается сходимость моментов в среднем к моментам полукругового распределения. Следом — сходимость моментов почти наверное к своим средним значениям. Таким образом, доказательство сводится к следующим трем утверждениям

(a) $\langle \mu_{sc}, x^{2k} \rangle = C_k$, где $C_k = \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}$ — числа Каталана,

(b) $\langle \bar{L}_{M_n}, x^k \rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} \langle \mu_{sc}, x^k \rangle$,

(c) $\langle L_{M_n}, x^k \rangle \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.н.}} \langle \bar{L}_{M_n}, x^k \rangle$.

Отметим, что доказательство утверждения (a) было сформулировано в разделе 1 в виде упражнения 1.8.

Итак, покажем, что $\langle \bar{L}_{M_n}, x^k \rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} \langle \mu_{sc}, x^k \rangle$. Прежде всего, заметим, что моменты ЭСМ — это следы степеней матрицы:

$$\langle L_{M_n}, x^k \rangle = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k = \frac{1}{n} \cdot \operatorname{Tr} M_n^k = \frac{1}{n(\sigma\sqrt{n})^k} \cdot \operatorname{Tr} W_n^k. \tag{2.11}$$

То же самое справедливо и для моментов усредненной меры

$$\langle \bar{L}_{M_n}, x^k \rangle = \frac{1}{n^{1+k/2}\sigma^k} \cdot \mathbb{E}_W\big(\operatorname{Tr} W_n^k\big), \tag{2.12}$$

с той лишь разницей, что справа стоит матожидание следа, или, в силу линейности следа, след мотожидания степеней матрицы W_n.

Выразим следы через матричные элементы и попробуем вычислить матожидания от полученных комбинаций матричных элементов. Чтобы понять, как ведёт себя величина $\langle \bar{L}_{M_n}, x^k \rangle$ в пределе $n \to \infty$, сначала вычислим следы $\operatorname{Tr} W_n^k$ при малых значениях k.

При $k = 1$, очевидно, получаем $\mathbb{E}_W\big(\operatorname{Tr} W_n\big) = \mathbb{E}_W(w_{11}) = 0$ и

$$\langle \bar{L}_{M_n}, x \rangle = 0. \tag{2.13}$$

При $k = 2$ справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_W\big(\operatorname{Tr} W_n^2\big) &= \mathbb{E}_W\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} w_{ik}w_{ki}\right) = \qquad (2.14)\\ &= \sum_{i\neq k}\mathbb{E}_W(w_{ik}^2) + \sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}_W(w_{ii}^2) = n(n-1)\sigma^2 + n\,\mathbb{D}_W(w_{11}). \end{aligned}$$

Таким образом, при $n \to \infty$ мы получим

$$\langle \bar{L}_{M_n}, x^2 \rangle = \frac{1}{n}\,\mathbb{E}_W\big(\operatorname{Tr} M_n^2\big) = \frac{n(n-1)\sigma^2 + n\,\mathbb{D}_W(Y)}{n^2\sigma^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1. \tag{2.15}$$

При $k = 3$ из независимости случайных величин w_{ik} для различных пар (i,k) имеем

$$\langle \bar{L}_{M_n}, x^3 \rangle = \frac{1}{n^{5/2}} \cdot \sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}_W(w_{ii}^3) = \frac{n}{n^{5/2}} \cdot \mathbb{E}_W(w_{11}^3) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \tag{2.16}$$

Что получится в общем случае? Как видно из разобранных примеров, для вычисления пределов моментов произвольного порядка нужно просуммировать вклады величин

$$\mathcal{W}(\pi) = \mathbb{E}\big(w_{i_1 i_2} w_{i_2 i_3} \dots w_{i_k i_1}\big) \tag{2.17}$$

с соответствующими весами, где $\pi = (i_1, \dots, i_k)$ — набор из k натуральных чисел, принимающих произвольные значения из множества $\{1, \dots, n\}$. Для решения этой задачи удобно использовать язык теории графов. Пусть $G = (V, E)$ — полный граф на n вершинах с петлей в каждой вершине.[2] Будем считать, что вершины пронумерованы числами от единицы до n, то есть $V = \{1, \dots, n\}$. Тогда каждому выражению вида (2.17) можно сопоставить замкнутый путь

$$\pi = \big(i_1 \to i_2 \to i_3 \to \ldots \to i_k \to i_1\big) \tag{2.18}$$

с весом $\mathcal{W}(\pi)$ определённым формулой (2.17). Таким образом, выражение для моментов сводится к сумме

$$\langle \bar{L}_{M_n}, x^k \rangle = \frac{1}{n^{k/2+1}\sigma^k} \sum_{\pi(k)} \mathcal{W}(\pi(k)) \tag{2.19}$$

по путям $\pi(k)$ из k шагов на графе G.

Далее, заметим, что различные пути, которые переводятся друг в друга перенумерацией вершин, имеют один и тот же вес. Будем говорить, что пути π и π' принадлежат одному классу эквивалентности, $\pi \sim \pi'$, если $\pi' = \tau(\pi)$, где $\tau \in S_n$. Здесь мы имеем в виду,

---

[2] Полным графом называется граф, у которого каждая вершина соединена ребрами со всеми остальными. В нашем случае мы также добавляем в каждую вершину петлю — ребро, соединяющее вершину с самой собой.

что $\pi = (i_1 \to i_2 \to i_3 \to \ldots \to i_k \to i_1)$, $\pi' = (\tau(i_1) \to \tau(i_2) \to \tau(i_3) \to \ldots \tau(i_k) \to \tau(i_1))$, и, как следствие, $\mathcal{W}(\pi') = \mathcal{W}(\pi)$. Таким образом, суммирование по путям, сводится к суммированию по множеству классов эквивалентности $\mathcal{P} = \{\pi\}/\sim$:

$$\langle \bar{L}_{M_n}, x^k \rangle = \frac{1}{n^{k/2+1}\sigma^k} \sum_{\pi(k)\in\mathcal{P}} \|\pi(k)\| \cdot \mathcal{W}(\pi(k)), \tag{2.20}$$

где $\|\pi(k)\|$ — число путей в классе эквивалентности. Правда, пока остаётся вопрос, как пересчитать пути каждом таком классе. Оказывается, это легко сделать, если явно выделить классы эквивалентности путей, проходящих через фиксированное число вершин.

Обозначим через $\pi(k,m)$ путь из k шагов, проходящих в точности через m вершин, $\|\pi(k,m)\|$ — число элементов в его классе эквивалентности. Очевидно, что выполняется равенство $\|\pi(k,m)\| = n(n-1)\ldots(n-m+1) = A_n^m$. Поэтому имеет место соотношение

$$\langle \bar{L}_{M_n}, x^k \rangle = \frac{1}{n^{k/2+1}\sigma^k} \sum_{m=1}^{k} \sum_{\pi(k,m)\in\mathcal{P}} A_n^m \cdot \mathcal{W}(\pi(k,m)). \tag{2.21}$$

Замечательной особенностью выражения, стоящего под знаком суммы, является тот факт, что общее число вершин в графе G влияет лишь на известный коэффициент A_n^m, а всё остальное зависит только от k и m, то есть остается конечным в пределе $n \to \infty$.

Какие пути вносят вклад в эту сумму? Прежде всего, заметим, что в силу условия (2.4) ненулевой вклад дают только те пути, в которых каждое пройденное ребро встречается не менее двух раз. Следовательно, учитывать имеет смысл лишь те пути, в которых число использованных рёбер не превышает $[k/2]$. Пусть $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$ — подграф графа G, для которого $\|\tilde{E}\| \leqslant [k/2]$ и $\tilde{V} = m$, а через рёбра и вершины которого проходит путь $\pi(k,m)$. Сколько в таком графе может быть вершин, то есть каково число m? Чтобы ответить на этот вопрос, сформулируем следующее известное из теории графов утверждение.

Лемма 2.4. *Пусть $G = (V,E)$ конечный связный граф. Тогда $\|E\| \leqslant \|V\| + 1$, причём равенство имеет место тогда и только тогда, когда G — дерево.*

Следовательно, число рёбер удовлетворяет неравенству $m \leqslant [k/2] + 1$, откуда

$$\langle \bar{L}_{M_n}, x^k \rangle = \frac{1}{n^{k/2+1}\sigma^k} \sum_{m=1}^{[k/2]+1} \sum_{\pi(k,m)\in\mathcal{P}} A_n^m \cdot \mathcal{W}(\pi(k,m)). \tag{2.22}$$

При $n \to \infty$ величина A_n^m растет как $A_n^m \asymp n^m$. В случае нечётных k это означает, что моменты стремятся к нулю. Если же k — чётное число, то в пределе выживают только слагаемые, соотвествующие $m = k/2 + 1$. Как следует из леммы 2.4, подграф $\tilde{G}$ в этом случае является деревом, причём пути $\pi(k, k/2+1)$ проходят по каждому ребру ровно два раза. Вес таких путей не зависит от класса эквивалентности и равен

$$\mathcal{W}(\pi(k, k/2+1)) = \sigma^k. \tag{2.23}$$

Таким образом, предельное выражение для чётных моментов равно числу классов эквивалентности путей $\pi(k, k/2+1)$, то есть

$$\langle \bar{L}_{M_n}, x^k \rangle = \begin{cases} \|\{\pi(k, k/2+1) \in \mathcal{P}\}\|, & k \in 2\mathbb{N} \\ 0, & k \in 2\mathbb{N}+1 \end{cases} \tag{2.24}$$

Остается предъявить процедуру построения неэквивалентных путей из k шагов, обходящих деревья с $(k/2+1)$ вершинами так, что каждое ребро проходится два раза. Будем считать, что мы обходим вершины $\tilde{V}=(1,\dots,k/2+1)$, а итоговый результат представляет собой последовательность вершин $(v(0),\dots,v(k))$. Без ограничения общности можно положить $v(0)=1$ и $v(1)=2$, то есть первый шаг делается вдоль ребра $1\to 2$. В дальнейшем, поскольку пройденные ребра не должны образовывать циклов, на каждом шаге мы можем либо перейти в ещё не посещённую вершину, либо вернуться в вершину, в которой были на предыдущем шаге. То есть имеется две возможности:

(i) $v(i)\to v(i+1)=\max(v(0),\dots,v(i))+1$,

(ii) $v(i)\to v(i-1)$.

Путь заканчивается возвращением на шаге k в исходную вершину: $v(k)=v(0)=1$.

Далее, сопоставим последовательности $(v(0),\dots,v(k))$ последовательность из плюс-минус единиц $u=(u_1,\dots,u_k)$, заданную следующим правилом: для всех $j=1,\dots,k$ шагу $v(j)\to v(j+1)$ типа (i) — переход в новую вершину — ставим в соответствие $u_{j+1}=1$, а с шагом типа (ii) — возвращение — соотносим $u_{j+1}=-1$,. Ясно, что сумма членов такой последовательности на каждом шаге неотрицательна, то есть

$$\sum_{i=1}^{l}u_i\geqslant 0,\qquad 1\leqslant l\leqslant k,$$

а полная сумма равна нулю: $u_1+\ldots+u_k=0$. Поэтому при замене единиц на левые скобки, а минус единиц — на правые получается *правильная скобочная последовательность*, в которой каждой левой скобке соответствует правая, а любой начальный кусок содержит не меньше левых скобок, чем правых. Также, по последовательности u можно построить *путь Дика* — ломаную линию на плоскости, представляющую собой путь из точки $(0,0)$ в точку $(2k,0)$, составленный из векторов $(1,u_i)$, а потому не опускающийся ниже оси абсцисс Ox (рис. 2.1).

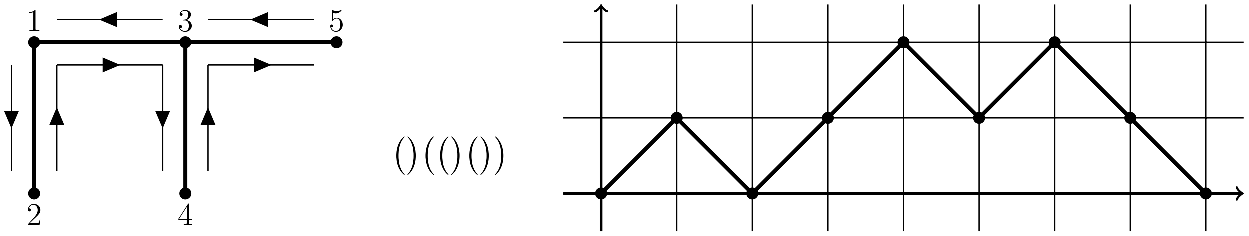

Рис. 2.1:

Итак, каждому обходу дерева можно сопоставить правильную скобочную последовательность или путь Дика. Очевидно и обратное: по каждому пути Дика можно построить представитель класса эквивалентности замкнутых путей из k шагов, проходящих ровно два раза по каждому ребру некоторого дерева $\tilde{G}$ с $\|\tilde{V}\|=k/2+1$ вершинами. Хорошо известно, что количество путей Дика, а следовательно, и выражение для моментов чётного порядка k даётся числом Каталана $C_{k/2}$. Таким образом, сходимость моментов в среднем, то есть утверждение (b), доказана.

Доказательство утверждения (c) мы оставляем читателю в виде упражнения. Обозначим лишь общий план действий. Чтобы убедиться, что имеет место сходимость почти наверное, достаточно исследовать поведение дисперсии $\mathbb{D}\langle L_{M_n}, x^k\rangle$. Доказательство снова проводится методом моментов, но на этот раз необходимо провести суммирование по парам путей из k шагов. Сначала имеет смысл удостовериться в том, что пары путей, не имеющих общих рёбер, не дают вклада в дисперсию. Этот факт помогает установить, что дисперсия стремится к нулю при $n \to \infty$, откуда с помощью неравенства Чебышёва следует сходимость по вероятности. Если же явно выделить пары путей, ответственных за ведущий ненулевой вклад, то можно показать, что дисперсия убывает достаточно быстро, а потому можно воспользоваться неравенством Маркова и леммой Бореля-Кантелли для доказательства сходимости почти наверное. □

Упражнение 2.5. *Докажите, что число правильных скобочных последовательностей из $2k$ скобок совпадает с количеством путей Дика длины $2k$ и равно k-ому числу Каталана C_k.*

Упражнение 2.6. *Проведите соответствующие вычисления и убедитесь, что в условиях теоремы Вигнера имеет место сходимость* $\langle L_{M_n}, x^k\rangle \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.н.}} \langle \bar{L}_{M_n}, x^k\rangle$.

В приведённом доказательстве мы построили биекцию между классами эквивалентности обходов деревьев и путями Дика или правильными скобочными последовательностями. Дадим ещё пару комбинаторных интерпретаций этого результата.

Определение 2.7. *Дерево с помеченной вершиной — * корнем *— называется* корневым деревом *или* ориентированным деревом. Потомками *данной вершины дерева, называются те вершины, для которых любой путь, соединяющий их с корнем, проходит через данную вершину.* Упорядоченным *называется дерево, у которого множество* сыновей *(ближайших потомков) каждой вершины упорядочено. Эквивалентно можно говорить о планарном дереве: ориентация дерева на плоскости задает естественный порядок его вершин.*

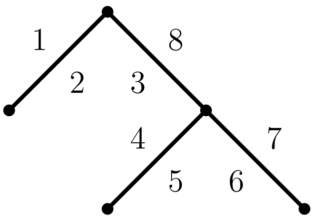

Рис. 2.2:

Заметим, что любое дерево в совокупности с порядком обхода его вершин задаёт упорядоченное корневое дерево или, эквивалентно, планарное дерево (рис. 2.2). Планарные деревья, таким образом, состоят в биекции с путями Дика (ср. с рис. 2.1).

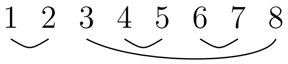

Рис. 2.3:

;

Ещё один важный комбинаторный объект, для которого можно установить биективное соответствие с путями Дика, правильными скобочными последовательностями

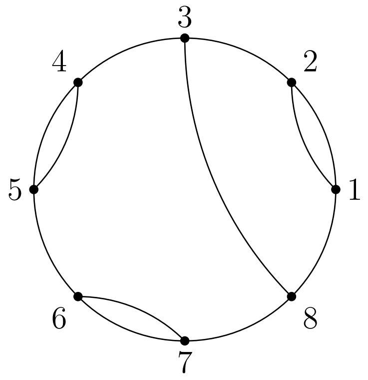

Рис. 2.4:

и планарными корневыми деревьями — это так называемое неперекрёстное разбиение. Оно может быть построено следующим образом. Перенумеруем шаги обходящего дерево пути числами от 1 до k. Выпишем эти числа подряд и соединим снизу дугами пары чисел, которые соответствуют шагам вдоль одного и того же ребра, сделанным с разных сторон (рис. 2.3). Ясно, что так как эта конструкция построена по обходу планарного дерева, дуги можно провести так, чтобы они не пересекались.

Определение 2.8. *Разбиение упорядоченного множества* $\{1, \ldots, k\}$ *на подмножества называется* неперекрёстным разбиением*, если для любых четырёх его элементов* $1 \leqslant a < b < c < d \leqslant k$*, а также для любых двух подмножеств разбиения* A *и* B *из условия* $a, c \in A$ *и* $b, d \in B$ *следует, что* $A = B$*. Непересрёстное разбиение на множества из двух элементов будем называть* попарным неперекрёстным разбиением или неперекрестным парасочитанием.

Очевидно, разбиение будет неперекрёстным, если его можно изобразить, соединив между собой элементы каждого подмножества непересекающимися дугами, нарисованными под строчной записью множества $\{1, \ldots, 2k\}$, как это было сделано на рис. 2.3. Эквивалентно, можно расположить элементы множества на окружности; в этом случае неперекрёстное разбиение изображается непересекающимися хордами, соединяющими элементы подмножеств (рис. 2.4). Как видно из рассуждения выше, моменты полукругового распределения определяются числом попарных неперекрёстных разбиений множества из $2k$ элементов.

Напомним, что суммирование по разбиениям уже встречалось нам в разделе 1 при обсуждении связи между моментами и кумулянтами в обычной теории вероятности. В частности, в силу того, что у стандартного стандартного нормального распределения $\mathcal{N}(0, 1)$ лишь один кумулянт $c_2 = 1$ не равен нулю, момент порядка $2k$ равен числу парных разбиений (парасочитаний) в множестве из $2n$ элементов. Поэтому в некотором смысле закон Вигнера аналог распределения Гаусса. В дальнейшем мы увидим, что теории свободной вероятности суммирование по неперекрёстным разбиениям играет ту же роль, что суммирование по любым разбиениям, которое возникало выше в связи с переходом от моментов к кумулянтам.

Глава 3

Метод преобразования Стилтьеса и закон Марченко-Пастура

В этом разделе мы изучим спектр случайных матриц другого типа, выборочных ковариационных матриц, построенных по случайной выборке из некоторого многомерного распределения. Такие матрицы возникают приложениях к задачам математической статистики, и вопрос о виде их спектра был впервые поставлен задолго до того, как Ю. Вигнером были введены в рассмотрение случайные эрмитовы матрицы. Впервые задача о точном распределении спектра выборочной коварицонной матрицы, построенной по выборке из многомерного нормального распределения, была решена Джоном Вишертом в 1928 году. В этом разделе мы обсудим более поздний результат, о асимптотическом виде спектра больших выборочных коварицонных матриц, построенных по выборке из многомерных распределений широкого класса. Эта задача была решена советскими математиками А. В. Марченко и Л.А. Пастуром в 1967-ом году. Мы увидим, что как и в случае закона Вигнера, асимптотический вид спектра не зависит от деталей распределения матричных элементов.

3.1 Статистики многокомпонентных выборок и сингулярные числа матриц.

Пусть $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ — n-компонентная случайная величина, заданная некоторым n-мерным распределением, и пусть имеется случайная выборка

$$X_m = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m) = \begin{pmatrix} x_{1,1} & \ldots & x_{1,m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n,1} & \ldots & x_{n,m} \end{pmatrix}$$

размера m из такого распределения. Основными статистиками, традиционно характеризующими выборку, являются вектор выборочного среднего

$$\overline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \vdots \\ \overline{x}_n \end{pmatrix} = \frac{1}{m}(\mathbf{x}_1 + \cdots + \mathbf{x}_m),$$

и выборочная коварицонная матрица с матричными элементами

$$q_{ij} = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(x_{i,k} - \overline{x}_i)(x_{j,k} - \overline{x}_j).$$

Эти статистики можно использовать для оценки параметров исходного распределения, в частности анализируя их собственные значения. Существуют также много других различных статистик. В дальнейшем мы будем интересоваться задачей о спектре похожей матрицы

$$R_m = \frac{1}{m}X_m X_m^{\dagger}, , \tag{3.1}$$

которую мы также будем называть коварицонной выборочной матрицей, построенной по n-мерному распределению, в котором все n компонент независимы и одинаково распределены. Её матричные элементы

$$r_{ij} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_{i,k}x_{j,k}^{*},$$

которые для простоты определены без сдвига элементов выборки на выборочное среднее. Как, будет замечено ниже, такой сдвиг не меняет асимптотического вида спектра. Звездочка над матричным элементом означает комплексное сопряжение, а знак † над матрицей — эрмитово сопряжение, полученное транспонированием и комплексным сопряжением матрицы. Здесь мы имеем в виду, что мы будем рассматривать не только вещественные, но и комплекснозначные случайные матрицы X. Тогда матрица определенная в (3.1) будет эрмитовой, и следовательно имеющей чисто вещественный спектр. Нетрудно проверить, что она также будет неотрицательно определена, т.е.

$$(\mathbf{v}, XX^{\dagger}, \mathbf{v}) \geq 0 \tag{3.2}$$

для любых векторов $\mathbf{v}$, где под скалярным произведением понимается эрмитово скалярное произведение

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{n} u_i^{*} v_i. \tag{3.3}$$

Все собственные значения такой матрицы неотрицательны.

В этом разделе мы попробуем ответить на вопрос, каков типичный вид спектра такой матрицы, когда она очень большая. Также, об этой задаче можно думать, как о задаче о распределении квадратов сингулярных чисел прямоугольной матрицы с независимыми одинаково распределенными матричными элементами. Пусть X прямоугольная матрица. Для любой прямоугольной матрицы можно построить полярное разложение

$$X = |X|U,$$

где U унитарная матрица, $UU^{\dagger} = I$, а матрица $|X| = \sqrt{XX^{\dagger}}$ — неотрицательная эрмитова матрица (эрмитова матрица с неотрицательными собственными значениями). Собственные числа матрицы $|X|$ называются сингулярными числами матрицы X. Следовательно собственные числа матрицы $R = XX^{\dagger}$ ни что иное, как квадраты сингулярных чисел.

Упражнение 3.1. *Пользуясь результатами предыдущего раздела найдите асимптотическую спектральную плотность квадратов сингулярных чисел вигнеровских матриц. Хотя хотя матричные элементы матрицы Вигнера сверху и снизу от главной диагонали не независимы, как мы увидим ниже, асимптотическое распределение ее сингулярных чисел точно такое же как для квадратной матрицы с независимыми одинаково распределенными элементами.*

Прежде чем обратиться к решению намеченной задачи, нам потребуется ввести несколько новых инструментов.

3.2 Преобразование Стилтьеса

Мощный инструмент для работы с вероятностными мерами, особенно эффективный для рабыты с ЭСМ случайных матриц, — преобразование Стилтьеса.

Определение 3.2. *Пусть ξ — случайная величина, обладающая функцией распределения $F_\xi(x)$. Тогда на комплексной области $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Supp}(dF_\xi(x))$ мы можем определить функцию*

$$s_\xi(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\lambda - z}\, dF_\xi(\lambda), \tag{3.4}$$

которая называется преобразованием Стилтьеса *меры $dF_\xi(x)$.*

Из определения преобразования Стилтьеса следуют его следующие простые свойства

1. Функция $s_\xi(z)$ аналитична в верхней полуплоскости $\mathbb{C}^+$.
2. Поведение на бесконечности: $\lim\limits_{z\to\infty} e^{\mathrm{i}\epsilon} z s_\xi(e^{\mathrm{i}\epsilon} z) = -1, \quad \epsilon \neq 0.$
3. Знакопостоянная мнимая часть: $\Im s_\xi(z) > 0$ при $z \in \mathbb{C}^+$,
4. Ограниченность: $|s_\xi(z)| \leq 1/\Im z$, $z \in \mathbb{C}^+$
5. Симметрия относительно отражения: $s_\xi(\overline{z}) = \overline{s_\xi(z)}$.

Справедливо и обратное утверждение.

Утверждение 3.3. *Если функция $s(z)$ имеет свойства 1-5, то существует случайная величина ξ, такая что $s(z) = s_\xi(z)$ — преобразование Стилтьеса ее распределения.*

Чтобы восстановить распределение по преобразованию Стилтьеса, можно воспользоваться следующей формулой обращения.

Утверждение 3.4. *Пусть x — точка непрерывности функции распределения $F_\xi(x)$. Тогда имеет место обратное преобразование Стилтьеса:*

$$F_\xi(x) = \pm \lim_{y\to 0^+} \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{x} \mathrm{Im}\big(s_\xi(z \pm \mathrm{i}y)\big)\, dz. \tag{3.5}$$

Доказательство. Чтобы убедиться в справедливости формулы (3.5), заметим, что

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_a^b \mathrm{Im}\big(s_\xi(z+\mathrm{i}y)\big)\,dz = \frac{1}{\pi}\int\limits_a^b \frac{dz}{2\mathrm{i}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{\lambda-(z+iy)}-\frac{1}{\lambda-(z-iy)}\right)dF_\xi(\lambda) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_a^b dz\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{y}{(\lambda-z)^2+y^2}\,dF_\xi(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dF_\xi(\lambda)\int\limits_a^b\frac{y\,dz}{(\lambda-z)^2+y^2} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\mathrm{arctg}\left(\frac{b-\lambda}{y}\right)-\mathrm{arctg}\left(\frac{a-\lambda}{y}\right)\right)dF_\xi(\lambda).$$

Воспользовавшись свойством $\lim\limits_{y\to 0^+}\mathrm{arctg}\left(\dfrac{x}{y}\right) = \dfrac{\pi}{2}\cdot\mathrm{sign}(x)$, получаем

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_a^b \mathrm{Im}\big(s_\xi(z+\mathrm{i}y)\big)\,dz \xrightarrow[y\to 0^+]{} \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\pi}{2}\big(\mathrm{sign}(b-\lambda)-\mathrm{sign}(a-\lambda)\big)\,dF_\xi(\lambda) = F(b)-F(a).$$

Остаётся устремить a к $-\infty$. Аналогично доказывается второе равенство. □

Замечание 3.5. *Из доказательства также не трудно видеть, что если x– точка разрыва,*

$$F_\xi(x)-F_\xi(x^-)=\mu_\xi(x)\neq 0,$$

то формула обратного преобразования Стилтьеса принимает вид

$$F_\xi(x)-\frac{1}{2}\mu_\xi(x) = \pm\lim_{y\to 0^+}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{x}\mathrm{Im}\big(s_\xi(z\pm\mathrm{i}y)\big)\,dz \tag{3.6}$$

Следствие 3.6. *Из этого утверждения в частности следует, что если случайная величина ξ обладает плотностью $f_\xi(x)$, формула обращения сводится к вычислению мнимой части преобразования Стилтьеса.*

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\pi}\lim_{y\to 0^+}\Im s_\xi(x+\mathrm{i}y) \tag{3.7}$$

Если предел в правой части существует, то функция распределения дифференцируема в точке x и дается пределом мнимой части преобразования Стилтьеса из верхней полуплоскости. Эта формула есть частный случай одной из формул Племеля-Сохоцкого (см. приложение A.1).

Следствие 3.7.

Подобно тому, как преобразование Лапласа распределения вероятности играет роль экспоненциальной производящей функции моментов, преобразование Стилтьеса — обычная производящая функция моментов.

Утверждение 3.8. *Пусть случайная величина ξ имеет компактный носитель,* $\mathrm{Supp}(dF_\xi(x))\subset [a;b]$, *где $-\infty < a < b < \infty$. Тогда для $z\in\mathbb{C}$, удовлетворяющих условию $|z| > max(|a|,|b|)$, справедливо соотношение*

$$s_\xi(z) = -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathbb{E}(\xi^n)}{z^n}. \tag{3.8}$$

Так же как преобразование Фурье, оно же характеристическая функция, преобразование Стилтьеса представляет собой удобный инструмент для доказательства слабой сходимости вероятностных мер.

Теорема 3.9. *[Теорема о непрерывности преобразования Стилтьеса]*

Пусть $\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots$ *— вероятностные меры на* $\mathbb{R}$. *Для того, чтобы слабая сходимость* $\mu_n \underset{n\to\infty}{\Longrightarrow} \mu$ *имела место необходимо и достаточно, чтобы имела место сходимость* $s_{\mu_n}(z) \underset{n\to\infty}{\Longrightarrow} s_\mu(z)$.[1]

Это утверждение можно распространить и на слабую сходимость случайных мер почти наверное. Однако имеется небольшая тонкость, которая требует некоторых дополнительных рассуждений. Дело в том, что даже если доказана поточечная сходимость преобразований Стилтьеса почти наверное, т.е.

$$\mathbb{P}\{\omega \in \Omega : s_{\mu_n}(z, \omega) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} s_\mu(z, \omega)\} = 1, \quad \forall z \in \mathbb{C}^+, \tag{3.9}$$

для каждой точки z все еще имеется множество меры ноль, где сходимость не гарантирована. Таких точек континуум, а мера множества, полученного объединением континуума множеств меры ноль, вообще говоря не обязана быть нулем. Для разрешения этой проблемы достаточно воспользоваться свойством аналитичности преобразования Стилтьеса и теоремой Витали о сходимости.

Теорема 3.10 (Витали). *Пусть* $f_1, f_2, \ldots$ *— последовательность функций, равномерно ограниченных и аналитических в некотором связном открытом подмножестве* D *комплексной плоскости* $\mathbb{C}$, *и последовательности* $(f_n(z))$ *сходятся поточечно в некотором подмножестве множества* D, *содержащем хотя бы одну предельную точку в* D. *Тогда существует функция* $f(z)$, *аналитическая в* D, *такая что*

$$f_n(z) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(z), \quad \forall z \in D.$$

Предположим, что (3.9) доказано. Возьмем в качестве множества D подмножество верхней полуплоскости $\{z \in \mathbb{C}^+ : \Im z > 1/a\}$, где $|s_{\mu_n}(z, \omega)| \le a$. Выберем в нем последовательность $(z_m)_{m\in\mathbb{N}}$, сходящуюся в некоторой к некоторой точке в D. Каждая из последовательностей $(s_{\mu_n}(z_m, \omega))_{n\in\mathbb{N}}$ сходится для всех ω кроме быть может множеств меры ноль. Множество событий где расходится хотя бы одна из последовательностей при при каком-то $m = 1, 2, \ldots$, будучи счетным объединением множеств нулевой меры, также имеет нулевую меру. Значит последовательность преобразований Стилтьеса сходится с вероятностью единица для всех z_m одновременно, что в силу теоремы Витали гарантирует одновременную сходимость почти наверное во всех точках верхней полуплоскости, откуда имеем

---

[1] Так же как и в случае теоремы Леви, в утверждении о достаточности важен тот факт, что предельная функция есть преобразование Стилтьеса именно вероятностной меры. В общем случае сходимость преобразований Стилтьеса влечет за собой не слабую, а так называемую грубую сходимость (vaugue convergence), которая также как в (1.28) определяется через сходимость интегралов, в которых, однако, в качестве пробных функций вместо непрерывных ограниченных функций используются непрерывные функции с компатным носителем. При грубой сходимости предел последовательности вероятностных мер не обязан быть вероятностной мерой, так как часть массы может уйти на бесконечность. Однако если известно, что предел — это также вероятностная мера, слабая равносильна грубой.

Теорема 3.11. *Пусть* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *– вероятностное пространство, а* $\mu(\omega), \mu_1(\omega), \mu_2(\omega), \ldots$ *— случайные вероятностные меры на* $\mathbb{R}$*, т.е. измеримые отображения из* Ω *в пространство борелевских вероятностных мер на* $\mathbb{R}$*. Для слабой сходимости почти наверное*

$$\mu_n(\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.н.}} \mu(\omega)$$

необходима и достаточна сходимость

$$s_{\mu_n}(z,\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.н.}} s_\mu(z,\omega).$$

для всех $z \in \mathbb{C}^+$.

3.3 Преобразование Стилтьеса эмпирической спектральной меры.

Перейдём теперь к вопросу о том, как преобразование Стилтьеса может быть использовано применительно к матрицам. Рассмотрим произвольную *эрмитову матрицу* $R \in \mathbb{C}^{n\times n}$, то есть матрицу, удовлетворяющую соотношению $R = R^\dagger$. Такую матрицу можно диагонализовать с помощью некоторой унитарной матрицы U,

$$R \to URU^\dagger = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n),$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — собственные значения матрицы R. Введём соответствующие им эмпирическую спектральную меру и эмпирическую функцию распределения:

$$L_R = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \delta_{\lambda_k}, \qquad F_R(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{I}_{x\geqslant\lambda_k}. \tag{3.10}$$

Тогда соответствующее мере L_R преобразование Стилтьеса имеет вид

$$s_R(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\lambda - z}\, dF_R(\lambda) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\lambda_k - z} = \frac{1}{n}\operatorname{Tr}\big(R - zI_n\big)^{-1}, \tag{3.11}$$

где $I_n \in \mathbb{C}^{n\times n}$ — единичная матрица размера n.

Рассмотрим теперь квадратные матрицы, полученные как произведение двух прямоугольных матриц. Очевидно, что размер такой квадратной матрицы зависит от того, в каком порядке стоят сомножители. В то же время при перестановке сомножителей ранг произведения не меняется. Что можно сказать о собственных значениях в этом случае?

Лемма 3.12. *Пусть* $m \leqslant n$*, а матрицы* $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$ *и* $B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ *таковы, что их произведения являются эрмитовыми матрицами:* $(AB)^\dagger = AB$*,* $(BA)^\dagger = BA$*. Тогда* n *собственных значений матрицы* AB *содержат* m *собственных значений матрицы* BA *и* $n - m$ *нулевых собственных значений.*

Доказательство. Заметим, сначала, что если $m = n$, то есть матрицы A и B квадратные и A — обратимая матрица, то выполняется равенство $BA = A^{-1}(AB)A$, то есть одно произведение получается из другого сопряжением, и следовательно их собственные значения совпадают.

Если обе матрицы вырождены, можно немного изменить некоторые их матричные элементы на малую величину ϵ, чтобы сделать их невырожденными, и использовать предыдущий аргумент. Поскольку собственные значения, это корни характеристического многочлена, равенство двух многочленов сохранится и в пределе $\epsilon \to 0$, некоторые собственные значения обратятся в ноль. Таким образом утверждение доказано для квадратных матриц.

Пусть теперь $m < n$. Можно достроить матрицы A и B до квадратных матриц $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ размера $n \times n$, добавив в них нули, и воспользоваться утверждением, доказанным для квадратных матриц. Действительно, матрица $\tilde{A}\tilde{B}$ совпадает с матрицей AB, а матрица $\tilde{A}\tilde{B}$ имеет блочный вид

$$\tilde{B}\tilde{A} = \begin{pmatrix} BA & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку собственные значения квадратных матриц $\tilde{A}\tilde{B}$ и $\tilde{B}\tilde{A}$ совпадают, получим требуемое утверждение. □

Два важных следствия будут использоваться далее.

Следствие 3.13. *Имеет место соотношение для определителей*

$$\det(\lambda I_n - AB) = \lambda^{n-m} \det(\lambda I_m - BA) \tag{3.12}$$

Его важный частный случай при $\lambda = 1$ справедлив не только для матриц но и для бесконечномерных операторов в гильбертовых пространствах.

Следствие 3.14. *Для всех $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ справедливо соотношение*

$$\frac{m}{n} \cdot s_{BA}(z) = s_{AB}(z) + \frac{n-m}{n} \cdot \frac{1}{z}. \tag{3.13}$$

Это соотношение справедливо независимо от того, какое из чисел n, m больше.

Доказательство. Поскольку собственные значения для AB — это собственные значения для BA, а также ещё $n - m$ нулевых собственных значений, то добавляя соответствующее им слагаемое $(n-m)\delta_0$ к мере L_{BA}, получаем требуемое утверждение. Равенство не изменится, если одновременно поменять местами n с m и AB с BA. □

Теперь мы готовы сформулировать теорему Марченко-Пастура.

Теорема 3.15. *[Закон Марченко-Пастура] Пусть $(x_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ – двойная последовательность независимых одинаково распределенных комплексных случайных величин, определенных на одном вероятностном пространстве, с независимыми мнимыми и вещественными частями, таких что*

$$\mathbb{E}x_{11} = 0, \quad \mathbb{E}|x_{11}|^2 = \mathbb{E}(\Im x_{11})^2 + \mathbb{E}(\Re x_{11})^2 = 1, \quad \mathbb{E}\,|x_{11}|^s < \infty, \quad s \le 8,$$

а $X^{(n,m)} \in \mathbb{C}^{n\times m}$ составленные из $n \times m$ первых из них прямоугольные матрицы

$$X^{(n,m)} = \frac{1}{\sqrt{m}}\{x_{ij} : 1 \le i \le n, 1 \le j \le m\},$$

нормированные таким образом, чтобы дисперсия матричных элементов была $\mathbb{D}(X_{ij}^{n\times m}) = 1/m$.

Пусть $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *и* $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *– последовательности натуральных чисел, такие что* $n_k, m_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$*, так что* $n_k/m_k \xrightarrow[k\to\infty]{} c \in (0;\infty)$*. Тогда, последовательность ЭСМ* $(L_{R_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *случайных эмпирических спектральных мер матриц* $R_k = X^{(n_k,m_k)}\cdot\left(X^{(n_k,m_k)}\right)^\dagger$ *сходится слабо почти наверное,*

$$L_{R_k} \xrightarrow[k\to\infty]{п.н.} \mu_{MP}, \tag{3.14}$$

к закону Марченко-Пастура

$$\mu_{MP} = \mu_{MP}^{\mathrm{ac}} + (1-c^{-1})\delta_0(x)\mathbb{I}_{\{c>1\}}, \tag{3.15}$$

где μ_{MP}^{ac} *– абсолютно непрерывная относительно меры Лебега часть, задаваемая плотностью*

$$f_{MP}(x) = \frac{\sqrt{(a_+-x)(x-a_-)}}{2\pi xc}\mathbb{I}_{\{a_-<x<a_+\}}, \quad a_\pm = (1\pm\sqrt{c})^2. \tag{3.16}$$

Упражнение 3.16. *Используя утверждение теоремы 3.15, покажите, что последовательность эмпирических случайных мер, построенных по сингулярным числам случайных комплексных квадратных матриц с независимыми одинаково распределенными матричными элементами, при увеличении размера матриц почти наверное слабо сходится к половине полукругового закон Вигнера .*

Согласно теореме 3.11 для доказательства слабой сходимости ЭСМ достаточно доказать поточечную сходимость её преобразования Стилтьеса. Это доказательство состоит из двух шагов.

1. Для любого фиксированного $z\in\mathbb{C}^+$, $s_{R_k(z)} - \mathbb{E}s_{R_k(z)} \xrightarrow[k\to\infty]{\text{п.н.}} 0$.

2. Для любого фиксированного $z\in\mathbb{C}^+$, $\mathbb{E}s_{R_k(z)} \xrightarrow[k\to\infty]{} s_{MP}(z)$, где

$$s_{MP}(z) = \frac{1-c-z+\sqrt{(z-a_+)(z-a_-)}}{2cz}, \quad a_\pm = (1\pm\sqrt{c})^2, \tag{3.17}$$

   преобразование Стилтьеса распределения Марченко-Пастура.

Упражнение 3.17. *Докажите, что преобразование Стилтьеса распределения Марчеко-Пастура (3.15,3.16) дается формулой (3.17).*

Первый шаг, доказательство сходимости $s_{R_k}(z)$ к своему среднему, можно можно провести так же, как с использованием неравенства Мак Диармида доказывалась сходимость в примере 1.25. А именно, сходимость преобразования Стилтьеса ЭСМ матриц R_k следствие того факта, что при изменении ЭСМ вызванное изменением любого из столбцов матрицы $X^{(n_k,m_k)} = (\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_m)$ мало. Это общее важное свойство устойчивости собственных значений матрицы по отношению к возмущениям малого ранга. Обсудим его детальнее перед тем, как перейти к техническим деталям доказательства сходимости.

3.4 Теорема о перемежаемости и возмущение спектра

Теорема 3.18 (Теорема Коши о перемежаемости.). *Пусть* $A = A^\dagger \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *— эрмитова матрица, а матрица* $A^{(1)}$ *получена из матрицы* A *вычёркиванием первой строки и первого столбца. Пусть, далее,* $\lambda_1 \le \ldots \le \lambda_n$ *— собственные значения матрицы* A*, а* $\lambda_1^{(1)} \le \ldots \le \lambda_{n-1}^{(1)}$ *— собственные значения матрицы* $A^{(1)}$*. Тогда справедливы неравенства*

$$\lambda_1 \le \lambda_1^{(1)} \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_{n-1} \le \lambda_{n-1}^{(1)} \le \lambda_n \tag{3.18}$$

.

Доказательство. Проведем доказательство для случая общего положения, когда случайные значения строго упорядочены, $\lambda_1 < \ldots < \lambda_n$, а матрица A невырождена. Пусть $\bar{v}$ — собственный вектор матрицы A, отвечающий собственному значению λ, $\bar{v}^{(1)}$ — он же, но без первого элемента, то есть $\bar{v}^\dagger = (v_1, \ldots, v_n)$, $(\bar{v}^{(1)})^\dagger = (v_2, \ldots, v_n)$. Представив матрицу A как

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \bar{a}^\dagger \\ \bar{a} & A^{(1)} \end{pmatrix},$$

мы можем переписать условие $A\bar{v} = \lambda\bar{v}$ в виде системы уравнений

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \alpha v_1 + \bar{a}^\dagger \bar{v}^{(1)} & = & \lambda v_1 \\ \bar{a} v_1 + A^{(1)}\bar{v}^{(1)} & = & \lambda \bar{v}^{(1)} \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} (\lambda - \alpha) v_1 & = & \bar{a}^\dagger \bar{v}^{(1)} \\ \bar{a} v_1 & = & \big(\lambda I_{n-1} - A^{(1)}\big)\bar{v}^{(1)} \end{array} \right. .$$

Таким образом, $\bar{v}^{(1)} = \big(\lambda I_{n-1} - A^{(1)}\big)^{-1}\bar{a}v_1$. Подставляя это выражение в первое уравение и сокращая на v_1 (в предположении $v_1 \ne 0$ в ситауции общего положения), получим

$$\lambda - \alpha = \bar{a}^\dagger \big(\lambda I_{n-1} - A^{(1)}\big)^{-1}\bar{a}. \tag{3.19}$$

Пусть теперь $\bar{v}_k^{(1)}$ — собственный вектор матрицы $A^{(1)}$, отвечающий собственному значению $\lambda_k^{(1)}$, то есть $A^{(1)}\bar{v}_k^{(1)} = \lambda_k^{(1)}\bar{v}_k^{(1)}$. Разложим вектор $\bar{a}$ по базису $\bar{v}_1^{(1)}, \ldots, \bar{v}_{n-1}^{(1)}$,

$$\bar{a} = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\bar{a}, \bar{v}_k^{(1)}\right) \cdot \bar{v}_k^{(1)},$$

после чего подставим это разложение в формулу (3.19). Получим

$$\lambda - \alpha = \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n-1} \left(\bar{a}, \bar{v}_k^{(1)}\right) \cdot \left(\bar{v}_k^{(1)}\right)^\dagger \big(\lambda I_{n-1} - A^{(1)}\big)^{-1} \bar{v}_l^{(1)} \cdot \left(\bar{a}, \bar{v}_l^{(1)}\right)$$

или

$$\lambda - \alpha = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\left|\left|\left(\bar{a}, \bar{v}_k^{(1)}\right)\right|\right|^2}{\lambda - \lambda_k^{(1)}}. \tag{3.20}$$

На формулу (3.20) можно смотреть как на уравнение относительно переменной λ. Левая часть этого уравнения монотонно возрастает на всей числовой прямой. Правая, напротив, на каждом промежутке вида $\big(\lambda_{k-1}^{(1)}; \lambda_k^{(1)}\big)$ является убывающей функцией, которая при этом принимает все действительные значения, а на лучах $\big(-\infty; \lambda_1^{(1)}\big)$ и $\big(\lambda_{n-1}^{(1)}; +\infty\big)$ она монотонно убывает, принимая значения $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$ соответственно (рис. 3.1).

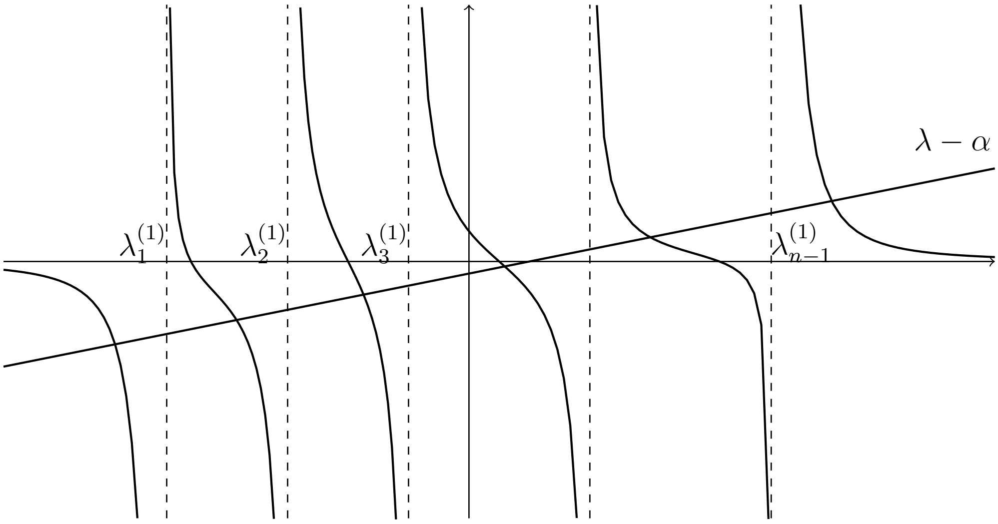

Рис. 3.1:

Следовательно, уравнение (3.20) имеет ровно n решений, которые удовлетворяют неравенству $\lambda_1 < \lambda_1^{(1)} < \lambda_2 < \ldots < \lambda_{n-1} < \lambda_{n-1}^{(1)} < \lambda_n$.

В случае матрицы не общего положения можно изменить матричные элементы на малые добавки, чтобы вернуться в ситуацию общего положения. Поскольку собственные значения являются корнями соответствующих характеристических многочленов, при стремлении малых добавок к нулю свойство их перемежаемости сохранится, быть может с заменой строгих неравенств на нестрогие. □

Перемежаемость собственных значений приводит к нескольким важным следствиям, в частности к тому, что преобразования Стилтьеса ЭСМ матриц A и $A^{(1)}$ отличаются не слишком сильно.

Следствие 3.19. *В условиях леммы 3.18 для любого* $z \in \mathbb{C}^*$ *имеет неравенство*

$$|s_A(z) - s_{A^{(1)}}(z)| \leq \frac{\pi}{n \cdot \operatorname{Im} z}. \tag{3.21}$$

Доказательство. Заметим, что согласно лемме 3.18 эмпирические функции распределения $F_A(x)$ и $F_{A^{(1)}}(x)$ отличаются друг от друга не слишком сильно:

$$|F_A(x) - F_{A^{(1)}}(x)| \leqslant \frac{1}{n}. \tag{3.22}$$

Поэтому, используя это неравенство и интегрируя по частям, получаем

$$|s_A(z) - s_{A^{(1)}}(z)| = \left| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dF_A(\lambda)}{\lambda - z} - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dF_{A^{(1)}}(\lambda)}{\lambda - z} \right| =$$

$$= \left| \frac{F_A(\lambda) - F_{A^{(1)}}(\lambda)}{\lambda - z} \right|_{-\infty}^{+\infty} + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{F_A(\lambda) - F_{A^{(1)}}(\lambda)}{(\lambda - z)^2}\, d\lambda \Bigg| \leqslant \frac{1}{n} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\lambda}{(\lambda - z)^2} =$$

$$= \frac{1}{n} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\lambda}{(\lambda - \operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\operatorname{Im} z} \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{\lambda - \operatorname{Re} z}{\operatorname{Im} z} \right) \Bigg|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{n \cdot \operatorname{Im} z}.$$

□

Применяя теорему о перемежаемости несколько раз можно обобщить её на матрицы $A^{(k)}$, полученные из A стиранием нескольких столбцов и строк с одинаковыми номерами. При этом условие перемежаемости заменится на (3.18) неравенства

$$\lambda_i \leq \lambda_i^{(k)} \leq \lambda_{i+k}, \quad i =, 1, \ldots, n-k, \tag{3.23}$$

что в свою очередь приведет к появлению множителя k в числителе а в правой части аналогов формул (3.21,3.22). В свою очередь все эти неравенства есть частный случай более общего неравенства для любых эрмитовых матриц.

Следствие 3.20. *Пусть $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ – эрмитовы матрицы. Для любого $z \in \mathbb{C}^+$ имеет неравенство*

$$|s_A(z) - s_B(z)| \leq \frac{\pi \cdot \operatorname{rank}(A-B)}{n \cdot \operatorname{Im} z}. \tag{3.24}$$

Доказательство. Пусть $k = \operatorname{rank}(A-B) > 0$. Заметим, что обе стороны неравенства 3.24 инвариантны относительно унитарных преобразований. Найдется унитарное преобразование U, приводящее матрицу $C = A - B$ к следующему блочному виду

$$UCU^\dagger = \begin{pmatrix} \tilde{C} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad UAU^\dagger = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad UBU^\dagger = \begin{pmatrix} B_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \tag{3.25}$$

где $\tilde{C} = A_{11} - B_{11} \in \mathbb{C}^{k\times k}$ – эрмитова матрица полного ранга k, Согласно теореме о перемежаемости и, в частности, формуле (3.23), собственные значения матриц A, B и A_{22} связаны неравенствами

$$\max\{\lambda_j(A), \lambda_j(B)\} \leq \lambda_j(A_{22}) \leq \min\{\lambda_{j+k}(A), \lambda_{j+k}(B)\}, \quad j = 1, \ldots, n-k, \tag{3.26}$$

откуда следует, что для $x \in (\lambda_{j-1}(A_{22}), \lambda_j(A_{22})]$ мы имеем

$$\max\{\lambda_{j-1}(A), \lambda_{j-1}(B)\} < x \leq \min\{\lambda_{j+k}(A), \lambda_{j+k}(B)\}, \tag{3.27}$$

т.е.

$$\frac{j-1}{n} \leq F_A(x), F_B(x) < \frac{j+k}{n}, \tag{3.28}$$

и мы приходим к (3.24). □

Можно сделать похожее утверждение о том, что разность преобразований Стилтьеса ЭСМ коварицонных выборочных матриц ограничена рангом разности исходных прямоугольных матриц.

Следствие 3.21. *Пусть $A, B \in \mathbb{C}^{n\times m}$ – прямоугольные комплексные матрицы. Для любого $z \in \mathbb{C}^+$ имеет место неравенство*

$$|s_{AA^\dagger}(z) - s_{BB^\dagger}(z)| \leq \frac{\pi \cdot \operatorname{rank}(A-B)}{n \cdot \operatorname{Im} z}. \tag{3.29}$$

Доказательство. Для доказательства достаточно заметить, что собственные значения положительно определенной матрицы $AA^\dagger$, они же квадраты сингулярных чисел матрицы A, так же дают квадраты собственных значений эрмитовой матрицы $(n+m)\times(n+m)$ вида

$$\begin{pmatrix} 0 & A^\dagger \\ A & 0, \end{pmatrix}$$

имеющей симметричный относительно нуля спектр. Применяя к этой матрице теорему о перемежаемости, получаем искомый результат. □

3.5 Доказательство теоремы Марченко-Пастура

Зафиксируем $z \in \mathbb{C}^+$.

Шаг 1.

Рассмотрим преобразования Стилтьеса ЭСМ двух матриц $XX^\dagger$ и $X'X'^\dagger$, построенных из матриц $X, X' \in \mathbb{C}^{n\times n}$, отличающихся одним столбцом,

$$X = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}, \dots, \mathbf{x}_m), \quad X' = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{x}'_k, \mathbf{x}_{k+1}, \dots, \mathbf{x}_m).$$

Согласно следствию 3.21 для любого $z \in \mathbb{C}^+$ разность их преобразований Стилтьеса ограничена.

$$|s_{XX^\dagger}(z) - s_{X'X'^\dagger}(z)| \le \frac{\pi}{n \cdot \operatorname{Im} z}. \tag{3.30}$$

Поэтому, также как в примере 1.25, воспользовавшись неравенством Мак Диармида, неравенством Маркова и леммой Бореля-Контелли, мы приходим к следующему утверждению

Лемма 3.22. *В условиях теоремы 3.15 для любого фиксированного $z \in \mathbb{C}^+$ имеет место сходимость*

$$s_{R_k(z)} - \mathbb{E}s_{R_k(z)} \xrightarrow[k\to\infty]{п.н.} 0. \tag{3.31}$$

Шаг 2.

Идея второго шага доказательства – построить рекуррентную процедуру вычисления преобразования Стилтьеса искомой ЭСМ, связав выражения для матриц разных размеров.

Лемма 3.23. *Пусть $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$ – комплексая матрица. Запишем ее в виде*

$$X = (\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n)^\dagger, \tag{3.32}$$

где $\mathbf{y}_i \in \mathbb{C}^m$ соответствующие столбцы (а после транспонирования $\mathbf{y}_i^\dagger$ – строки), и пусть

$$Y_i = (\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{i-1}, \mathbf{y}_{i+1}, \dots, \mathbf{y}_n)^\dagger, \quad i = 1, \dots, n \tag{3.33}$$

подматрицы полученные из X вычеркиванием строки с номером $i = 1, \dots, n$. Тогда

$$\left[\left(XX^\dagger - zI_n\right)^{-1}\right]_{ii} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 + \mathbf{y}_i{}^\dagger\left(Y_i^\dagger Y_i - zI_m\right)^{-1}\mathbf{y}_i}. \tag{3.34}$$

Доказательство. Докажем утверждение для $i = 1$. Мы воспользуемся леммой A.5 о дополнении Шура, доказанной в приложении A.2. Эта лемма дает формулу обращения блочной матрицы вида

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

также в виде блочной матрицы. В частности, при размере $k \times k$ верхнего диагонального блока A матричные элементы такого же верхнего диагонального блока имеют вид

$$\left[M^{-1}\right]_{ij} = \left[\left(A - BD^{-1}C\right)^{-1}\right]_{ij}, \quad 1 \le i, j \le k. \tag{3.35}$$

Пусть $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$. Тогда можем записать

$$X = \begin{pmatrix} \mathbf{y}^\dagger \\ Y \end{pmatrix}, \qquad X^\dagger = \begin{pmatrix} \mathbf{y} & Y^\dagger \end{pmatrix}, \qquad XX^\dagger = \begin{pmatrix} \mathbf{y}^\dagger\mathbf{y} & \mathbf{y}^\dagger Y^\dagger \\ Y\mathbf{y} & YY^\dagger \end{pmatrix}. \tag{3.36}$$

Формула (3.35) с $k = 1$, примененная к матрице

$$M = XX^\dagger - zI_n = \begin{pmatrix} \mathbf{y}^\dagger\mathbf{y} - z & \mathbf{y}^\dagger Y^\dagger \\ Y\mathbf{y} & YY^\dagger - zI_{n-1} \end{pmatrix}. \tag{3.37}$$

даёт

$$\left[\left(XX^\dagger - zI_n\right)^{-1}\right]_{11} = \frac{1}{(\mathbf{y}\mathbf{y}^\dagger - z) - \mathbf{y}^\dagger Y^\dagger (YY^\dagger - zI_{n-1})^{-1} Y\mathbf{y}} =$$

$$= \frac{1}{-z + \mathbf{y}^\dagger\left(I_m - Y^\dagger(YY^\dagger - zI_{n-1})^{-1}Y\right)\mathbf{y}} = \frac{1}{-z - z\cdot\mathbf{y}^\dagger\left(Y^\dagger Y - zI_m\right)^{-1}\mathbf{y}},$$

что соответствует формуле (3.35). □

Упражнение 3.24. *Проверьте, что в указанных выше условиях выполняется равенство:*

$$I_m - Y^\dagger(YY^\dagger - zI_{n-1})^{-1}Y = z\left(zI_m - Y^\dagger Y\right)^{-1}. \tag{3.38}$$

Просуммировав обе части (3.35) и разделив на n, получим преобразование Стильтьеса матрицы $XX^\dagger$ в левой части

$$s_{XX^\dagger}(z) = \frac{1}{n}\mathrm{Tr}\left[\left(XX^\dagger - zI_n\right)^{-1}\right] = -\frac{1}{nz}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1 + \mathbf{y}_i{}^\dagger\left(Y_i^\dagger Y_i - zI_m\right)^{-1}\mathbf{y}_i}. \tag{3.39}$$

Покажем что, если в качестве матрицы X брать матрицы X_k из условия, то правую часть можно с любой точностью выразить через него же. Во первых убедимся, что присутствующее в знаменателе произведение $\mathbf{y}_i{}^\dagger\left(Y_i^\dagger Y_i - zI_m\right)^{-1}\mathbf{y}_i$ близко к преобразованию Стилтьеса ЭСМ матрицы $Y_i^\dagger Y_i$.

Лемма 3.25. *Пусть $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, определенных на одном вероятностном пространстве, таких что $\mathbb{E}x_1 = 0$, $\mathbb{D}|x_1| = 1$ и $\mathbb{E}|x_1|^8 < \infty$, а*

$$\mathbf{y}_m = \frac{1}{\sqrt{m}}(x_1, \ldots, x_m)^T \in \mathbb{C}^m, \quad m \in \mathbb{N}$$

столбцы из m таких переменных, нормированные так, чтобы дисперсия компонент была равна $1/m$. Пусть, кроме того, $\{A_n \in \mathbb{C}^{n\times n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ – последовательность независимых от $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ комплексных квадратных матриц с ограниченной спектральной нормой. Тогда

$$\mathbf{y}_m^\dagger A_m \mathbf{y}_m - \frac{1}{m}\,\mathrm{Tr}A_m \xrightarrow[m\to\infty]{\text{п.н.}} \tag{3.40}$$

Доказательство. Сходимость в среднем (а точнее тождественное зануление матожидания всех членов последовательности) обеспечивается независимостью компонент векторов $\mathbf{y}_m$, из которой следует, что

$$\mathbb{E}\left(y_{m,i}^\dagger y_{m,j}\right) = \frac{\delta_{ij}}{m},$$

откуда имеем

$$\mathbb{E}\big(\mathbf{y}_m^\dagger A_m \mathbf{y}_m\big) = \sum_{i=1}^m \sum_{i=1}^m \mathbb{E}\big((A_m)_{ij} y_i^\dagger y_j\big) = \frac{1}{m}\,\mathbb{E}\mathrm{Tr}A_m. \tag{3.41}$$

Для доказательства сходимости почти наверное достаточно убедиться в том, что для некоторого $k \in \mathbb{N}$, $C > 0$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\mathbb{E}\left(\left|y^\dagger A_m y - \frac{1}{m}\,\mathrm{Tr}A_m\right|^k\right) \leqslant \frac{C}{m^{1+\varepsilon}}, \tag{3.42}$$

после чего достаточно будет воспользоваться леммой 1.13 Бореля-Кантелли.

Проверку неравенства (3.42) для $k = 4$ оформим в виде нижеследующей леммы.

Лемма 3.26. *В условиях леммы 3.25 справедлива оценка*

$$\mathbb{E}\left(\left|y^\dagger A_m y - \frac{1}{m}\,\mathrm{Tr}A_m\right|^4\right) = O\left(\frac{1}{m^2}\right), m \to \infty.$$

Доказательство этой леммы мы оставляем читателю, заметив лишь, что её методика воспроизводит аргументы, использованные при доказательстве теоремы Вигнера методом моментов, с той разницей, что здесь требуется анализ моментов лишь до четвертого порядка включительно. □

Упражнение 3.27. *Докажите лемму 3.26.*

Обозначим через $Y_{k,i}$ матрицу, полученную из матрицы $X_k = X^{(n_k,m_k)}$ вычеркиванием строки с номером i, а соответствующую строку $\mathbf{y}_{k,i}^\dagger$. Поскольку для любой эрмитовой матрицы $M \in \mathbb{C}^{m\times m}$ спектральная норма матрицы $\big(M - zI_m\big)^{-1}$ ограничена величиной $1/|\Im z|$, из доказанной леммы следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{k,i} i^\dagger \big(Y_{k,i}^\dagger Y_{k,i} - zI_m\big)^{-1} \mathbf{y}_{k,i} &= s_{Y_{k,i}^\dagger Y_{k,i}}(z) + \delta_{k,i} \\ &= c_k s_{Y_{k,i} Y_{k,i}^\dagger}(z) + (c_k - 1)/z + \delta_{k,i} \\ &= c_k\,\mathbb{E}s_{X_k X_k^\dagger}(z) + (c_k - 1)/z + \delta'_{k,i}, \end{aligned} \tag{3.43}$$

где $c_k = n_k/m_k$, а $\delta_{k,i}, \delta'_{k,i}$ – последовательности случайных величин сходящихся к нулю почти наверное при $k \to \infty$ для каждого i. Здесь в первом равенстве мы воспользовались утверждением леммы 3.25, во втором формулой (3.13), связывающей преобразования Стилтьеса ЭСМ произведения матриц и переставленных матриц, а в третьем тем, что $s_{Y_{k,i}Y_{k,i}^\dagger}(z)$ и $s_{X_k X_k^\dagger}(z)$ отличаются на $O(1/n_k)$ согласно следствию 3.21, тем что $c_k \to_{k\to\infty} c$, и леммой 3.22 о сходимости преобразования Стилтьеса к своему матожиданию.

Подставляя X_k вместо X в формулу (3.39), и вычисляя матожидание от обеих частей мы получаем

$$\bar{s}_{R_k}(z) = \frac{1}{1 - c_k - z - c_k z \bar{s}_{R_k}(z)} + \epsilon_k(z), \tag{3.44}$$

где мы ввели обозначения $\mathbb{E}s_{R_k}(z) = \bar{s}_{R_k}(z)$ и

$$\epsilon_k(z) = \frac{1}{n_k}\sum_{i=1}^{n_k} \mathbb{E}\left(\frac{1}{1 - c_k - z - c_k z \bar{s}_{R_k}(z)} - \frac{1}{1 - c_k - z - c_k z \bar{s}_{R_k}(z) - z\delta'_{k,i}}\right). \tag{3.45}$$

Несложно проверить, что $\epsilon_k(z) \to 0$ при $k \to \infty$. Это следует из того, что $\delta'_{k,i} \to 0$, т.е. разность знаменателей дробей под знаком суммы стремится к нулю почти наверное и, следовательно, в среднем, тогда как сами знаменатели отделены от нуля при $z \in \mathbb{C}^+$. Действительно, можно сделать следующие оценки

$$|1 - c_k - z - c_k z \bar{s}_{R_k}(z)| \geq |\Im(1 - c_k - z - c_k z \bar{s}_{R_k}(z))| \tag{3.46}$$

и

$$\begin{aligned} \Im(1 - c_k - z - c_k z \bar{s}_{R_k}(z)) &= -\Im(z + c_k z \bar{s}_{R_k}(z)) \\ &= -\Im z \left(1 + c_k \, \mathbb{E} \int_{\mathbb{R}} \frac{x dF_{L_{R_k}}(x)}{|x-z|^2}\right) \leq -\Im z, \end{aligned} \tag{3.47}$$

где последнее неравенство следует из того факта, что $\mathrm{Supp}(dF_{R_k}) \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Уравнение (3.44) имеет два решения

$$s_k^{\pm}(z) = \frac{1 - c_k - z + c_k z \epsilon_k(z) \pm \sqrt{(1 - c_k - z - c_k z \epsilon_k(z))^2 - 4 c_k z}}{2 c_k z}. \tag{3.48}$$

Нам осталось доказать, что истинным является решение $s_k^+(z)$, которое очевидно сходится к (3.17) в пределе $k \to \infty$. Для этого заметим, что из свойств преобразования Стилтьеса следует, что $\bar{s}_{R_k}(z) \to 0$ в пределе $\Im z \to \infty$ при фиксированном $\Re z$. Из уравнения (3.44 видно, что что при этом также $\epsilon_k(z) \to 0$. Поскольку этому условию удовлетворяет только функция $s^+(z)$, существует некоторая область в $\mathbb{C}^+$, в которой $\Im z$ достаточно велико, где равенство $\bar{s}_{R_k}(z) = s_k^+(z)$ точно имеет место. Предположим, что это верно не всюду в $\mathbb{C}^+$. Тогда, в силу непрерывности преобразования Стилтьеса существует точка $z_0 \in C^+$, в которой выполнено равенство $s_k^+(z_0) = s_k^-(z_0)$. Из этого равенства следует равенство нулю подкоренного выражения в (3.48), которое имеет место если

$$\epsilon_k(z_0) = \frac{1 - c_k - z_0 \pm 2\sqrt{c_k z_0}}{c_k z_0}. \tag{3.49}$$

Если подставить это выражение назад в (3.48), мы увидим, что из неравенства (3.47 следует, что в (3.49) должен быть выбран знак плюс, откуда имеем

$$\bar{s}_{R_k}(z_0) = \frac{1 - c_k - z_0 + \sqrt{c_k z_0}}{c_k z_0} \tag{3.50}$$

Наконец заметим, что согласно следствию 3.14 преобразование Стилтьеса $s_{R'_k}$ ЭСМ матрицы $R'_k = X_k^{\dagger} X_k$, полученной из R_k перестановкой сомножителей, связана $s_{R_k}(z)$ соотношением 3.13. То же самое справедливо для их матожиданий, т.е.

$$\bar{s}_{R'_k}(z_0) = c_k \bar{s}_{R_k}(z_0) + \frac{c_k - 1}{z_0}. \tag{3.51}$$

Подставляя сюда (3.50), приходим к соотношению

$$1 + \bar{s}_{R'_k}(z_0) = \frac{1}{\sqrt{c_k z_0}}, \tag{3.52}$$

которое очевидно не может быть верным, поскольку мнимая часть левой части положительна, а правой отрицательна. Таким образом мы показали, что $\bar{s}_{R_k}(z) = s_k^+(z)$ для всех $z \in \mathbb{C}^+$, а следовательно.

$$\lim_{k\to\infty} \bar{s}_{R_k}(z) = \frac{1 - c - z + \sqrt{(z-a_+)(z-a_-)}}{2cz}, \qquad \forall z \in \mathbb{C}^+, \tag{3.53}$$

где, $a_\pm = (1 \pm \sqrt{c})^2$. Таким образом мы доказали сходимость матожидания преобразования Стилтьеса ЭСМ матрицы R_k к правой части (3.53), а с учетом леммы 3.22 и сходимость почти наверное самого преобразования Стилтьеса.

В правой части (3.53) мы видим формулу (3.17)) преобразования Стилтьеса $s_{MP}(z)$ распределения Марченко-Пастура. Действительно, при $0 < c < 1$ функция аналитична на комплексной плоскости с разрезом на отрезке $[a_-, a_+]$ соединяющим две точки ветвления квадратного корня. В этом случае плотность распределения может быть найдена с помощью формул Сохоцкого-Племеля

$$f_{MP}(z) = \lim_{y\to 0^+} \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} s_{MP}(z + \mathrm{i}y) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{(a_+ - x)(x - a_-)}}{2cx}$$

При $c > 1$ функция $s_{MP}(z)$ nfr;t имеет полюс $z = 0$,

$$s_{MP}(z) \sim -\frac{1 - c^{-1}}{z},$$

который говорит о том, что в точке $x = 0$ имеется атом, с вероятностью $1 - c^{-1}$.

Глава 4

Введение в теорию свободной вероятности

В предыдущих главах мы видели возникновение предельных законов распределения спектров больших случайных матриц. Эти законы обладают большой степенью универсальности и зависят только от глобальных симметрий исходной задачи, но, например, не от особенностей распределений матричных элементов. Это роднит сделанные утверждения с ЗБЧ и ЦПТ. Однако, все они относились к предельным статистикам одной случайной матрицы, тогда как ЗБЧ и ЦПТ в классической вероятности оперируют с суммами последовательностей независимых случайных величин. Причем сделав утверждение типа ЗБЧ для одной или нескольких последовательностей независимых случайных величин, можно сделать подобные утверждения и для их функций. Как обсуждалось в главе 1, ключевым при этом является тот факт, что совместные моменты нескольких независимых случайных величин факторизуются в произведение индивидуальных моментов, а, соответственно, кумулянты распадаются в сумму, т.е. аддитивны.

В случае случайных матриц роль случайных величин играли ЭСМ. Естественный вопрос, существует ли аналог понятия независимости, который при совместном рассмотрении нескольких таких объектов позволял бы делать содержательные утверждения о их совместном поведении, например аналогичные ЗБЧ в классической вероятности. Однако, поскольку матричное умножение некоммутативно, именно отсутствие коммутативности должно быть ключевым новой теории от классической теории вероятности.

Классическая теория вероятности базируется на трёх китах: вероятностном пространстве Ω, его σ-алгебре $\mathcal{F}$ и вероятностной мере μ. В рамках этой модели случайные величины — это функции вида $\Omega \to \mathbb{R}$ или $\Omega \to \mathbb{C}$, а их типичное поведение описывается математическим ожиданием. Однако можно было бы строить теорию по другому, положив случайные величины в основу теории, для чего нужно определить для них операцию взятия матожидания, описав его свойства. Именно этот подход используется при построении теории свободной вероятности, в которой случайные величины становятся некоммутативными. Заметим, что классическая (коммутативная) теория естественно вложена в общую некоммутативную, но естественно и не ведет ни к чему новому.

4.1 Некоммутативные вероятностные пространства

Определение 4.1. Некоммутативным вероятностным пространством *называется пара* $(\mathcal{A}, \tau)$*, в которой* $\mathcal{A}$ *— ассоциативная алгебра с единицей над комплексными числами,* *а $\tau\colon \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ — линейный функционал, для которого справедливо равенство $\tau(1_{\mathcal{A}}) = 1$. Если дополнительно выполнено условие $\tau(xy) = \tau(yx)$, то τ называется* следом, *а $\mathcal{A}$* — алгеброй со следом.

Определение 4.2. *Алгебра $\mathcal{A}$ называется* $*$-алгеброй *(стар-алгеброй), если на ней задана операция $*$, которая удовлетворяет следующим свойствам:*

- *инволютивность:* $(x^*)^* = x$,
- *дистрибутивность:* $(x+y)^* = x^* + y^*$,
- *антиоднородность:* $(xy)^* = y^* x^*$,
- *антилинейность:* $(cx)^* = \bar{c} x^*$.

Элементы $x \in \mathcal{A}$, обладающие характерными свойствами относительно операции $*$, имеют особые названия. Так,

- *если $x^* = x$, то x называется* самосопряжённым *или* эрмитовым,
- *если $xx^* = x^*x$, то x называется* нормальным,
- *если $xx^* = 1_{\mathcal{A}}$, то x называется* унитарным.

Определение 4.3. *Некоммутативное вероятностное пространство $(\mathcal{A}, *, \tau)$ называется* $*$-вероятностным пространством, *если $\mathcal{A}$ представляет собой $*$-алгебру, а функционал τ является $*$-линейным и удовлетворяет свойству $\tau(xx^*) \geqslant 0$. Если дополнительно из условия $\tau(xx^*) = 0$ следует, что $x = 0$, то функционал τ называется* точным.

Элемент $x \in \mathcal{A}$ некоммутативного вероятностного пространства $\{\mathcal{A}, \tau\}$ называются некоммутативной случайной величиной. Ниже, там где это не приведет к недоразумению, слово “некоммутативная” будет часто опускаться.

Пример 4.4. *Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ — вероятностное пространство. Положим*

$$\mathcal{A} := L^\infty(\Omega, \mu) \qquad \text{и} \qquad \tau(\xi) := \mathbb{E}(\xi) = \int\limits_{\Omega} \xi(\omega) d\mu(\omega). \tag{4.1}$$

В качестве операции $*$ можно взять просто комплексное сопряжение. Вместо $L^\infty(\Omega, \mu)$ также можно использовать

$$\mathcal{A} := L^{\infty-}(\Omega, \mu) = \bigcap_{1 \leqslant p \leqslant \infty} L^p(\Omega, \mu).$$

Пример 4.5. *Пусть $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{C})$ — алгебра комплексных матриц $n \times n$, на которой операцией $*$ является транспонирование с комплексным сопряжением: $M^* = M^\dagger$. Тогда вместе с функционалом*

$$\tau(M) = \frac{1}{n} \operatorname{Tr} M$$

она превращается в $*$-вероятностное пространство.

Пример 4.6. *Это обобщение двух предыдущих примеров: мы задаём алгебру $\mathcal{A}$, операцию $*$ и функционал τ как*

$$\mathcal{A} := M_n\big(L^{\infty-}(\Omega, \mu)\big), \qquad M^* := M^\dagger \qquad \text{и} \qquad \tau(M) := \frac{1}{n} \mathbb{E}\big(\operatorname{Tr} M\big). \tag{4.2}$$

4.2 Моменты и свободная независимость

Пусть $x \in \mathcal{A}$ – элемент некоммутативного вероятностного пространства $\{\mathcal{A}, \tau\}$. Так же как и в обычной теории вероятности, определим моменты случайной величины

$$\mu_n(x) := \tau(x^n), \tag{4.3}$$

или в более общем случае смешанные моменты нескольких случайных величин $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{A}$.

$$\mu_n(x_1, \dots, x_n) := \tau(x_1 \cdots x_n). \tag{4.4}$$

Хотя в обычной теории вероятности моменты не всегда определяют случайные величины, в некоммутативном вероятностном пространстве мы будем отождествлять набор (смешанных) моментов с распределением случайной величины (случайных величин).

Ключевым понятием некоммутативной теории, аналогичным независимости в коммутативном случае, будет понятие свободной независимости. Для дальнейшего удобства введем обозначение

$$[k] := \{1, \dots, k\} \tag{4.5}$$

для естественно упорядоченного множества первых k натуральных чисел.

Определение 4.7. *Пусть $\{\mathcal{A}, \tau\}$ — некоммутативное вероятностное пространство. Подалгебры с единицей $\{\mathcal{A}_i \in \mathcal{A}, i \in [n]\}$ алгебры $\mathcal{A}$ называются свободно независимыми, если для любого набора $\{a_1, \dots, a_k\}$ из $k \in \mathbb{N}$ случайных величин, такого что $a_i \in \mathcal{A}_{j(i)}, i \in [k]$, для некоторого отображения $j : [k] \to [n]$, удовлетворяющего условию и $j(i) \neq j(i+1), i \in [k-1]$, из равенств*

$$\tau(a_i) = 0, \quad \text{для всех} \quad i \in [k] \tag{4.6}$$

следует равенство

$$\tau(a_1 \cdots a_k) = 0. \tag{4.7}$$

Также случайные величины $a_1, \dots, a_k \in \mathcal{A}$ называются свободно независимыми, если подалгебры многочленов $\mathcal{A}_i = \mathbb{C}\langle 1, a_i \rangle, i \in [k]$, порожденные каждой из них, свободно независимы.

Пример 4.8. *Очевидно, независимость и свободная независимость — это разные вещи. Пусть, например, X, Y — обычные (коммутативные) независимые случайные величины с нулевым математическим ожиданием, но ненулевой дисперсией:*

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = 0, \qquad \mathbb{D}(X) = \mathbb{D}(Y) = \sigma^2 \neq 0.$$

Тогда легко видеть, что равенство

$$\mathbb{E}(XYXY) = \mathbb{E}(X^2) \cdot \mathbb{E}(Y^2) = \sigma^4 \neq 0$$

противоречит определению 4.7.

Следующие два утверждения объясняют в каких случаях классическая независимость и свободная независимость встречаются.

Предложение 4.9. *Пусть* $(\mathcal{A}, *, \tau)$ *— $*$-некоммутативное вероятностное пространство с точным функционалом τ, и пусть $x, y \in \mathcal{A}$ его свободно независимые самосопряженные случайные величины, коммутирующие между собой, $x = x^*, y = y^*$ и $xy = yx$. Тогда по меньшей мере одна из величин – константа,*

$$x = \tau(x) \cdot 1, \quad \textit{или/и} \quad y = \tau(x) \cdot 1. \tag{4.8}$$

Доказательство. Благодаря коммутативности, можно вычислить $\tau(xyxy)$ двумя способами.

$$\begin{aligned}\tau(xyxy) &= \tau(x^2y^2) = \tau(x^2)\tau(y^2) \\ \tau(xyxy) &= \tau(x^2)\tau(y)^2 + \tau(y^2)\tau(x)^2 - \tau(x)^2\tau(y)^2.\end{aligned} \tag{4.9}$$

Вычитая одно уравнение из другого придем к

$$(\tau(x^2) - \tau(x)^2)(\tau(y^2) - \tau(y)^2) = 0. \tag{4.10}$$

Хотя бы одна из скобок должна равняться нулю. Например

$$0 = \tau(x^2) - \tau(x)^2 = \tau(x^2) - 2\tau(x\tau(x)) + \tau(x)^2 = \tau((x - \tau(x))^2) = \tau((x - \tau(x) \cdot 1)(x - \tau(x) \cdot 1)^*) \tag{4.11}$$

Так как функционал τ — точный,

$$x = \tau(x) \cdot 1. \tag{4.12}$$

□

Таким образом в случае $*$-пространства с точным τ свободная независимость плюс коммутативность, имеет место только для констант, которые независимы от всего в классическом смысле. Свободная независимость констант от всего также имеет место, причем в более общем случае произвольного вероятностного пространства.

Предложение 4.10. *Константы свободно независимы от всего*

Доказательство. Утверждение следует из того, что для любой константной случайной величины $a \in \mathbb{C} \cdot 1$ из $\tau(a) = 0$ следует $a = 0$. Очевидно произведение с таким сомножителем также зануляется. □

Хотя, как было замечено, понятия свободной и классической независимости не совпадают, некоторые специфичные для независимости случайных величин факты распространяются и на свободную независимость. Например, смешанные моменты нескольких коммутативных независимых случайных величин факторизуются в произведение моментов каждой из них. В более общем случае, когда некоторые из величин взаимно зависимы, результат разваливаются на моменты произведений только взаимно зависимых величин.

Аналогично, смешанные моменты набора случайных величин из свободно независимых подалгебр также можно записать в терминах моментов отдельных наборов, ассоциированных с каждой из свободно независимых подалгебр.

Предложение 4.11. *Пусть* $\{\mathcal{A}, \tau\}$ *— некоммутативное вероятностное пространство,* $\{\mathcal{A}_i \in \mathcal{A}, i \in [n]\}$ *— набор его свободно независимых подалгебр и* $\mathcal{B} = \mathrm{alg}(\bigcup_{i\in[n]} \mathcal{A}_i)$ *— подалгебра образованая всеми подалгебрами* $\{\mathcal{A}_i \in \mathcal{A}, i \in [n]\}$*. Тогда ограничение* $\tau|_{\mathcal{B}}$ *функционала* τ *на* $\mathcal{B}$ *однозначно определяется ограничениями* $\tau|_{\mathcal{A}_i}$ *и условием свободной независимости.*

Доказательство. Рассмотрим произведение $a_1 \cdots a_k \in \mathcal{B}$, такое что $a_i \in \mathcal{A}_{j(i)}$ для некоторого отображения $j : [k] \to [n]$, такого что $j(i) \neq j(i+1), i \in [k-1]$. Мы хотим показать, что $\tau(a_1 \cdots a_k)$ записывается через $\tau|_{\mathcal{A}_i}$, т.е. через значения функционала τ вычисленные на элементах подалгебр $\{\mathcal{A}_i \in \mathcal{A}, i \in [n]\}$. Доказательство проводится по индукции. Для $k = 1$ утверждение очевидно верно. Введем обозначение

$$a^\circ = a - \tau(a) \cdot 1 \tag{4.13}$$

для сдвижки случайной величины $a \in \mathcal{A}$ на элемент кратный единичному, для которой верно $\tau(a^0) = 0$. Тогда имеем

$$\tau(a_1 \cdots a_k) = \tau\left((a_1^\circ + \tau(a_1) \cdot 1) \cdots (a_k^\circ + \tau(a_k) \cdot 1)\right) = \tau(a_1^\circ \cdots a_k^\circ) + \dots. \tag{4.14}$$

Первое слагаемое в правой части этого выражения равно нулю по свойству свободной независимости, а последующие слагаемые, собранные под многоточием, содержат лишь значения функционала τ, вычисленные на произведении меньшего чем k числа множителей из свободно независимых подалгебр, которые по предположению записываются через значения τ на элементах подалгебр $\{\mathcal{A}_i \in \mathcal{A}, i \in [n]\}$. □

Мы увидели, что смешанные моменты произвольного набора некоммутативных случайных величин записываются в терминах моментов его свободно независимых поднаборов. Используя рецепт доказательства предложения 4.11 можно привести явные примеры такой записи.

Пример 4.12. *Пусть* $(\mathcal{A}, \tau)$ *некоммутативное вероятностное пространство и* $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathcal{A}$ *такие случайные величины, что подалгебры образованные наборами* $\{a_1, a_2, 1\}$ *и* $\{b_1, b_2, 1\}$ *свободно независимы. Тогда*

$$\begin{aligned}
\tau(a_1 a_2) &= \tau((a_1^\circ + \tau(a_1))(a_2^\circ + \tau(a_2))) = \tau(a_1)\tau(a_2) && (4.15)\\
\tau(a_1 b_1 a_2) &= \tau(a_1 a_2)\tau(b_1) && (4.16)\\
\tau(a_1 b_1 a_2 b_2) &= \tau(a_1 a_2)\tau(b_1)\tau(b_2) + \tau(a_1)\tau(a_2)\tau(b_1 b_2) - \tau(a_1)\tau(a_2)\tau(b_1)\tau(b_2) && (4.17)
\end{aligned}$$

Упражнение 4.13. *Докажите формулы (4.16,4.17).*

Отличие формул (4.15,4.16) от формулы (4.17) в том, что первые две факторизуются в простое произведение, а третья записывается в виде суммы произведений. Это не случайно. Экспериментируя с бóльшими произведениями можно подметить простую закономерность, формулируемую в терминах разбиений.

Пусть $a_1, \dots, a_k \in \mathcal{A}$ — набор случайных величин. Разобьем его на блоки в соответствии с принадлежностью сомножителей к подалгебрам из некоторого набора $(A_i)_{i\in[n]}$ свободно независимых подалгебр: $a_i \in \mathcal{A}_{j(i)}, i \in [k]$. Соответствующее разбиение $\pi = (V_1, \dots, V_{|\pi|})$, множества $[k] = V_1 \sqcup \dots \sqcup V_{|\pi|}$, определяется отображением $j : [k] \to [n]$:

$$i \sim_\pi l, \quad \text{если} \quad j(i) = j(l), \quad i, l \in [k]. \tag{4.18}$$

Будем писать $\pi = \ker(j) := [k]/\sim$.

Определение 4.14. *Разбиение π называется перекрестным, если найдутся номера $i_1 < l_1 < i_2 < l_2$, такие что*

$$j(i_1) = j(i_2) \neq j(l_1) = j(l_2). \tag{4.19}$$

В противном случае π — неперекрестное разбиение.

Введем обозначения $\mathcal{P}(k)$ для множества всех разбиений множества $[k]$ и $NC(k)$ для его подмножества неперекрестных разбиений. Простая структура формул (4.15,4.16) происходит из следующего очевидного, но важного свойства неперекрестных разбиений.

Утверждение 4.15. *Пусть $\pi \in NC(k)$ — неперекрестное разбиение. Тогда в нем существует хотя бы один блок $V = \{l, \dots, l+m\}$ для некоторых $l \in [k]$ и $0 \le m \le k-l$, между элементами которого нет элементов из других блоков, т.е. $j(l) = \dots = j(l+m) \neq j(s)$ для любого $s \in [k]\backslash V$.*

Поскольку, таким образом, произведение $a_l \cdots a_{l+m}$ свободно независимо от всех остальных сомножителей, в силу мультилинейности выражения $\tau(a_1 \cdots a_k)$ по сомножителям аргумента и предложения 4.11 оно войдет в выражение для $\tau(a_1 \cdots a_k)$ только через сомножитель $\tau(a_l \cdots a_{l+m})$. Разбиение оставшееся после удаления болка V снова неперекрестное. Повторяя это рассуждение до исчерпания всего набора $a_1, \dots, a_k$ приходим к утверждению.

Утверждение 4.16. *Пусть $\{\mathcal{A}, \tau\}$ — некоммутативное вероятностное пространство, $a_1, \dots, a_k \in \mathcal{A}$ — случайные величин из набора $(\mathcal{A}_i)_{i\in[n]}$ свободно независимых подалгебр алгебры $\mathcal{A}$, $a_i \in \mathcal{A}_{j(i)}, i \in [k]$, причем отображение $j : [k] \to [n]$ таково, что $\pi = \ker(j) \in NC(k)$ — неперекрестное разбиение. Тогда имеет место равенство.*

$$\tau(a_1 \cdots a_k) = \tau_\pi(a_1, \dots, a_k) := \prod_{V\in\pi} \tau\left(\overrightarrow{\prod_{i\in V}} a_i\right), \tag{4.20}$$

где стрелка над произведением подразумевает, что случайные величины входят в произведение в таком же порядке, как в произведении в левой части.

В случае, когда π — перекрестное разбиение структура правой части более сложная. Она имеет вид суммы по неперекрестным разбиениям, и ее общая структура не очевидна.

4.3 Некомутативная центральная предельная теорема.

С построенным инструментарием можно сформулировать аналоги утверждений классической теории вероятности о сходимости некоммутативных случайных величин. Для этого мы сначала определим понятие сходимости в некоммутативном случае.

Определение 4.17. *Пусть $((\mathcal{A}_n, \tau_n))_{n\in\mathbb{N}}$ и $(\mathcal{A}, \tau)$ - набор некоммутативных вероятностных пространств. Пусть $\{a_k \in \mathcal{A}_k, k \in \mathbb{N}\}$ — последовательность случайных величин. Мы говорим, что последовательность $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ сходится по распределению (или в смысле моментов) к величине $a \in \mathcal{A}$,*

$$a_k \xrightarrow[k\to\infty]{} a \tag{4.21}$$

тогда и только тогда, когда

$$\lim_{k\to\infty} \tau_k(a_k^n) = \tau(a^n) \quad \text{для всех} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4.22}$$

Замечание 4.18. *Также можно рассматривать некоммутативные случайные величины, которые в свою очередь являются функциями на некотором классическом вероятностном пространстве, как например случайные матрицы, подразумевая что их моменты являются измеримыми функциями на этом пространстве. Тогда имеет смысл говорить о различных модах сходимости: в среднем, по вероятности, почти наверное и т.д., по аналогии со слабой сходимостью случайных мер, обсуждавшейся выше.*

Как будет ясно далее, в некоммутативном случае роль нормальной случайной величины из классической ЦПТ будет играть полукруговая случайная величина.

Определение 4.19. *Пусть $(\mathcal{A}, \tau)$ — некоммутативное вероятностное пространство. Случайная величина $a \in \mathcal{A}$ называется полукруговой случайной величиной, $a \sim SC(\sigma)$, если для некоторого $\sigma \in (0, +\infty)$*

$$\tau(a^n) = \sigma^n \begin{cases} C_k, & n = 2k \in 2\mathbb{N} \\ 0, & n \in 2\mathbb{N} - 1 \end{cases}, \tag{4.23}$$

где $C_k = \frac{1}{k+1} C_{2k}^k$ — числа Каталана. Если $\sigma = 1$ мы говорим о стандартной полукруговой случайной величине $SC(1) := SC$.

Данное определение отсылает нас к полукруговому закону Вигнера, моменты которого совпадают с моментами стандартной полукруговой случайной величины в некоммутативном пространстве. Более тесную связь некоммутативных случайных величин с классическими вероятностными мерами мы обсудим несколько позже. Теперь чформулируем некоммутативный аналог ЦПТ вместе с классическим коммутативным аналогом.

Теорема 4.20. *Пусть (A, τ) – некоммутативное вероятностное пространство и $(a_n \in \mathcal{A})_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность свободно независимых (коммутирующих и независимых) одинаково распределенных случайных величин, таких что*

$$\begin{aligned} \tau(a_k) &= 0, \tau(a_k^2) = \sigma^2, & (4.24)\\ \tau(a_k^n) &= \tau(a_{k'}^n) \quad \text{для любых} \quad k, k', n \in \mathbb{N} \quad \text{и} \quad \sup_{n,k\in\mathbb{N}} \tau(a_k^n) < \infty. & (4.25) \end{aligned}$$

Тогда случайная величина

$$S_n = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{\sqrt{n}}$$

сходится по распределению к полукруговой (нормальной) случайной величине.

$$S_n \xRightarrow[n\to\infty]{} SC(\sigma) \quad (S_n \xRightarrow[n\to\infty]{} \mathcal{N}(0, \sigma)). \tag{4.26}$$

Доказательство. Вычислим момент случайной величины S_n порядка k.

$$\begin{aligned} \tau(S_n^k) &= n^{-\frac{k}{2}} \tau\left((a_1 + \cdots + a_n)^k\right) & (4.27)\\ &= n^{-\frac{k}{2}} \sum_{\{j:[n]\to[k]\}} \tau(a_{j(1)} \cdots a_{j(k)}) \\ &= n^{-\frac{k}{2}} \sum_{\pi\in\mathcal{P}(k)} \sum_{\{j:[n]\to[k] | \ker(j)=\pi\}} \tau(a_{j(1)} \cdots a_{j(k)}) \end{aligned}$$

Здесь мы сначала раскрыли скобки в k-той степени суммы, превратив ее в сумму произведений из k сомножителей каждое, а потом в сумме по всем наборам $j(1),\dots,j(k)$ из k индексов явно выделили суммирование по наборам, соответствующим одинаковым разбиениям ее на блоки с одинаковыми номерами. Заметим, что так как случайные величины a_k одинаково распределены, значение $\tau(a_{j(1)}\cdots a_{j(k)})$ зависит только от разбиения $\pi=\ker(j)$. Поэтому внутреннюю сумму можно немедленно вычислить,

$$\tau(S_n^k)=n^{-\frac{k}{2}}\sum_{\pi\in\mathcal{P}(k)}A_n^{|\pi|}g(\pi). \tag{4.28}$$

В этом выражении $A_n^{|\pi|}=n(n-1)\cdots(n-|\pi|+1)$ — число способов выбрать $|\pi|$ из n номеров входящих в болки разбиения $\pi=(V_1,\dots,V_{|\pi|})$, а функция разбиения $g(\pi)=\tau(a_{j(1)}\cdots a_{j(k)})$ для любого набора $j:[k]\to[n]$, соответствующего разбиению π. При больших n, $A_n^{|\pi|}\asymp n^{|\pi|}$, тогда как $g(\pi)$ от n не зависит. Поэтому в сумме (4.28) выживают только слагаемые, соответствующие разбиениям из

$$|\pi|\geq k/2 \tag{4.29}$$

блоков. С другой стороны, если в разбиении есть хотя бы один блок из одного элемента, например $V_1=\{1\}$, то и в свободно независимом и в коммутативно независимом случаях будем иметь

$$\tau(a_1a_{j(2)}\cdots a_{j(k)})=\tau(a_1)\tau(a_{j(2)}\cdots a_{j(k)})=0. \tag{4.30}$$

Поэтому все блоки состоят минимум из двух элементов, откуда следует

$$|\pi|\leq\lfloor k/2\rfloor.$$

Сопоставляя это с (4.29) имеем

$$\tau(S_n^k)\xrightarrow[n\to\infty]{}\begin{cases}\sum_{\pi\in\mathcal{P}_2(k)}g(\pi), & k\in 2\mathbb{N},\\ \quad 0, & k\in 2\mathbb{N}-1,\end{cases} \tag{4.31}$$

где выжившие разбиения $\pi\in\mathcal{P}_2(k)$ — состоят из блоков размером два, то есть образуют множество попарных разбиений или парасочетаний.

До сих пор мы не делали разницы между случаями свободно независимых и коммутативных и независимых случайных величин. Эта разница проявляется лишь при вычислении функции $g(\pi)$. Для коммутативных и независимых случайных величин и $\pi\in\mathcal{P}_2(k)$ с имеем

$$g(\pi)=\prod_{V\in\pi}\tau(a_V^2)=\sigma^k,\quad k\in 2\mathbb{N} \tag{4.32}$$

Для свободно независимых случайных величин, воспроизводя рассуждения приведшие нас к утверждению 4.16, можно расфакторизовать $\tau(a_{j(1)}\cdots a_{j(k)})$ на взаимно свободные и взаимно неперекрестные части. Оставшиеся перекрестные части, будучи парасочетаниями, состоят из чередующихся свободно независимых величин с нулевым средним, и, следовательно, зануляются всегда, кроме случаев, когда исходные разбиения не содеожат перекрестных подразбиений, т.е. сами неперекрёстны. В последнем случае согласно формуле (4.20) снова имеет место формула (4.32). В итоге при четных k имеют место формулы

$$\tau(S_n^k)\xrightarrow[n\to\infty]{}\sigma^k|\mathcal{P}_2(k)|=\sigma^k(k-1)!!, \tag{4.33}$$

для коммутативных независимых случайных величин и

$$\tau(S_n^k) \xrightarrow[n\to\infty]{} \sigma^k |NC_2(k)| = \sigma^k C_{k/2}. \tag{4.34}$$

для некоммутативных свободно независимых случайных величин, что доказывает оба утверждения теоремы. □

4.4 Свободные кумулянты и неперекрестные разбиения.

Как мы уже обсуждали в главе 1 в обычной теории вероятности для вычислений (например при выводе ЗБЧ и ЦПТ) вместо моментов зачастую лучше подходят кумулянты – также полилинейные функционалы от случайных величин, обладающие, однако, свойством аддитивности, по отношению к сложению независимых случайных величин. Совместные моменты набора из $n \in \mathbb{N}$ случайных величин связаны с кумулянтами формулой (1.18) через суммирование по множеству $\mathcal{P}(n)$ разбиений множества $[n]$. В предыдущем разделе мы видели пример того, что там, где в обычной теории вероятности возникали разбиения, в теории свободной вероятности появились неперекрестные разбиения. Оказывается, эта аналогия распространяется и дальше и играет ключевую роль в комбинаторике свободной вероятности.

Определение 4.21. *Пусть $(\mathcal{A}, \tau)$ – вероятностное пространство. Для любого $n \in \mathbb{N}$ момент $\mu_n : \mathcal{A}^n \to \mathbb{C}$ порядка n это полилинейный функционал n случайных величин, такой что для $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{A}$*

$$\mu_n(a_1, \ldots, a_n) = \tau(a_1 \cdots a_n). \tag{4.35}$$

Далее для определения кумулянтов мы воспользуемся аналогом соотношения (1.18), связывающего моменты и кумулянты в обычной теории вероятности. Далее мы определим совместные свободные кумулянты как семейство $\{\kappa_n : \mathcal{A}^n \to \mathbb{C}\}_{n\in\mathbb{N}}$ полилинейных функционалов, а также их мультипликативные обобщения

$$\kappa_\pi(a_1, \ldots, a_n) := \prod_{I\in\pi} \kappa_{|I|}(a_I) \tag{4.36}$$

индексированные неперекрестными разбиениями $\pi \in NC(n)$ множества $[n]$. Здесь произведение в правой части по всем блокам разбиения π, а $a_I = (a_{i_1}, \ldots, a_{i_{|I|}})$ – поднабор набора $(a_1, \ldots, a_n)$, соответсвующий одному из блоков разбиения π. Кумулянт $\kappa_n(a_1, \ldots, a_n)$ дает частный случай такого мультипликативного обобщения, соответствующий разбиению из одного блока $I = [n]$, которое обычно обозначается $\pi = 1_n$.

Определение 4.22. *Пусть $\{\mu_n : \mathcal{A}^n \to \mathbb{C}\}_{n\in\mathbb{N}}$ – семейство совместных моментов, определенных формулой (4.35). Тогда семейство $\{\kappa_n : \mathcal{A}^n \to \mathbb{C}\}_{n\in\mathbb{N}}$ совместных свободных кумулянтов и их мультипликативные версии (4.36) однозначно определяются соотношениями*

$$\mu_n(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{\pi\in NC(n)} \kappa_\pi(a_1, \ldots, a_n). \tag{4.37}$$

Для обоснования того, что это определение непротиворечиво и однозначно обсудим сначала некоторые свойства неперекрестных разбиений. Во первых на множестве $NC(n)$ можно ввести частичный порядок.

Определение 4.23. *Пусть $\pi, \sigma \in NC(n)$ – неперекрестные разбиения. Соотношение*

$$\pi \leq \sigma$$

имеет место тогда и только тогда, когда любой блок из π содержится в каком либо блоке σ.

В частности, любых двух разбиений $\pi, \sigma \in NC(n)$ можно всегда найти наименьшую верхнюю, $\pi \vee \sigma$, и наибольшую нижнюю, $\pi \wedge \sigma$, границы. (Это можно сделать простым наложением картинок разбиений. Формальное доказательство мы оставляем читателю.)

Еще одно важное, хотя и очевидное, свойство состоит в том, что дальнейшее разбиение неперекрестного разбиения неперекрестно тогда и только, когда разбиение каждого ее блока неперекрестно.

Утверждение 4.24. *Пусть $\pi = (V_1, \dots, V_k) \in NC[n]$ – неперекрестное разбиение множества $[n]$, и $\pi_i \in \mathcal{P}(V_i), i = 1, \dots, k$ - дальнейшие разбиения ее блоков. Тогда разбиение $\bigcup_{i=1}^k \pi_i$ неперекрестно (относительно линейного порядка в $[n]$) тогда и только тогда, когда каждое из разбиений π_i неперекрестно.*

Теперь мы можем вернуться к обоснованию определения свободных кумулянтов.

Лемма 4.25. *Определение (4.22) однозначно и непротиворечиво.*

Доказательство. Сначала дополним частичный порядок на множестве $NC(n)$ неперекрестных разбиений множества $[n]$ до полного порядка и по аналогии с (4.36)) определим совместные моменты, индексированные элементами $NC(n)$.

$$\mu_\pi(a_1, \dots, a_n) := \prod_{I \in \pi} \mu_{|I|}(a_I). \tag{4.38}$$

Тогда исходя из утверждения 4.24, для таких моментов будем иметь.

$$\mu_\pi = \sum_{\{\sigma \in NC(n) : \sigma \leq \pi\}} \kappa_\sigma. \tag{4.39}$$

Мы получили линейную систему $|NC(n)|$ уравнений на кумулянты κ_σ, заданную верхнетреугольной матрицей с единицами на диагонали. Очевидно такая система всегда имеет единственное решение. В том, что κ_π согласуется с формулой (4.36)) можно убедиться по индукции. □

Как отмечалось в главе 1 в коммутативном случае совместные кумулянты независимых случайных величин равны нулю. Аналогичным свойством обладают и свободные кумулянты в некоммутативном пространстве по отношению к свободной независимости.

Теорема 4.26. *Пусть $(\mathcal{A}, \tau)$ – некоммутативное вероятностное пространство, а $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k \subset \mathcal{A}$ – его подалгебры. Тогда чтобы $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_m$ были свободно независимы необходимо и достаточно, чтобы все кумулянты включающие элементы из разных подалгебр были равны нулю, т.е. для любого $n \leq 2$ и $j : [n] \to [k]$, такого что $j(l) \neq j(k)$ для некоторых $1 \leq l \neq k \leq n$, и любых $a_1, \dots, a_k$, таких что $a_i \in \mathcal{A}_{j(i)}, i = 1, \dots, k$,*

$$\kappa_n(a_1, \dots, a_n) = 0. \tag{4.40}$$

Доказательство. Сначала докажем достаточность. Пусть $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{A}$,, любые центрированные случайные величины, $\tau(a_i) = 0$, такие что $a_i \in A_{j(i)}$ для всех $i \in [n]$, причем отображение $j : [n] \to [k]$ таково, что

$$j(i) \neq j(i+1), i = 1, \ldots, n-1. \tag{4.41}$$

Предположим, что смешанные кумулянты зануляются. Выпишем формулу (4.37) для связи между моментами и кумулянтами. Из-за (4.41), в сумму в правой части дают вклад только те слагаемые, которые соответствуют разбиениям $\pi \in NC(n)$, где ни в одном блоке нет двух соседних индексов, например $\{i, i+1\}$. Однако в силу утверждения 4.15, должен быть хотя бы один блок, состоящий только из индексов идущих подряд. В нашем случае такой блок может состоять только из одного индекса, и даёт множитель $\kappa_1(a_i) = 0$, зануляющий все оставшиеся слагаемые. Достаточность доказана

Доказательство необходимости будет состоять из рассмотрения нескольких частных случаев, которые далее приведут нас к общему утверждению.

Как мы заметили раньше в предложении 4.10 константы свободны от всего. Поэтому наличие единицы среди случайных величин в кумулянте должно очевидно должно приводить к его занулению.

Лемма 4.27. *Пусть в условиях теоремы $a_i = 1$ для некоторого $i \in [n]$. Тогда*

$$\kappa_n(a_1, \ldots, a_n) = 0, n \geq 2 \tag{4.42}$$

Доказательство. Пусть $a_1 = 1$. Для $n = 2$ имеем

$$\kappa_2(a_1, a_2) = \mu_2(a_1, a_2) - \mu_1(a_1)\mu_1(a_2) = 0. \tag{4.43}$$

То есть в этом случае утверждение справедливо. Используем это как базу индукции и предположим, что утверждение леммы справедливо для κ_{n-1}. Тогда для κ_n будем иметь

$$\kappa_n(a_1, \ldots, a_n) = \mu_n(a_1, \ldots, a_n) - \sum_{\pi \in NC(n), \pi \neq 1_n} \kappa_\pi(a_1, \ldots, a_n) = \mu_n(a_1, \ldots, a_n) \tag{4.44}$$

Заметим, что согласно гипотезе, ненулевые слагаемые в сумме соответствуют разбиениям, в которых единица находится в отдельном блоке, т.е. входит в кумулянт через множитель $\kappa_1(1) = \tau(1) = 1$. Очевидно остальные множители дают сумму по $NC(n-1)$ и суммируются в $\mu_{n-1}(a_2, \ldots, a_n) = \tau(a_2 \cdots a_n) = \tau(1 \cdot a_2 \cdots a_n) = \mu_n(a_1, \ldots, a_n)$, что дает утверждение леммы. □

Следствие 4.28.

$$\kappa_n(a_1, \ldots, a_n) = \kappa_n(a_1 - \tau(a_1), \ldots, a_n - \tau(a_1)), n \geq 2, \tag{4.45}$$

т.е. достаточно рассматривать центрированные случайные величины.

Теперь предположим, что $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_k$ – свободно независимы и рассмотрим частный случай, когда никакая пара соседних элементов не принадлежит одной той же подалгебре.

Лемма 4.29. *Пусть в условиях теоремы $j(i) \neq j(i+1), i \in [n-1]$. Тогда выполнено соотношение (4.40).*

Доказательство.

$$\begin{aligned} 0 = \tau(a_1 - \tau(a_1), \dots, a_n - \tau(a_n)) &= \sum_{\pi \in NC(n)} \kappa_\pi(a_1 - \tau(a_1), \dots, a_n - \tau(a_n)) \\ &= \kappa_n(a_1, \dots, a_n) + \sum_{\left\{\begin{matrix} \pi = (V_1, \dots, V_k) \in NC(n) : \\ \pi \neq 1_n; |V_i| \geq 2; 1 \leq i \leq k \leq n \end{matrix}\right\}} \kappa_\pi(a_1, \dots, a_n) \end{aligned}$$

где во втором равенстве мы явно опустили нулевые слагаемые соответствующие разбиениям, содержащим одинарный блок, дающий множитель $k_1(a_1 - \tau(a_i)) = 0$, воспользовались следствием 4.28 и явно выделили слагаемое соответствующее $\pi = 1_n$. Далее доказательство проводится по индукции. Для $n = 2$ суммы нет, и утверждение леммы очевидно выполнено. Предположив, что это утверждение верно для κ_i с $2 \leq i \leq n-1$, заметим, что согласно утверждению 4.24 в любом слагаемом под знаком суммы найдется множитель $\kappa_m(a_i, \dots, a_{i+m-1})$ с $2 \leq m < n$, равный нулю по принятой гипотезе. Отсюда следует утверждение леммы. □

Еще одна лемма позволит построить шаг индукции для доказательства необходимости.

Лемма 4.30. *Пусть* $\eta \in NC(n-1)$, $\eta^{i \to \{i,i+1\}} \in NC(n)$ *– разбиение множества* $[n]$ *получающееся из* η *заменой* $i \to \{i, i+1\}$ *и* $\sigma = (1, \dots, i-1, \{i, i+1\}, i+2, \dots, n) \in NC(n)$ *– разбиение множества* $[n]$*, в котором все блоки одинарны, кроме одного* $V_i = \{i, i+1\}$*. Тогда*

$$\kappa_\eta(a_1, \dots, a_i a_{i+1}, \dots, a_n) = \sum_{\{\pi \in NC(n) : \pi \vee \sigma = \eta^{i \to \{i,i+1\}}\}} \kappa_\pi(a_1, \dots, a_n). \tag{4.46}$$

Разбиение $\pi \vee \sigma$ *– наименьшая верхняя грань разбиений* $\pi, \sigma \in NC$*, т.е. наименьшее разбиение, блоки которого содержат блоки обеих разбиений* π *и* σ*. Суммирование идет по таким разбиениям* $\pi \in NC(n)$*, которые либо совпадают с* $\eta^{i \to \{i,i+1\}}$*, либо превращаются в нее соединением двух разных блоков содержащих* i *и* $i+1$ *по отдельности.*

Доказательство. Равенство доказывается суммированием правой и левой части равенства (4.46) по $\eta \leq \zeta \in NC(n-1)$. Согласно (4.37) слева будем иметь $\mu_\zeta(a_1, \dots, a_i a_{i+1}, \dots, a_n)$. Соответственно справа двойная сумма превратится в суммировани по $NC(n) \ni \pi \leq \zeta^{i \to \{i,i+1\}}$, что даст $\mu_{\zeta^{i \to \{i,i+1\}}}(a_1, \dots, a_n)$. Очевидно эти величины равны, что доказывает лемму. □

Наконец мы можем закончить доказательство необходимости. Для $n = 2$ оно следует из леммы 4.29. Предположим оно верно и для кумулянтов κ_i с $2 \leq i \leq n-1$. Так как для случая $j(i) \neq j(i+1), i = 1, \dots, n-1$ требуемое утверждение следует из леммы 4.29, предположим $j(i) = j(i+1)$ для некоторого $i \in [n-1]$, и запишем формулу (4.46) для специального случая $\eta = 1_{n-1}$.

$$\kappa_{n-1}(a_1, \dots, a_i a_{i+1}, \dots, a_n) = \kappa_n(a_1, \dots, a_n) + \sum_{\{\pi \in NC(n) : \pi \vee \sigma = 1_n; \pi \neq 1_n\}} \kappa_\pi(a_1, \dots, a_n). \tag{4.47}$$

В правой части мы явно выделили слагаемое, соответствующее максимальному разбиению. Левая часть равна нулю по индукции. Сумма же в правой части включает разбиения вида $\pi = V_1, V_2$ из двух блоков содержащих $i \in V_1$ и $i+1 \in V_2$ по по отдельности, значение функции $j : [n] \to [k]$ не постоянно хотя бы в одном из них. Поэтому, хотя бы один из сомножителей $\kappa_{V_1}, \kappa_{V_2}$ зануляется по сделанному предположению, т.е. и вся сумма, и, как следствие, $\kappa_n(a_1, \dots, a_n)$, что завершает доказательство теоремы. □

Из полученной теоремы следует аддитивность свободных кумулянтов по отношению к свободной независимости.

Следствие 4.31. *Пусть $(\mathcal{A}, \tau)$ – некоммутативное вероятностное пространство и $a, b \in \mathcal{A}$ свободно независимые случайные величины. Тогда*

$$\kappa_n(a+b) = \kappa_n(a) + \kappa_n(b) \tag{4.48}$$

для всех $n \in \mathbb{N}$.

4.5 $*$-вероятностные пространства и вероятностные меры.

Из некоммутативной ЦПТ мы увидели, что в некоммутативных пространствах естественным образом возникают моменты обычных распределений вероятности известных нам из классической теории случайных величин. Насколько это общая ситуация? Какие случайные величины (в классическом смысле) можно встретить в некоммутативной теории в таком контексте?

Так как изначально мы рассматривали некоммутативное пространства над комплексным полем, естественно ожидать, что в общем случае моменты, а следовательно и сами случайные величины будут комплекснозначными. Тем не менее, каждая комплекснозначная случайная величина есть сумма её действительной и мнимой частей, каждая из которых, в свою очередь, представлена чисто вещественной случайной величиной. Поэтому случай вещественнозначных случайных величин в некотором смысле базовый, тогда как комплекснозначный строится на его основе. Поэтому мы в первую очередь обсудим его и лишь слегка затронем общий случай.

Поскольку исходными данными, характеризующими некоммутативные случайные величины, является в нашей (узкой) формулировке набор моментов, уместно поставить следующий вопрос. Пусть задан набор вещественных чисел $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$. При каких условиях существует неотрицательная борелевская мера μ на $\mathbb{R}$, такая что соотношения

$$\mu_n = \int_{\mathbb{R}} x^n d\mu(x), \tag{4.49}$$

выполняются для любого $n \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$. Эта задача известна как проблема Гамбургера. Опишем вкратце ее решение. (При этом мы упомянем несколько фактов из функционального анализа, возможно не знакомых читателю. Поскольку это описание будет служить лишь как мотивация для дальнейшего самозамкнутого изложения, оно не осложнит понимания материала.)

Пусть μ– конечная положительная борелевская мера на $\mathbb{R}$, такая что все ее моменты конечны. Рассмотрим линейное пространство многочленов на $\mathbb{R}$ с комплексными коэффициентами. На этом пространстве матожидание по мере μ задает задает неотрицательно определенную полуторалинейную форму,

$$\langle P, Q\rangle_{L^2(\mathbb{R},\mu)} := \mathbb{E}P^*Q = \int_{\mathbb{R}} P^*(x)Q(x)d\mu(x), \tag{4.50}$$

которая в частности определяет полунорму[1] $||P|| = \sqrt{\langle P, P\rangle_{L^2(\mathbb{R},\mu)}}$. Отфакторизовав полученное пространство по подпространству многочленов с нулевой полунормой и пополнив его по полученной норме мы построим Гильбертово пространство, натянутое на счетный базис мономов $\{x^n\}_{n=0}^{\infty}$. Тогда бесконечная матрица Ганкеля $M = \{\mu_{i+j}\}_{i,j=0}^{\infty}$ – ни что иное как матрица Грамма этого базиса. Не трудно убедиться в том, что любое ограничение этой матрицы размера $n \times n$ на $n \in \mathbb{N}$ первых строчек и столбцов задает неотрицательно определенную квадратичную форму. Это требование к матрице M является необходимым условием существования соответствующей положительной борелевской меры.

Оно же является и достаточным. Чтобы пройти по этому пути в обратную сторону, стартуя с Гильбертового пространства, натянутого на базис с матрицей Грамма M, задающей последовательность положительно определенных квадратичных форм, нужно посмотреть на моменты, как на матричные элементы опрератора умножения на x^n

$$\mu_n = \langle 1, x^n 1\rangle, \tag{4.51}$$

или, что то же самое, оператора сдвига мономных базисных векторов: $x^n : x^m \to x^{n+m}$. Такой оператор очевидно является симметрическим положительным оператором, и может быть расширен до самосопряженного оператора, действие которого, согласно спектральной теореме для ограниченных самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве, задается в терминах интеграла по спектральной мере, а матричные элементы, соответственно, в виде (4.49). Упомянем, что приведенное решение не обеспечивает единственности меры, которая, в свою очередь, гарантируется критерием Карлемана (1.11).

Вопрос который мы хотим выяснить в контексте некоммутативных случайных величин звучит следующим образом. При каких условиях по элементу x некоммутативного вероятностного пространства можно единственным образом построить вероятностную меру μ_x на $\mathbf{R}$, такую что для любого многочлена $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ равенство

$$\tau(P(x)) = \int_{\mathbb{R}} P(z)d\mu_x(z) \tag{4.52}$$

имеет место? В более общем случае этот же вопрос ставится относительно наборов некоммутативных случайных величин, а также относительно вероятностной меры на комплексной плоскости. Ответы на эти вопросы мы оформим в виде набора утверждений, доказательство которых оставим читетелю.

Как мы видели, ключевую роль в решении проблемы Гамбургера играет наличие положительно-определенного скалярного произведения. Такая же возможность имеется и в некоммутативном случае $*$-вероятностного пространства.

Пусть $(\mathcal{A}, *, \tau)$ — $*$-вероятностное пространство. В силу неравенства $\tau(xx^*) \geqslant 0$, справедливого при всех $x \in \mathcal{A}$, функционал $\tau(x)$ задаёт неотрицательно определённую

---

[1] Полунормой называется неотрицательный функционал на элементах линейного пространства, удовлетворяющий аксиомам нормы кроме требования обращения в ноль только на нулевом элементе.

полуторалинейную форму:

$$\langle x, y\rangle_{L_2(\tau)} := \tau(xy^*). \tag{4.53}$$

Эта полуторалинейная форма определяет полунорму

$$\|x\|_{L_2(\tau)} := \sqrt{\langle x, x\rangle_{L_2(\tau)}} \tag{4.54}$$

и удовлетворяет неравенству *Коши-Буняковского-Шварца*

$$\bigl|\langle x, y\rangle_{L_2(\tau)}\bigr| \leqslant \|x\|_{L_2(\tau)} \cdot \|y\|_{L_2(\tau)}. \tag{4.55}$$

Если потребовать, чтобы функционал τ был точным, то полунорма станет нормой. Однако нам это пока не понадобится.

Пусть теперь $x = x^* \in \mathcal{A}$ – самосопряженная случайная величина. Тогда, для моментов величины x справедливы *неравенства Ляпунова*:

$$\bigl|\tau(x^{2k-1})\bigr|^{1/(2k-1)} \leqslant \bigl|\tau(x^{2k})\bigr|^{1/(2k)} \leqslant \bigl|\tau(x^{2k+2})\bigr|^{1/(2k+2)}, \tag{4.56}$$

которые доказываются по индукции, стартуя с (4.55). Из монотонности функции $\bigl|\tau(x^{2k})\bigr|^{1/(2k)}$ по k следует, что существует предел (конечный или бесконечный)

$$\rho(x) = \lim_{k\to\infty} \bigl|\tau(x^{2k})\bigr|^{1/(2k)}. \tag{4.57}$$

В том случае, когда предел, определённый формулой (4.57), конечен, говорят, что элемент x является *ограниченным*, а величину $\rho(x)$ называют его *спектральным радиусом.* Кроме того для всех $k \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство

$$\bigl|\tau(x^k)\bigr| \le \rho(x)^k. \tag{4.58}$$

Пусть x — ограниченный самосопряженный элемент пространства $(\mathcal{A}, *, \tau)$. Тогда для него можно определить аналог *преобразования Стильтьеса*:

$$S_x(z) = \tau\bigl((x-z)^{-1}\bigr) = \frac{-1}{z}\,\tau\left(\frac{1}{1-x/z}\right) = -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\tau(x^k)}{z^{k+1}} \tag{4.59}$$

(указанные в формуле (4.59) выражения нужно читать в обратном направлении, поскольку стоящий справа ряд Лорана имеет ясный смысл, а всё, что находится слева от него, представляет собой определяемые понятия).

Хотя для ограниченных самосопряженных некоммутативных случайных величин можно думать о так определенном преобразовании Ститьеса, как о формальном ряде, важную информацию несет область в которой этот ряд суммируется к аналитической функции: преобразовании Стилтьеса вероятностной (конечной неотрицательной) меры аналитично во всей комплексной плоскости, кроме носителя меры.

В силу (4.57) ряд в правой части (4.59) очевидно сходится в области $|z| > \rho(x)$. Область аналитичности однако можно распространить и внутрь этого диска, вплоть до вещественной оси. Доказательство этого факта состоит из следующих оценок, которые можно сделать, пользуясь неравенствами (4.56) и их следствиями (4.57,4.58).

Упражнение 4.32. *Пусть $x \in \mathcal{A}$ - ограниченная самосопряженная случайная величина, и $r \in \mathbb{R}$. Докажите, что выполняется следующее равенство.*

$$\rho(x^2 + r^2) = \rho(x)^2 + r^2 \tag{4.60}$$

Верхняя оценка следует из неравенства (4.58), нижняя из самосопряженности x, гарантирующей положительность $\tau(x^{2k})$, и неравенства Гельдера.

Упражнение 4.33. *Пусть $x \in \mathcal{A}$ - нормальная самосопряженная случайная величина, $xx^* = x^*x$, такая что самосопряженный элемент xx^* – ограничен. Докажите что*

$$|\tau(x^k)| \leq |\tau\left((xx^*)^k\right)|^{1/2} \leq \rho(xx^*)^{k/2}, \tag{4.61}$$

для любого $k \in \mathbb{N}$.

Отсюда можно видеть, что ряд $S_{x+\mathrm{i}r}(z+ir)$, полученный из определения (4.59) сдвигом переменной переменной и случайной величины на одно и то же чисто мнимое число, сходится в области

$$|z + \mathrm{i}r| > \sqrt{\rho(x)^2 + r^2}. \tag{4.62}$$

Таким образом, тогда как можно проверить, что ряды $S_x(z)$ и $S_{x+\mathrm{i}r}(z+ir)$ в пересечении областей их сходимости совпадают, в пределе $r \to \pm\infty$ неравенство (4.62) гарантирует сходимость второго ряда в $\mathbb{C}^{\pm}$.

С другой стороны продолжить область аналитичности преобразования Стилтьеса на внешность диска меньшего радиуса, чем $\rho(x)$ нельзя.

Упражнение 4.34. *Пусть $x \in \mathcal{A}$ - ограниченная самосопряженная случайная величина. Покажите, что предположение об аналитичности $S_x(z)$ в области $z > \rho(x) - \epsilon$ для $0 < \epsilon < \rho(x)$ приводит к противоречию с неравенством (4.58). (Используйте интегральную формулу Коши для вычисления моментов величины x из ее преобразования Стилтъеса и определение спектрального радиуса (4.57).*

Мы выяснили, что преобразование Стилтьеса $S_x(z)$ самосопряженной ограниченной величины x аналитично в $\mathbb{C}\backslash[-\rho(x), \rho(x)]$. Поэтому естественно ожидать, что носитель полученной меры будет сосредоточен на отрезке вещественной оси $[-\rho(x), \rho(x)]$. Тем не менее нам все еще необходимо убедиться, что коэффициенты полученных рядов действительно являются моментами такой вероятностной меры. Для этого можно было бы пойти по пути, основанному на построении гильбертова пространства, подобному описанному в начале раздела методу решения проблем моментов Гамбургера. Это и есть наиболее правильный метод, который позволяет работать с наборами в том числе и неограниченных некоммутативных случайных величин, и в наиболее общем варианте требует привлечения концепций из теории C^* алгебр или алгебр фон-Неймана (ограниченных операторов в гильбертово пространствах).

Однако в нашем ограниченном случае многочленов от одной случайной величины мы воспользуемся более простым фактом. Покажем, что τ задает ограниченный функционал $\tau : P \to \tau(P(x))$ на пространстве многочленов на компакте $[-\rho(x), \rho(x)]$, который можно продолжить до функционала с единичной операторной нормой $\|\tau\| = 1$ на пространстве $C([-\rho(x), \rho(x)])$ непрерывных функций с нормой

$$\|f\|_{C([-\rho(x),\rho(x)])} = \sup_{x \in [-\rho(x),\rho(x)]} |f(x)|.$$

По теореме Рисса каждый такой функционал представляется в виде интеграла по некоторой вероятностной мере.

Определение 4.35. *Функция* $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ *называется функцией ограниченной вариации на отрезке* $[a,b]$*, если*

$$\mathrm{TV}_{[a,b]}(\alpha) := \sup_{\{a \le x_0 < \dots < x_k \le b; k \in \mathbb{N}\}} \sum_{i=1}^{k} |\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})| < \infty, \tag{4.63}$$

Теорема 4.36. *(Рисс)*

Пусть $A : C([a,b]) \to \mathbb{R}$ *– непрерывный линейный функционал. Тогда существует единственная непрерывная справа функция ограниченной вариации* $\alpha(x)$*,* $\alpha(a) = 0$*, такая что для любой функции* $f \in C([0,1])$ *действие* A *можно представить в виде интеграла Лебега-Стилтьеса*

$$A[f] = \int_a^b f(x) d\alpha(x), \tag{4.64}$$

причем

$$\|A\|_{op} := \sup_{\{f \in C([a,b]) : \|f\| = 1\}} |A(f)| = \mathrm{TV}_{[a,b]}(\alpha). \tag{4.65}$$

Заметим, что непрерывные справа функции ограниченной вариации $\alpha(x)$ на $[a,b]$, такие что $\alpha(a) = 0$, находятся во однозначном соответствии с конечными (знакопеременными) борелевскими мерами на $[a,b]$. В частности если в условии теоремы Рисса $TV_{[a,b]}(\alpha) = 1$ и $A(1) = 1$ одновременно, то α определяет вероятностную меру на $[a,b]$.

Для применения теоремы Рисса к нашей задаче, достаточно показать, что функционал $\tau : P \to \tau(P(x))$, на множестве многочленов ограничен (и потому непрерывен) и имеет единичную опреаторную норму.

Предложение 4.37. *Пусть* $x \in \mathcal{A}$ *– ограниченный самосопряженный элемент. Тогда*

$$|\tau(P(x))| \le \sup_{y \in [-\rho(x), \rho(x)]} |P(y)|. \tag{4.66}$$

Доказательство. Наметим доказательство. В общем случае многочлены от самосопряженных элементов уже не самосопряженные, но всегда нормальные. Поэтому можно свести рассмотрение общего многочлена $P(x)$ к рассмотрению самосопряженного многочлена $P(x)\overline{P(x)}$ и воспользоваться неравенством (4.61). Таким образом, достаточно ограничиться случаем многочленов с вещественными коэффициентами, которые по прежнему ограничены и самосопряжены. Для таких многочленов действует неравенство (4.58),

$$|\tau(P(x)| \le \rho(P(x)). \tag{4.67}$$

Задача состоит в том, чтобы показать, что спектральный радиус $\rho(P(x))$, определяемый как минимальный радиус диска в $\mathbb{C}$ вне которого преобразование Стилтьеса $S_{P(x)}(z)$ аналитично, ограничен выражением в правой части (4.66). Для этого достаточно показать что функцию $S_{P(x)}(z)$ можно представить в виде контурного интеграла

$$S_{P(x)}(z) = \oint_\gamma \frac{S_x(v)}{P(v) - z} \frac{dv}{2\pi \mathrm{i}} \tag{4.68}$$

по любому простому контуру γ в $\mathbb{C}$, замкнутому вокруг отрезка $[-\rho(x), \rho(x)]$, целиком лежащему в области аналитичности $S_x(v)$ и удовлетворяющему условию $|P(v)| < |z|$ для любого $v \in \gamma$. При таком выборе функция $S_{P(x)}(z)$ аналитична в z. Выбирая контур неограниченно близко к отрезку $[-\rho(x), \rho(x)]$, получаем аналитичность в области $|z| > \sup_{y \in [-\rho(x), \rho(x)]} |P(y)|$, что приводит нас к требуемому утверждению. □

Мы убедились в том, что функционал $\tau : P \to \tau(P(x))$ имеет (операторную) норму не превышающую единицу. По теореме Вейерштрасса с пространства полиномов он может быть продолжен до ограниченного (а следовательно непрерывного) функционала на $C([-\rho(x), \rho(x)])$. По теореме Рисса такой функционал определяет единственную функцию $\alpha(x)$ с ограниченной вариацией $TV_{[-\rho(x),\rho(x)]}(\alpha) \leq 1$. Поскольку $\tau(1) = 1$, то эта функция, в свою очередь, задает вероятностную меру на $[-\rho(x), \rho(x)]$. Таким образом мы пришли к спектральной теореме для самосопряженных ограниченных операторов

Теорема 4.38. *Пусть $(\mathcal{A}, *, \tau)$ – $*$-вероятностное пространство и $x \in \mathcal{A}$ его самосопряженный ограниченный элемент. Тогда существует единственная вероятностная мера μ_x на $\mathbb{R}$ с носителем $\operatorname{supp}(\mu_x) \subset [-\rho(x), \rho(x)]$, такая что для любого многочлена $P(x)$ имеет место соотношение (4.52).*

(Здесь будет замечание про произвольные несамосопряженные элементы и наборы случайных величин.)

4.6 R-преобразование

В предыдущем разделе по самосапряженной ограниченной некоммутативной случайной величине мы построили преобразование Стилтьеса, которое является производящей функцией моментов и тем самым может быть использовано для сопоставления этой величине вероятностной меры. Преобразование Стилтьеса – один из инструментов, который может быть использован для доказательства различных утвержений о сходимостях случайных величин таких, как например теоремы Вигнера и Марченко-Пастура.

В классической вероятностной теории доказываются ЗБЧ и ЦПТ, утверждения о предельном поведении сумм большого числа независимых случайных величин. Один из основных инструментов, используемых при этом, – производящая функция кумулянтов. Как и сами кумулянты, она аддитивна по отношению к сложению независимых случайных величин. Эта аддитивность и играет основную роль в доказательстве предельных теорем.

В некоммутативной теории аналогом независимости аддитивных случайных величин выступает свободная независимость, а в качестве аддитивных аналогов кумулянтов– свободных кумулянты. Поэтому представляется целесообразным ввести производящую функцию свободных кумулянтов, которая, в частности, могла бы быть использована для доказательств некоммутативных аналогов предельных теорем. Такой функцией является $R-$преобразование Войкулеску.

Определение 4.39. *Пусть $(\mathcal{A}, *, \tau)$ – $*$-вероятностное пространство, $a \in \mathcal{A}$ его самосопряженный ограниченный элемент, и $\{\kappa_n(a)\}_{n \in \mathbb{N}}$ – его свободные кумулянты. $R-$преобразованием случайной величины a называется производящая функция кумулянтов*

$$R_x(z) = \sum_{n \geq 0} \kappa_{n+1}(a) z^n. \tag{4.69}$$

Этот ряд можно понимать как формальный ряд или, в области значений z где ряд сходится, как аналитическую функцию. Здесь мы в основном ограничимся первым.

Так определенная производящая функция очевидно обладает свойством аддитивности по отношению к сложению свободно независимых случайных величин.

Утверждение 4.40. *Пусть* $(\mathcal{A}, *, \tau)$ – $*$*-вероятностное пространство,* $a, b \in \mathcal{A}$ *его самосопряженные ограниченные элементы. Тогда*

$$R_{a+b}(z) = R_a(z) + R_b(z). \tag{4.70}$$

Можно показать, что сумма ограниченных самосопряженных случайных величин снова ограниченная самосопряженная случайная величина. Значит, как мы выяснили в предыдущем разделе, ей можно поставить в соответствие меру на $\mathbb{R}$. В классической теории вероятности вероятностная мера, описывающая сумму независимых случайных величин, дается сверткой их мер. Соответственно мера, представляющая сумму ограниченных самосопряженных свободно независимых случайных величин, называется свободной сверткой и обозначается через

$$\mu_{a+b} = \mu_a \boxplus \mu_b. \tag{4.71}$$

Тогда как в классической вероятности производящая функция кумулянтов получается из производящей функции моментов простым логарифмированием, рецепт построения $R_a(z)$ из моментов (или из их производящей функции) не пока не очевиден. Оказывается в некоммутативном случае стартовой точкой будет ряд для преобразование Стилтьеса.

$$S_a(z) = -\sum_{n\geq 0} \mu_n(a) z^{-(n+1)}. \tag{4.72}$$

Обратим этот ряд (точнее его со знаком минус). А именно, построим ряд $K_a(z)$, который удовлетворяет соотношению.

$$S_a(K_a(s)) = -s. \tag{4.73}$$

Напомним, что $S_a(z) = -1/z + \dots$ - ряд по отрицательным степеням z, начинающийся с $-1/z$. Следовательно в ряд $K_a(s)$ будет иметь вид

$$K_a(s) = \frac{1}{s} + \sum_{n\geq 1} k_n s^{n-1}. \tag{4.74}$$

Несингулярная его часть и есть производящая функция свободных кумулянтов.

Предложение 4.41. *Пусть* $(\mathcal{A}, *, \tau)$ – $*$*-вероятностное пространство,* $a \in \mathcal{A}$ *его самосопряженный ограниченный элемент,* $R_a(z)$ – *его* R*-преобразование, а* $K_a(z)$ – *ряд полученный обращением* $-S_(z)$. *Тогда*

$$K_a(z) = \frac{1}{z} + R_a(z) \tag{4.75}$$

Доказательство. Введем вспомогательные функции

$$M_a(z) = 1 + \sum_{n\geq 1} z^n \mu_n(a), \quad C_a(z) = 1 + \sum_{n\geq 1} z^n \kappa_n(a). \tag{4.76}$$

Очевидно имеем

$$M_a(z) = -\frac{1}{z} S_a\left(\frac{1}{z}\right). \tag{4.77}$$

Предположим, имеет место равенство

$$C_a(zM_a(z)) = M_a(z). \tag{4.78}$$

Перепишем его в виде

$$C_a\left(-S_a\left(\frac{1}{z}\right)\right) = -\frac{1}{z}S_a\left(\frac{1}{z}\right). \tag{4.79}$$

После замены $1/z \to K_a(s)$ получим

$$C_a(-S_a(K_a(s)))) = -K_a(s)S_a(K_a(s)), \tag{4.80}$$

и воспользовавшись соотношением (4.73) придем к равенству

$$C_a(s) = sK_a(s), \tag{4.81}$$

из которого следует, что

$$k_n = \kappa_n(a), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{4.82}$$

Что доказывает утверждение предложения.

Осталось доказать равенство (4.78).

Распишем момент $\mu_n(a)$ как сумму свободных кумулянтов по неперекрестным разбиениям, пользуясь формулой (1.15)

$$\begin{aligned}
\mu_n &= \sum_{\pi\in NC(n)} \kappa_\pi & (4.83)\\
&= \sum_{s=1}^{n} \kappa_s \sum_{\{i_k\geq 0, \pi_k\in NC(i_k), 1\leq k\leq s: i_1+\cdots+i_s=n-s\}} \kappa_{\pi_1}\cdots\kappa_{\pi_s} & (4.84)\\
&= \sum_{s=1}^{n} \kappa_s \sum_{\{i_k\geq 0, 1\leq k\leq s: i_1+\cdots+i_s=n-s\}} \mu_{i_1}\cdots\mu_{i_s}. & (4.85)
\end{aligned}$$

Здесь во втором равенстве мы выделили суммирование по первому блоку разбиения из $1 \leq s \leq n$ элементов. Из-за неперекрестности разбиения π элементы, находящиеся между элементами первого блока, сами разбиваются в неперекрестные разбиения $\pi_1, \ldots, \pi_s$ множеств из $i_1, \ldots, i_s$ элементов. Суммирование по этим разбиениям дает моменты $\mu_{i_1}, \ldots, \mu_{i_s}$.

Теперь мы можем вычислить функцию $M_a(z)$,

$$\begin{aligned}
M_a(z) &= 1 + \sum_{n\geq 1} z^n \mu_n & (4.86)\\
&= 1 + \sum_{n\geq 1} z^n \sum_{s=1}^{n} \kappa_s \sum_{i_1+\cdots+i_s=n-s} \mu_{i_1}\cdots\mu_{i_s} & (4.87)\\
&= 1 + \sum_{s\geq 1} z^s\kappa_s \sum_{n\geq s} \sum_{i_1+\cdots+i_s=n-s} z^{i_1}\mu_{i_1}\cdots z^{i_s}\mu_{i_s} & (4.88)\\
&= 1 + \sum_{s\geq 1} z^s\kappa_s \sum_{l\geq 1} \sum_{i_1+\cdots+i_s=l} z^{i_1}\mu_{i_1}\cdots z^{i_s}\mu_{i_s} & (4.89)\\
&= 1 + \sum_{s\geq 1} z^s\kappa_s \Big(\sum_{k\geq 0} z^k\mu_k\Big)^s = C_a(zM_a(z)), & (4.90)
\end{aligned}$$

откуда следует формула (4.78). □

Приведем альтернативное доказательство свободной ЦПТ (теорема 4.20) использующее $R-$преобразование.

Доказательство. Рассмотрим R-преобразование элемента S_n и воспользуемся свойством (4.70) его аддитивности

$$\begin{aligned} R_{S_n} &= R_{(a_1+\ldots+a_n)/\sqrt{n}}(z) && (4.91)\\ &= nR_{a_1/\sqrt{n}}(z) = n\sum_{k=1}^{\infty}\kappa_k\left(\frac{a_1}{\sqrt{n}}\right)z^{k-1}. && (4.92)\end{aligned}$$

Используя полилинейность кумулянтов, имеем

$$\kappa_2\left(\frac{x_1}{\sqrt{n}}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}\sigma^2, \qquad \text{и} \qquad \kappa_k\left(\frac{x_1}{\sqrt{n}}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}0 \quad \text{при } k>2. \tag{4.93}$$

Таким образом, выживает только второй кумулянт, откуда $R_{S_n}(s)\xrightarrow[n\to\infty]{}\sigma^2 s$.

Остаётся найти соответствующую меру, то есть полученное R-преобразование. Из формулы (4.75)

$$K_a(s) = \frac{1}{s}+\sigma^2 s. \tag{4.94}$$

Из (4.73) следует уравнение

$$S_a\left(\frac{1}{s}+\sigma^2 s\right) = -s. \tag{4.95}$$

Чтобы найти преобразование Стилтьеса $S_a(z)$, нужно вместо $(-s)$ поставить в правую часть одно из двух решений уравнения

$$z = \frac{1}{s}+\sigma^2 s, \tag{4.96}$$

что даёт

$$S_{\pm}(z) = -\frac{z\pm\sqrt{z^2-4\sigma^2}}{2\sigma^2}. \tag{4.97}$$

Требование, чтобы $S_a(z)$ убывало при $z\to\infty$, приводит нас к выбору $S_a(z)=S_-(z)$. Нетрудно видеть, что обращение $S_a(z)$ приводит нас снова к полукруговому законы Вигнера,

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{Im}\big(S_a(x+i\varepsilon)\big) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{4-z^2}. \tag{4.98}$$

. □

Упражнение 4.42. *Получите некоммутативный аналог распределения Пуассона. Вычислите слабый предел*

$$\mu = \lim_{n\to\infty}\mu_{B(\lambda/n)}^{\boxplus n} \tag{4.99}$$

свободной аддитивной свертки n бернуллиевских случайных величин

$$B(p)\equiv p\delta_1+(1-p)\delta_0, \tag{4.100}$$

с параметром $p=\lambda/n$.

Глава 5

Инвариантные β-ансамбли Дайсона

Инструменты исследования больших случайных матриц, обсуждавшиеся выше, позволяют описывать предельные формы спектров этих матриц при достаточно общих предположениях о исходных распределениях матричных элементов. Гораздо сложнее описывать более тонкие характеристики спектров, такие как флуктуации плотности собственных значений вблизи предельных форм, поведение отдельных собственных значений и т.д.

Для ответов на такие вопросы мы рассмотрим более узкие классы случайных матриц, распрежделенных по мере, характеризуемой наличием большого количества симметрий. Симметрии дают новые возможности, например, развить явные инструменты интегрирования по мерам на случайных матрицах, которые позволяют выписывать точные распределения собственных значений.

Мы уже упоминали выше, что исследования случайных матриц были инициированы попытками выяснить особенности спектров энергий многокомпонентных квантовомеханических систем. В квантовом мире состояния физических систем задаются векторами в гильбертовом пространстве, а физическим наблюдаемым сопоставляются самосопряженные линейные операторы в таких пространствах. Спектр этих операторов даёт возможные значения наблюдаемых, которые могут в принципе могут быть измерены. В частности изучавшиеся Вигнером эрмитовы матрицы служили случайными аналогами гамильтонианов (операторов энергии), типичные (локальные) свойства спектра которых по предположению должны были воспроизводить свойства спектров энергии ядер тяжелых элементов таблицы Менделеева.

Следующий шаг на этом пути, рассматривать Гильбертово пространство вместе с группой симметрий соответствующей физической системы. Действие таких групп реализуется на гильбертовом пространстве унитарными и антиунитарными операторами. В квантовой механике первые связаны с такими преобразованиями, как вращения, а вторые с преобразованиями содержащими обращение времени. Унитарный оператор $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ – это оператор сохраняющий полуторалинейную форму $< \cdot, \cdot >_{\mathcal{H}}$: $\mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$

$$\langle U\phi, U\psi\rangle_{\mathcal{H}} = \langle \phi, \psi\rangle_{\mathcal{H}}, \quad \psi, \phi \in \mathcal{H} \tag{5.1}$$

а антиунитарный оператор $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ меняет местами начальное и конечное состояние

$$\langle A\phi, A\psi\rangle_{\mathcal{H}} = \langle \psi, \phi\rangle_{\mathcal{H}}, \quad \psi, \phi \in \mathcal{H}. \tag{5.2}$$

В случае конечномерных пространств, которые мы будем рассматривать, унитарные операторы представляются унитарными матрицами, а антиунитарные произведением унитарных матриц и антилинейного оператора комплексного сопряжения. Тот факт, что физическая система инвариантна относительно некоторой группы преобразований, означает, что ее гамильтониан (или другие самосапряженные операторы, представляющие другие наблюдаемые) коммутирует с представление этой группы в $\mathcal{H}$.

Какова общая структура представлений групп состоящих из унитарных и антиунитарных операторов,[1] и как устроены пространства эрмитовых матриц, коммутирующих с этими представлениями, или, другими словами, лежащими в их централизаторе?

Не вдаваясь в детали, которые можно найти в статье Дайсона «The Threefold Way. Algebraic Structure of Symmetry Groups and Ensembles in Quantum Mechanics», обрисуем в общих чертах ответ. Соответствующие представления можно реализовать в виде унитарных блочных матриц матричные элементы которых – элементы алгебр с делением над вещественным полем, а коммутирующие с ним Гамильтонианы в виде эрмитовых матриц с матричными элементами из таких же алгебр.

По теореме Фробениуса таких алгебр всего три, и они изоморфны $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ и $\mathbb{H}$, полям действтельных чисел, комплексных чисел или телу кватернионов соответственно. Идея настоящего раздела состоит в том, чтобы ввести естественные вероятностные меры на пространствах таких матриц и исследовать статистику их спектра.

5.1 Симметрические пространства и группы Ли

Обратимся сначала к эрмитовым матрицам. Для $n \in \mathbb{N}$ образом мы рассмотрим три пространства матриц размера $n \times n$.

Некомпактные симметрические пространства:

$$\beta = 1: \qquad \mathrm{Symm}(n) := \{M \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid M^T = M\}, \tag{5.3}$$

$$\beta = 2: \qquad \mathrm{Her}(n) := \{M \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid M^\dagger = M\}, \tag{5.4}$$

$$\beta = 4: \qquad \mathrm{Quart}(n) := \{M \in \mathbb{H_R}^{n \times n} \mid M = M^\dagger = M^R\}. \tag{5.5}$$

По причине, которая станет понятна в дальнейшем, каждому из пространств мы будем сопоставлять одно из значений параметра $\beta = 1, 2, 4$. Первые два пространства это пространства вещественных симметрических матриц и комплекснозначных эрмитовых матриц размера $n \times n$, а третье – самодуальные эрмитовы матрицы размера $n \times n$ с матричными элементами, принимающими значения в алгебре вещественных кватернионов, либо эквивалентные им комплекснозначные матрицы размера $2n \times 2n$. Необходимые сведения о кватернианах можно найти в приложении A.3.

Все указанные множества являются некомпактными гладкими многообразиями изоморфными $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$, $\mathbb{R}^{n^2}$, $\mathbb{R}^{n(2n-1)}$ соответственно. Напомним, мы используем эрмитовы матрицы в качестве аналога квантового гамильтониана H. Важную роль, в квантовой механике играет также связанный с гамильтонианом оператор эволюции $U_t = e^{\mathrm{i}Ht}$. Руководствуясь этой аналогией введем ещё три пространства унитарных матриц

---

[1] Строго говоря, бессмысленно говорить о линейных представлениях антиунитарных операторов и для работы с ними Вигнер использовал понятеи копредставления, на котором мы не будем останавливаться.

Компактные симметрические пространства:

$$\beta = 1: \quad \mathrm{USymm}(n) := \{M \in \mathbb{C}^{n\times n} \mid M = M^T, MM^\dagger = I_n\}, \tag{5.6}$$

$$\beta = 2: \quad \mathrm{U}(n) := \{M \in \mathbb{C}^{n\times n} \mid M^\dagger M = I_n\}, \tag{5.7}$$

$$\beta = 4: \quad \mathrm{UQuart}(n) := \{M \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^{n\times n} \mid M^R = M, MM^\dagger = I_n\}, \tag{5.8}$$

являющихся компактными аналогами многообразий (5.3–5.5). Это пространства симметрических унитарных матриц, произвольных унитарных матриц, образующих унитарную группу $\mathrm{U}(n)$, и пространство самодуальных, унитарных матриц, с матричными элементами, принимающих значения в алгебре комплексных кватернионов $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$, либо соответствующих им комплексных матриц размера $2n \times 2n$.

Упражнение 5.1. *Докажите, что* $\mathrm{USymm}(n), \mathrm{U}(n)$ *и* $\mathrm{UQuart}(n)$ *– дифференцируемые многообразия.*

,

На всех шести многообразиях задано действие групп Ли унитарных матриц с вещественными, комплексными и вещественно кватернионными матричными элементами соответственно, т.е. ортогональной, унитарной и унитарной симплектической групп

Группы Ли:

$$\beta = 1: \quad \mathrm{O}(n) := \{M \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid M^T M = I_n\}, \tag{5.9}$$

$$\beta = 2: \quad \mathrm{U}(n) := \{M \in \mathbb{C}^{n\times n} \mid M^\dagger M = I_n\}, \tag{5.10}$$

$$\beta = 4: \quad \mathrm{Sp}(n) := \{M \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{n\times n} \mid MM^\dagger = I_n\}. \tag{5.11}$$

Последняя также обозначается $USp(2n)$, где число $2n$ относится к размеру комплексных унитарных матриц, представляющих кватернионные матрицы размера $n \times n$. Группы действуют на многообразиях сопряжением (присоединенное действие),

$$U : M \to U^\dagger M U \tag{5.12}$$

.

Заметим, что унитарные преобразования линейных пространств $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n, \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$, задаваемые матрицами из соответствующих групп Ли, сохраняют соответственно вещественную билинейную форму

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \tag{5.13}$$

комплексную полуторалинейную эрмитову форму

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{x}_i y_i, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n, \tag{5.14}$$

и кватернионную эрмитову форму

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{x}_i y_i, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n. \tag{5.15}$$

Компактные симметрические пространства – это подмногообразия унитарной группы, причем сама унитарная группа совпадает с симметрическим пространством, соответствующим $\beta = 2$, тогда как случаи $\beta = 1, 4$ получаются из нее как факторпространства по ее подгруппам.

Действительно, заметим, что в случае $\beta = 1$ для любой симметрической унитарной матрицы $M \in \mathrm{USymm}(n)$ существует унитарная матрица $V \in \mathrm{U}(n)$, такая что матрица M представляется в виде

$$M = VV^T. \tag{5.16}$$

Выбор матрицы V не единственный. Матрица M не изменится, при любом сдвиге $V \to VO$ матрицы V ортогональной матрицей $O \in \mathrm{O}(n)$. Верно и обратное для любых двух матриц $V \neq \tilde{V} \in \mathrm{U}(n)$, таких что $VV^T = \tilde{V}\tilde{V}^T = M$ существует единственная ортогональная матрица $O = V^T\tilde{V}^{-T}$, такая что $\tilde{V} = VO$. Таким образом, каждый элемент $USymm(n)$ задает единственную орбиту действия группы $\mathrm{O}(n)$ сдвигами $V \to VO$ на многообразии группы $\mathrm{U}(n)$, т.е.

$$\mathrm{USymm}(n) = \mathrm{U}(n)/\mathrm{O}(n). \tag{5.17}$$

Аналогично для $\beta = 4$ имеем

$$\mathrm{UQuart}(n) = \mathrm{U}(n)/\mathrm{Sp}(n). \tag{5.18}$$

Упражнение 5.2. *Докажите, что унитарная симметрическая матрица имеет представление (5.16).*

Что касается некомпактных многообразий, то они являются касательными пространствами своих компактных аналогов.

$$\mathrm{Symm}(n) \cong T_{I_n}\mathrm{USymm}(n), \quad \mathrm{Her}(n) \cong T_{I_n}\mathrm{U}(n), \quad \mathrm{Quart}(n) \cong T_{I_n}\mathrm{UQuart}(n) \tag{5.19}$$

5.2 Интегрирование по пространствам матриц

Наша дальнейшая задача

1. задать на многообразиях (5.3–5.8) меры, инвариантные относительно действия групп Ли;
2. сделать замену координат, чтобы разделить интегрирование по собственным значениям и собственным векторам.

Задав инвариантную меру, мы будем строить вероятностные меры на матрицах, которые порождают инвариантные распределения спектров матриц, а выделив зависимость от собственных значений, мы сможем проинтегрировать по собственным векторам и найти распределения собственных значений в явном виде.

Основной результат, который докажем, выглядит следующим образом:

Теорема 5.3. Формула Вейля *Пусть* $\beta = 1, 2, 4$ *и*

$$\beta = 1: \quad DM = \prod_{1\le i\le j\le n} dM_{ij} \tag{5.20}$$

$$\beta = 2: \quad DM = \prod_{1\le i\le n} dM_{ii} \prod_{1\le i<j\le n} d\Re M_{ij} d\Im M_{ij} \tag{5.21}$$

$$\beta = 4: \quad DM = \prod_{1\le i\le n} dM_{ii}^0 \prod_{1\le i<j\le n} \prod_{k=0}^{4} dM_{ij}^k \tag{5.22}$$

элементы объема, задающие меры Лебега на $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$, $\mathbb{R}^{n^2}$, $\mathbb{R}^{n(2n-1)}$, *которые в свою очередь задают меры на матрицах* $M \in \mathrm{Symm}(n), \mathrm{Her}(n), \mathrm{Quart}(n)$ *соответственно. Справедливо соотношение*

$$DM = |\Delta(\Lambda)|^\beta d\Lambda DU. \tag{5.23}$$

где

$$\Delta(\Lambda) = \prod_{i<j}(\lambda_i - \lambda_j)$$

определитель Вандермонда от собственных значений матрицы M, $d\Lambda = \prod\limits_{i<j} d\lambda_i$ *– мера Лебега на* $\mathbb{R}^n$, DU *— мера Хаара соответствующих групп Ли ограниченная на* $\mathrm{O}(n)/\mathbb{Z}_2^n$, $\mathrm{U}(n)/\mathbb{T}^n$ *и* $\mathrm{Sp}(n)/\mathbb{T}^n$ *соответственно, и* $\mathbb{T}^n = [0, 2\pi]^{\otimes n}$. *(Конструкция меры Хаара станет ясна из доказательства.)*

Прежде чем приступить к доказательству, мы обсудим несколько важных фактов. Далее мы сосредоточимся на случае $\beta = 1$. За исключением некоторых мелких деталей, рассмотрение случаев $\beta = 2, 4$ аналогично и будет сформулировано в виде упражнения. Покажем сначала, что мера DM из формулировки теоремы 5.3 инвариантна относительно действия группы Ли. Для этого воспользуемся тем фактом, что наш объект – риманово многообразие, и воспользуемся общим методом построения инвариантной формы объема на римановом многообразии.

Пусть $\mathcal{M}$ – n-мерное гладкое риманово многообразие. Это значит, что на нем определена риманова метрика $g(x) : T_x\mathcal{M} \times T_x\mathcal{M} \to \mathbb{R}$, контрвариантный тензор, задающий положительно-определенное невырожденное скалярное произведение в касательном пространстве к каждой точке многообразия

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \sum_{1 \le i,j \le n} g_{ij}(x) a^i b^j, \quad \mathbf{a}, \mathbf{b} \in T_x\mathcal{M}. \tag{5.24}$$

Здесь $g_{ij}(x)$ – симметрическая матрица, задающая невырожденную положительно определенную квадратичную форму гладко зависящую от точки многообразия.

Риманова метрика естественным образом задает на многообразии элемент длины

$$ds^2 = \sum_{1 \le i,j \le n} g_{ij} dx^i dx^j, \tag{5.25}$$

так что например длина гладкой кривой $\gamma : [-1, 1] \to \mathcal{M}$ будет даваться интегралом

$$\|\gamma\| = \int_\gamma \sqrt{ds^2} = \int_{-1}^1 \sqrt{\langle \dot\gamma(t), \dot\gamma(t) \rangle} dt$$

и форму объема

$$DV = \sqrt{\det g} \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n, \tag{5.26}$$

инвариантную относительно гладких замен координат $\mathbf{x} \to \mathbf{y}(\mathbf{x})$ на $\mathcal{M}$. Инвариантность следует из того, что при замене координат ковариантные вектора и контрвариантные вектора (1-формы) преобразуются как

$$\tilde\xi_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x^j}{\partial y^i} \xi_j, \quad dy^i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial y^i}{\partial x^j} dx^j. \tag{5.27}$$

В частности для метрического тензора будем иметь

$$\tilde{g}_{ij} = \sum_{1\le k,l\le n} \frac{\partial x^k}{\partial y_i}\frac{\partial x^l}{\partial y_j} g_{kl}, \tag{5.28}$$

а для n-формы

$$dy^1 \wedge \cdots \wedge dy_n = \det\left[\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right]_{1\le i,j\le n} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx_n, \tag{5.29}$$

откуда следует, что форма объема (5.26) инвариантна относительно замен координат. В частности, форма $dx^1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ инвариантна относительно изометрий, т.е. замен, которые сохраняют скалярное произведение (векторов в касательном пространстве) или, что то же самое, риманову метрику.

Пусть теперь $\mathcal{M} = \mathrm{Symm}(n)$. Чтобы построить вектор ξ касательного пространства $T_M\mathcal{M}$, нужно задать гладкое отображение $M : [-1,1] \to \mathcal{M}$, такое что $M(0) = 0$. Тогда вектор касательного пространства $\xi \in T_M\mathcal{M}$ будет иметь вид матрицы

$$\xi = \dot{M}(0) = \left.\frac{dM(t)}{dt}\right|_{t=0}. \tag{5.30}$$

Для пары векторов касательного пространства зададим скалярное произведение на $\mathcal{M}$ в виде

$$\langle \xi, \psi\rangle = \mathrm{Tr}(\xi\psi), \quad \xi, \psi \in T_M\mathcal{M}. \tag{5.31}$$

Для так определенного скалярного произведения присоединенное действие (5.12) ортогональной группы является изометрией. Действительно,

$$\langle O^T\xi O, O^T\psi O\rangle = \mathrm{Tr}(O^T\xi O O^T\psi O) = \langle \xi, \psi\rangle, \tag{5.32}$$

откуда следует, что мера (5.20) инвариантна относительно присоединенного действия ортогональной группы.

Чтобы явно увидеть, как выглядит риманова метрика в $\mathrm{Symm}(n)$ рассмотрим отображение

$$\xi \to (\xi_{1,1}, \dots, \xi_{n,n}, \xi_{1,2}, \dots, \xi_{(n-1),n}),$$

из $\mathrm{Symm}(n)$ в $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ и выпишем скалярное произведение в соответствующем строчке ξ виде

$$\langle \xi, \psi\rangle = \sum_{1\le i\le j\le n} (\xi^T)_{ij}\psi_{ji} = \sum_{1\le i\le j\le n} \xi_{ji}\psi_{ji} = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ii}\psi_{ii} + 2\sum_{1\le i<j\le n} \xi_{ji}\psi_{ji}.$$

То есть метрика имеет вид $g = \mathrm{diag}(1, \dots, 1, 2, \dots, 2)$, и, согласно (5.26) инвариантная форма объёма на $\mathrm{Symm}(n)$ имеет вид

$$DV = 2^{\frac{n(n-1)}{4}} \bigwedge_{1\le i\le n} dM_{ii} \bigwedge_{1\le j<k\le n} dM_{jk},$$

что с точностью до постоянного коэффициента дает (5.20).

Теперь перейдём к реализации второй части и построим инвариантную меру (Хаара) на $O(n)$. Чтобы построить касательное пространство в точке $Q \in O(n)$, продифференцируем отображение $Q : [-1,1] \to O(n)$. Мы имеем

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (Q^T(t)Q(t)) = \dot{Q}^T(0)Q(0) + Q^T(0)\dot{Q}(0) = 0. \tag{5.33}$$

Пусть сначала $Q(0) = I_n$. Тогда $\dot{Q}^T = -\dot{Q}$. Тогда касательное пространство к $\mathrm{O}(n)$ в единице, т.е. алгебра Ли,

$$\mathfrak{o}(n) = T_I\mathrm{O}(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A_{ij} = -A_{ji}\}, O(0) = I_n, \tag{5.34}$$

состоит из кососимметрических вещественнозначных матриц. В произвольной точке $Q \in \mathrm{O}(n)$ матрица $Q^T(0)\dot{Q}(0)$ – кососимметрическая матрица, и касательное пространство дается левым сдвигом алгебры Ли

$$T_Q\mathrm{O}(n) = Q \cdot \mathfrak{o}(n) = \{QA \mid A_{ij} = -A_{ji}\}. \tag{5.35}$$

Определим скалярное произведение в $T_Q\mathrm{O}(n)$ следующмим образом

$$\langle A, \tilde{A}\rangle = \mathrm{Tr}(A^T\tilde{A}) = -\mathrm{Tr}(A\tilde{A}), \quad A, \tilde{A} \in T_Q\mathrm{O}(n). \tag{5.36}$$

Оно инвариантно относительно левых сдвигов ортогональными матрицами, $A \to QA$, где $Q \in \mathrm{O}(n)$. Очевидно, что $\dim \mathfrak{o}(n) = \dfrac{n(n-1)}{2}$, и выраженное в терминах матричных элементов скалярное произведение примет вид удвоенного стандартного скалярного произведения в $\mathbb{R}^{n(n-1)/2}$.

$$\langle A, \tilde{A}\rangle = 2 \sum_{1\le i<j\le n} A_{ij}\tilde{A}_{ij}, \tag{5.37}$$

откуда видно, что метрический тензор есть $g_{\mathfrak{o}(n)} = \mathrm{diag}(2, \ldots, 2)$ и инвариантная форма объема, задающая меру Хаара на $\mathrm{O}(n)$, равна

$$DU = 2^{\frac{n(n-1)}{4}} \bigwedge_{1\le i<j\le n} dU_{ij}, \tag{5.38}$$

где мы ввели обозначение $dU_{ij} = (QdQ)_{ij}$ и $dQ = (dQ_{ij})_{1\le i,j\le n}$ – матрица из базисных дифференциальных 1-форм. Наконец мы можем разделить интегрирование в $\mathrm{Symm}(n)$ по мере DM на интегрирование по мере Хаара на $\mathrm{O}(n)$, т.е. по собственным векторам симметрических матриц, и по их собственным значениям.

Лемма 5.4. *Пусть все собственные значения матрицы $M \in \mathrm{Symm}(n)$ различны. Тогда касательное пространство к $\mathrm{Symm}(n)$ в точке M разлагается в прямую сумму : $T_M\mathrm{Symm}(n) \cong R^n \oplus o(n)$, причём $R^n \perp o(n)$.*

Доказательство. Пусть сначала матрица $M = \Lambda$ диагональна. Рассмотрим $M(t)\colon (-1, 1) \to \mathrm{Symm}(n)$, $M(0) = \Lambda$. Тогда для каждого t можно рассмотреть представление $M(t) = Q(t)\Lambda(t)(Q(t))^T$, где $\Lambda(0) = \Lambda$ и $Q(t) \in \mathrm{O}(n)$. Дифференцируя, получим

$$\dot{M}(0) = \dot{Q}(0)\lambda(0)(Q(0))^T + Q(0)\dot{\lambda(0)}(Q(0))^T + Q(0)\lambda(0)(\dot{Q}(0))^T. \tag{5.39}$$

Поскольку $\dot{Q} = -\dot{Q}^T$, мы имеем

$$\dot{M}(0) = \dot{\Lambda}(0) + [\dot{Q}, \Lambda].$$

Первое слагаемое является диагональной матрицей, а $[\dot{Q}, \Lambda]_{ii} = 0$, поэтому $[\dot{Q}(0), \Lambda(0)] \perp \dot{\Lambda}(0)$.

Пусть теперь $M(0) = M$ — матрица произвольного вида. Тогда для $Q(t) \in \mathrm{O}(n)$, $Q(0) = Q$, $M(0) = Q\Lambda Q^T$, и мы имеем

$$\begin{aligned} \dot{M}(0) &= \dot{Q}\lambda Q^T + Q\dot{\lambda}Q^T + Q\lambda\dot{Q}^T \\ &= QQ^T(\dot{Q}\lambda Q^T + Q\dot{\lambda}Q^T + Q\lambda\dot{Q}^T)QQ^T \\ &= Q(\dot{\Lambda} + [Q^T\dot{Q}, \Lambda])Q^T. \end{aligned} \tag{5.40}$$

Матрица $Q^T\dot{Q} \in \mathfrak{o}(n)$ кососимметрична, поэтому у коммутатора $[Q^T\dot{Q}, \Lambda]$ на диагонали нули. А так как $\dot{\Lambda}$ диагональна, то $\dot{\Lambda} \perp [Q^T\dot{Q}, \Lambda]$. □

Предшествующая лемма позволяет завершить доказательство формулы Вейля (теоремы 5.3).

Доказательство. Формула (5.40) переписанная для 1-форм будет иметь вид.

$$(Q^T dMQ)_{ij} = (d\Lambda + [Q^T dQ, \Lambda])_{ij} = \delta_{ij} d\lambda_i + dU_{ij}(\lambda_i - \lambda_j), \tag{5.41}$$

где $d\Lambda_{ii} = d\lambda_i$ и $dU = Q^T dQ = -dU^T$. Поскольку сопряжение ортогональной матрицей сохраняет форму объема, переход от формы $\bigwedge_{1\le i\le j\le n} dM_{ij}$ к форме $\bigwedge_{1\le i\le n} d\lambda_i \bigwedge_{1\le i<j\le n} dU_{ij}$, сводится к вычислению якобиана, т.е. определителя матрицы

$$J = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & (\lambda_i - \lambda_j) & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}, \tag{5.42}$$

которое и приводит нас к формуле Вейля (5.23) для $\beta = 1$.

Таким образом, мы задали отображение $M \to (\Lambda, Q)$. Оно, однако, не является однозначным. Во первых сопряжение $\Lambda \to D\Lambda D$ диагональными матрицами вида $D = \mathrm{diag}(\pm 1, \dots, \pm 1)$, не меняет Λ и, следовательно матрицу $M = Q^T\Lambda Q = (DQ)^T\Lambda(DQ)$. Во вторых однозначность отображения нарушается в точках, где якобиан перехода равен нулю, т.е. при $\lambda_i = \lambda_j$ для каких либо $i \neq j$. Чтобы снять проблему неоднозначности, достаточно ограничить область интегрирования по ортогональной группе матрицами с фиксированными знаками матричных элементов одного из столбцов, а интегрирование по собственным значениям ограничить так называемой камерой Вейля $\mathcal{W}_R = \{\Lambda \in \mathbb{R}^n : \lambda_1 < \dots < \lambda_n\}$. При таком выборе отображение $M \to (\Lambda, Q)$ становитс гладким и однозначным. С другой стороны, подмножество на котором два собственных значения совпадают или матричные элементы знакопостоянного столбца зануляются имеет меру ноль. За строгими доказательствами этих фактов мы отсылаем читателя к соответствующей литературе. □

Подобным образом формула Вейля доказывается для случаев комплексных эрмитовых и кватернионно-вещественных матриц.

Упражнение 5.5. *Докажите фоомулу Вейля для случаев* $\beta = 2, 4$.

5.3 Инвариантные матричные ансамбли

5.3.1 Гауссовы ансамбли

Разделив интегрирования по группам Ли и собственным значениям мы можем задать на $Symm(n)$, $Her(n)$, $Quart(n)$ вероятностные меры, инвариантные относительно действия соответствующих групп Ли, которое, следовательно не будет менять собственных значений.

Для этого достаточно выбрать меру, зависящей от матрицы только через спектральные инварианты, например следы степеней. Кроме того, для того чтобы мера была вероятностной, мы должны потребовать, чтобы интеграл по всему некомпактному многообразию сходился. Самым общим видом такой меры будет мера вида $\mathbb{P}(DM) = \frac{1}{Z}e^{-\mathrm{Tr}f(M)}$ с достаточно быстро растущей на бесконечности функцией $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Общий класс таких мер обычно обозначают термином матричные модели. При каких $f(x)$ все матричные элементы M_{ij} независимы? Другими словами, каково пересечение множеств матричных моделей с множеством вигнеровских матриц. Оказывается, что пересечение исчерпывается функциями вида $f(x) = ax^2 + bx$ с некоторыми $a > 0, b \in \mathbb{R}$. От линейного члена можно избавиться сдвигом среднего значения матричных элементов. В результате мы приходим к определению гауссовых ансамблей.

Определение 5.6. *Гауссовы ансамбли: ортогональный, $\beta = 1$; унитарный, $\beta = 2$; симплектический, $\beta = 4$ — это мера на матрицах из* $\mathrm{Symm}(n)$, $\mathrm{Her}(n)$, $\mathrm{Quart}(n)$, *которая задаётся формулой*

$$\mathbb{P}_n^{G,\beta}(DM) = \frac{1}{\mathcal{N}_n^{G,\beta}} e^{-\frac{\beta}{4}\mathrm{Tr}M^2} DM, \tag{5.43}$$

где $\mathcal{N}_n^{G,\beta}$ – нормировочный множитель.

Воспользовавшись формулой Вейля, мы можем проинтегрировать по группе Ли и получить плотность распределения вероятности собственных значений $\Lambda_n = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \in \mathbb{R}^n$ случайных матриц в гауссовых ансамблях.

$$f_{\Lambda_n}^{\mathrm{G},\beta}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{Z_n^{G,\beta}} e^{-\frac{\beta}{4}\sum_{i=1}^n x_i^2} \prod_{1\le i<j\le n} |x_i - x_j|^\beta. \tag{5.44}$$

5.3.2 Круговые ансамбли

Еще один пример ансамблей случайных матриц дается мерами на введенных выше компактных многообразиях унитарных матриц, неформально связанных с рассмотренными выше эрмитовыми матрицами переходом $M \to e^{iM}$. Отличие здесь однако состоит в том, что тогда как стартовой точкой исследования случайных эрмитовых матриц была полностью факторизованная мера $DM = \prod_{i\le j} dM_{ij}$ на независимых матричных элементах, матричные элементы унитарных матриц полученных экспоненциированием существенно взаимно зависимы, т.е. элемент объема не может быть выбран в виде простого произведения дифференциалов от матричных элементов унитарной матрицы. Для решения этой проблемы мы воспользуемся уже упомянутым свойством (5.16) унитарных симметрических матриц (или подобными ствойствами просто унитарных и унитарных самодуальных матриц): каждая унитарная симметрическая (просто унитароная, унитарная самодуальная) матрица U представима в виде $U = V^T V$ $(V^\dagger V, V^R V)$, где V – просто унитарная матрица (в последнем случае унитарная комплексно-кватернионная либо ее унитарный комплексный аналог удвоенного размера). Тогда матрицу, не сильно отличающаяся от нее, можно представить в виде

$$U + dU = V^T(I + \mathbf{i}dM)V \quad \left(V^\dagger(I + \mathbf{i}dM)V,\, V^R(I + \mathbf{i}dM)V\right), \tag{5.45}$$

где dM эрмитова матрица из дифференциалов, такая же как использовалась при обсуждении эрмитовых матриц. По ней, так же как и раньше, строится искомая форма объема DM, причем она не зависит от выбора матрицы V, так как разные унитаные матрицы V, приводящие к одной и той же матрице M, отличаются сохраняющим DM сдвигом ортогональной (унитарной, симплектической) матрицей. Поскольку унитарные матрицы живут на компактных многообразиях, мы можем ограничиться равномерной мерой на них.

Определение 5.7. *Круговые ансамбли: ортогональный, (COE), $\beta = 1$; унитарный, (CUE), $\beta = 2$; симплектический, (CEE), $\beta = 4$ — это меры на матрицах из* $\mathrm{USymm}(n)$, $\mathrm{U}(n)$, $\mathrm{UQuart}(n)$, *которые задаются формулой*

$$\mathbb{P}_n^{\mathrm{C},\beta}(DM) = \frac{DM}{\mathcal{N}_n^{C,\beta}}, \tag{5.46}$$

где DM – мера Лебега (5.20-5.22) на элементах эрмитовых матриц, связанных с унитарными матрицами соотношением 5.45 *и $\mathcal{N}_n^{G,\beta}$ – нормировочный множитель.*

Тогда как собственные значения эрмитовых матриц – действительные числа, собственные значения унитарных матриц живут на единичном круге в комплексной плоскости, т.е. имеют вид $\Lambda_n = \{e^{\mathbf{i}\theta_1}, \ldots, e^{\mathbf{i}\theta_n}\} \in \mathbb{T}^n$.

Применив формулу Вейля к мере круговых ансамблей и проинтегрировав по алгебре Ли, получим плотность распределения фаз $\Theta_n = \{\theta_1, \ldots, \theta_n\} \in [-\pi, \pi)^n$ собственных значений.

$$f_{\Theta_n}^{\mathrm{C},\beta}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{Z_n^{\beta,C}} \prod_{1 \le k < j \le n} |e^{\mathbf{i}x_k} - e^{\mathbf{i}x_j}|^\beta \tag{5.47}$$

5.3.3 Ансамбли Вишерта

.

Пусть $X \in \mathbb{R}^{n\times m}$ $(\mathbb{C}^{n\times m}, \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{n\times m})$ — вещественная (комплексная, вещественно-кватернионная) матрица размера $n\times m$ $(n > m)$ с независимыми одинаково нормально распределёнными матричными элементами, обладающими нулевым средним и дисперсией независимых компонент $1/\beta$, где $\beta = 1, 2, 4$. Пусть $A = XX^\dagger$. Определенное выше распределение матричных элементов матрицы X порождает распределение матричных элементов матрицы A, которые очевидно уже не будут независимы. Приведем здесь это распределение без доказательства.

Лемма 5.8. *Матричные элементы матрицы A имеют следующее*

$$\mathbb{P}(DA) = \frac{1}{\mathcal{N}^{\beta,W}} e^{-\frac{\beta}{2}\mathrm{Tr}(A)} (\det A)^{\frac{\beta}{2}(n-m+1)-1} DA, \tag{5.48}$$

где $\mathcal{N}^{\beta,W}$ – нормировочный множитель, а DA – элемент объема, построенный по матричным элементам матрицы A по формулам (5.20-5.22).

Более подробно мы обсудим эту формулу в задачах (вместе с наброском доказательства). Нетрудно видеть, что это распределение также инвариантно относительно действия соответствующих групп Ли, и мы можем снова воспользоваться формулой Вейля, которая приводит нас к формуле для плотности распределения вероятности собственных значений $\Lambda_n = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \in \mathbb{R}^n$ матриц Вишерта.

$$f^{\beta,W}(x_1,\ldots,x_n)_{\Lambda_n} = \frac{1}{Z_n^{\beta,W}} e^{-\frac{\beta}{2}\sum_i x_i} \prod_i x_i^{\frac{\beta}{2}(n-m+1)-1} \mathbb{I}_{x_i \geq 0} \prod_{1 \leq k < j \leq n} |x_k - x_j|^\beta. \tag{5.49}$$

5.4 Распределение собственных значений при $n \to \infty$ и задача кулоновского газа.

Запишем плотность распределения (5.44) n собственных значений эрмитовых матриц $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \subset \mathbb{R}$ в виде

$$f^\beta_{\Lambda_n}(\mathbf{x}) = \frac{1}{Z^\beta_n} e^{-\beta E(\mathbf{x})}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \tag{5.50}$$

где мы ввели обозначение функции $E(\mathbf{x})\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, задаваемой формулой

$$E(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n V(x_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \ln |x_i - x_j|, \tag{5.51}$$

в свою очередь определяемую через функцию $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, которая для гауссовых ансамблей имеет вид

$$V(x) = \frac{x^2}{4}, \tag{5.52}$$

а в общем случае произвольных матричных моделей может иметь другой вид, например многочлена произвольной чётной степени с положительным коэффициентом при старшем члене.

Читатель знакомый с основами статистической физики без труда узнает в формуле (5.50) распределение Гиббса, описывающее плотность распределения координат n одинаково заряженных частиц в потенциале $V(x)$, находящихся в контакте термостатом при температуре $T = 1/\beta$. Заметим, что логарифмические слагаемые, соответствуют двумерному кулоновскому отталкиванию между частицами. Таким образом в задаче рассматривается двумерный кулоновский газ частиц, положение которых ограничено прямой линией на плоскости.

Термодинамические величины в такой системе определяются средними по распределению Гиббса. Например среднее функции $O : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ координат частиц Λ дается n-кратным интегралом

$$\mathbb{E}O(\Lambda) = \frac{1}{Z^\beta_n} \int_{\mathbb{R}^n} O(\mathbf{x}) e^{-\beta E(\mathbf{x})} d^n\mathbf{x}, \tag{5.53}$$

а нормировочный коэффициент Z^β_n, называемы статистической суммой, есть

$$Z^\beta_n = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\beta E(\mathbf{x})} d^n\mathbf{x}. \tag{5.54}$$

Естественный вопрос, каково типичное распределение частиц в пределе $n \to \infty$. Подобный вопрос мы уже обсуждали выше, рассматривая предельное поведение эмпирической спектральной меры большой случайной матрицы, и в частности матрицы Вигнера. Как было замечено матрицы их Гауссовых ансамблей также являются матрицами Вигнера. Поэтому, мы ожидаемо придем к полукруговому законы Вигнера. Обсудим его вывод из точного вида спектральной плотности, опустив детали доказательств и пожертвовав математической строгостью.

Забудем пока, что в контексте случайных матриц параметр β принимал дискретные значения, и рассмотрим систему частиц в пределе нулевой температуры $\beta \to \infty$. В этом пределе доминирующий вклад в интегралы типа (5.53) даются конфигурациями минимизирующие энергию в экспоненте. Следуя обычной в статистической физике процедуре, введем функцию свободной энергии

$$\mathfrak{f}_n(\beta) := -\beta^{-1} \ln Z_n^\beta. \tag{5.55}$$

В пределе нулевой температуры ее величина будет равна минимуму энергии

$$\lim_{\beta\to\infty} \mathfrak{f}_n(\beta) = \inf_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} E(\mathbf{x}) = E(\mathbf{x}_{\min}), \tag{5.56}$$

при условии что значение

$$\mathbf{x}_{\min} := \arg \inf_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} E(\mathbf{x}), \tag{5.57}$$

минимизирующее энергию, единственно. Это действительно так, когда $E(\mathbf{x})$ – выпуклая функция. Очевидно, что при этом условии предельные значения средних будут определяться той же конфигурацией

$$\lim_{\beta\to\infty} \mathbb{E} O(\mathbf{x}) = O(\mathbf{x}_{\min}). \tag{5.58}$$

Оказывается, что задача о пределе $n \to \infty$ тесно связана с пределом нулевой температуры, взятым одновременно с пределом большого числа частиц, в котором плотность распределения частиц стремится к гладкой функции. Чтобы увидеть это, введём перемасштабированные координаты частиц

$$\tilde{\Lambda} = \frac{\Lambda}{\sqrt{n}} = \left\{ \frac{\lambda_1}{\sqrt{n}}, \cdots, \frac{\lambda_n}{\sqrt{n}} \right\}, \tag{5.59}$$

которые, согласно главе 2, будут оставаться в ограниченной области в $\mathbb{R}$ при $n \to \infty$. Также введем перемасштабированный потенциал

$$\tilde{V}(\mathbf{x}) = \frac{V(\sqrt{n}\cdot \mathbf{x})}{n}. \tag{5.60}$$

Плотность распределения перемасштабированых координат имеет вид

$$f^\beta_{\tilde{\Lambda}_n}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\tilde{Z}_n^\beta} e^{-\beta n^2 \tilde{E}(\mathbf{x})}, \tag{5.61}$$

где

$$\tilde{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \tilde{V}(x_i) - \frac{1}{2n^2}\sum_{i\neq j} \ln|x_i - x_j| \tag{5.62}$$

перемасштабированная энергия. Сравнивая (5.44) с (5.61) мы видим, что при перемасштабировании температурный параметр β изменился βn^2, так что предел $n \to \infty$ одновременно становится и пределом нулевой температуры. Конечно это лишь эффект переписывания энергии в терминах новых перемасштабированных переменных. Этот факт, однако, становится нетривиальным, если предположить, что стационарные значения $x_1, \ldots, x_n$, минимизирующие энергию, остаются ограниченными в пределе $n \to \infty$, что в свою очередь приводит к ограниченности $\tilde{E}(\mathbf{x})$. Действительно, если в такой записи слагаемые под знаками сумм порядка единицы, в силу наличия нормировочных множителей перед суммами все выражение также будет порядка единицы. С этого момента, мы будем рассматривать формулы (5.61, 5.62) как отправную точку, считая что функция $\tilde{V}(x)$ – независимая от n произвольная ограниченная снизу непрерывная функция, растущая при $|x| \to \infty$ достаточно быстро для того, чтобы потенциал удерживающий частицы от ухода на бесконечность доминировал над кулоновским отталкиванием.

Так же как в (5.56), основной вклад в свободную энергию дают конфигурации частиц, минимизирующие энергию, с той однако разницей, что теперь число частиц стремится к бесконечности. В случае фиксированного числа n частиц, задача состоит в нахождении минимума функции n переменных, и сводится к системе n алгебраических уравнений. Чтобы придать смысл аналогичной задаче с меняющимся числом $n \to \infty$ рассморим отображение $\mu : \tilde{\Lambda}_n \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$, введя эмпирическую меру

$$\mu_{\tilde{\Lambda}_n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta_{\tilde{\lambda}_i}. \tag{5.63}$$

Тогда энергию (5.62) можно рассматривать как функционал $E_n : \mathcal{P} \to \{\mathbb{R} \bigcup +\infty\}$ на пространстве вероятностных мер, положив $E_n(\mu) := \tilde{E}(\mathbf{x})$, если $\mu = \mu_{\mathbf{x}}$ имеет вид (5.63) эмпирической меры, т.е. нормированной суммы n дельта-мер, где $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, так что $x_j \neq x_j$ для любых $1 \leq i \neq j \leq n$, и $E_n(\mu) = +\infty$ в противном случае. Таким образом, задача (5.56) вычисления свободной энергии при нулевой температуре и связанная с ней она задача (5.57) нахождения минимизирующей энергию конфигурации n частиц сводятся к отысканию минимума функционала $E_n(\mu)$ на пространстве вероятностных мер. Заметим, что на такой эмпирической мере $\mu = \mu_{\mathbf{x}}$, для которой он конечен, функционал вычисляется в виде интеграла

$$E_n(\mu) = \int\limits_{\mathbb{R}} \tilde{V}(x)\mu(dx) - \frac{1}{2} \iint\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \ln|x-y| \mathbb{I}_{x \neq y} \mu(dx)\mu(dy). \tag{5.64}$$

Его бесконечномерный аналог $\mathcal{E} : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, минимум которого будет определять предел мер, минимизирующих функционалы E_n при $n \to \infty$, а также соответствующий предел свободной энергии, записывается в виде

$$\mathcal{E}(\mu) := \int\limits_{\mathbb{R}} \tilde{V}(x)\mu(dx) - \frac{1}{2} \iint\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \ln|x-y| \mu(dx)\mu(dy). \tag{5.65}$$

Справедливы следующие утверждения, которые мы приводим без доказательств.

Утверждение 5.9. *Пусть* $\mu_n = \arg\inf_{\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})} E_n(\mu), n \in \mathbb{N}$– *меры минимизирующие функционалы* E_n, *а* $\mu_{\text{eq}} := \arg\inf_{\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})} \mathcal{E}(\mu)$ – *(равновесная) мера на которой достигает* *минимума $\mathcal{E}(\mu)$. Такие меры существуют и единственны, а мера μ_{eq} имеет компактный носитель. Имеют место предельные переходы*

$$\mu_n \underset{n\to\infty}{\Longrightarrow} \mu_{\mathrm{eq}}, \tag{5.66}$$

$$\mathfrak{f}_{\tilde{\Lambda}_n}(\beta) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \inf_{\mu\in\mathcal{P}(\mathbb{R})} \mathcal{E}(\mu) = \mathcal{E}(\mu_{\mathrm{eq}}), \tag{5.67}$$

Таким образом эмпирические меры минимизирующие энергию конечного числа частиц слабо сходятся к равновесной мере μ_{eq}, минимизирующей $\mathcal{E}(\mu)$ а свободная энергия сходится к $\mathcal{E}(\mu_{\mathrm{eq}})$. Единственность решения задач о минимизации функционалов следует из их выпуклости, доказательство которой мы оставляем за рамками этого изложения.

Найдем вероятностную меру μ_{eq}, на которой $\mathcal{E}(\mu)$ имеет экстремум. Потребуем чтобы его вариация была равна нулю, при условии $\int d\mu = 1$, которое добавляется с помощью метода множителей Лагранжа.

$$\tag{5.68}$$

Получим

$$\left(\int\limits_{\mathbb{R}} \tilde{V}(x)\delta\mu(dx) - \iint\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \ln|x-y|\mu(dx)\delta\mu(dy) + \alpha\int\limits_{\mathbb{R}} \delta\mu(dx)\right) = 0. \tag{5.69}$$

что приводит нас к уравнению

$$\tilde{V}(x) - \int\limits_{\mathbb{R}} \ln|x-y|\mu(dy) + \alpha = 0, \quad x \in \mathrm{Supp}(\mu), \tag{5.70}$$

которое должно выполняться в точках носителя меры μ. Если посмотреть на это уравнение в пределе $x \to \infty$, видно что оно не может выполняться при сколь угодно больших x, так как по предположению $\tilde{V}$ растет быстрее, чем логарифм. Поэтому носитель распределения обязан быть ограниченным. Продифференцируем полученное уравнение, предполагая, что искомая мера μ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега, а её плотность распределения $f_\mu(x)$ – липшицева функция, т.е. удовлетворяет неравенству $|f_\mu(x) - f_\mu(y)| < c|x-y|$ для некоторого $c > 0$. Заметим, что хотя в этом случае интеграл в левой части (5.70), будучи несобственным интегралом, ограничен равномерно по x, простое дифференцирование под знаком интеграла приводит к особенности подынтегральной функции не интегрируемой абсолютно. Тем не менее, если интеграл понимать как интеграл в смысле главного значения, не трудно показать, что предел, соответствующий главному значению, и дифференцирование можно поменять местами, что даёт

$$\tilde{V}'(x) - V.P.\int \frac{f_\mu(y)}{x-y}dy = 0. \tag{5.71}$$

Далее воспользуемся второй формулой Сохоцкого-Племеля (см. приложение A.1)) чтобы переписать это уравнение в виде

$$2\tilde{V}'(x) + S_\mu(x + \mathbf{i}\varepsilon) + S_\mu(x - \mathbf{i}\varepsilon) = 0, \quad x \in \mathrm{supp}(\mu), \tag{5.72}$$

где S_μ – преобразование Стилтьеса искомой меры, а $\epsilon > 0$ – малая величина добавленная к аргументу функций, для которых во всех формулах подразумевается их предельные значения при $\varepsilon \to +0$. Полученное уравнение можно считать частным случаем *задачи Римана-Гильберта.* Нам нужно найти функцию $S_\mu(x)$, $x \in \mathbb{C}$, аналитичную в $\mathbb{C} \setminus \operatorname{supp} \mu$, заданную граничными условиями (5.72) на разрезе, совпадающем с носителем меры μ, и убыванием

$$S_\mu(z) \sim -\frac{1}{z} \tag{5.73}$$

на бесконечности. Для этого введем функцию

$$P(x) = 2\tilde{V}'(x) S_\mu(x) + S_\mu^2(x). \tag{5.74}$$

Для нее справедливо равенство

$$P(x+\mathbf{i}\varepsilon) - P(x-\mathbf{i}\varepsilon) = 2\tilde{V}'(x)(S_\mu(x+\mathbf{i}\varepsilon) - S_\mu(x-\mathbf{i}\varepsilon)) + S_\mu^2(x+\mathbf{i}\varepsilon) - S_\mu^2(x-\mathbf{i}\varepsilon) \tag{5.75}$$

$$= (2\tilde{V}'(x) + S_\mu(x+\mathbf{i}\varepsilon) + S_\mu(x-\mathbf{i}\varepsilon))(S_\mu(x+\mathbf{i}\varepsilon) - S_\mu(x-\mathbf{i}\varepsilon)) = 0, \tag{5.76}$$

так как что один из сомножителей равен нулю на разрезе, а второй— во всех остальных точках комплексной плоскости, в которых преобразование Стилтьеса аналитично. Таким образом функция $P(x)$ аналитична во всей плоскости $\mathbb{C}$. Кроме того, согласно уравнению (5.72) она имеет конечный порядок роста на бесконечности, $P(x) \sim \dfrac{2\tilde{V}'(x)}{x}$ при $x \to \infty$. В случае, когда $\tilde{V}(x)$ – многочлен, $P(x)$ также многочлен степени $d = \deg P(x) = \deg \tilde{V}(x) - 2$. Предположив, что этот многочлен известен, можно решить уравнение (5.74) и найти меру, обратив преобразование Стилтьеса S_μ. В общем случае многочлен $P(x)$ все еще содержит d свободных параметров (корней многочлена), один из которых фиксируется вероятностной нормировкой меры, а остальные параметризуют $(d-1)$- мерное семейство мер, в котором теперь нужно решать задачу минимизации, подбирая $(d-1)$ параметров.

Простейший случай $d = 1$, в котором $P(x)$ оказывается константой, и ответ для S_μ получается сразу, – случай гауссовых ансамблей. В этом случае потенциал квадратичен,

$$\tilde{V} = \frac{x^2}{4},$$

откуда, учитывая асимптотику (5.73), приводящую к $P(x) = -1$, получим уравнение (5.74) в виде

$$x S_\mu + S_\mu^2 + 1 = 0. \tag{5.77}$$

Выбирая решение этого уравнения, удовлетворяющее (5.73) получим ответ в виде

$$S_\mu(z) = \frac{-x \pm \sqrt{x^2+4}}{2} \tag{5.78}$$

преобразования Стилтьеса полукругового закона Вигнера

$$f_\mu(x) = \lim_{\epsilon \to +0} \frac{1}{\pi} \mathrm{Im} S_\mu(x+\mathbf{i}\varepsilon) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{4-x^2}. \tag{5.79}$$

Глава 6

Точечные процессы

Полученные в предыдущих главах распределения собственных значений случайных матриц в инвариантных ансамблях это частный случай вероятностных мер на точтчных конфигурациях, называемых точечными процессами. Более того, меры которые мы получили имеют дополнительную структуру так называемых детерминантных (в случае $\beta = 1$) и пфаффианных ($\beta = 1, 4$) точечных процессов, которая делает эти модели точно решаемыми в смысле, который мы объясним позже. Ниже мы даем краткое введение в точечные процессы и, в частности, в детерминантные точечные процессы.

Итак, что такое точечный процесс?

Определение 6.1. *Пусть $\mathfrak{X}$ — локально компактное топологическое пространство Хаусдорфа со счетной базой.* Точечная конфигурация ξ *— это локально-конечная функция $\xi\colon \mathfrak{X} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Множество всех точечных конфигураций мы будем обозначать* $\mathrm{Conf}(\mathfrak{X})$.

Чтобы уйти от излишней общности, мы предлагаем читателю представлять в качестве пространства $\mathfrak{X}$ полное сепарабельное метрическое пространство пространство, а еще конкретнее пространство $\mathbb{R}^d$ с топологией порожденной евклидовой метрикой или прямую сумму нескольких таких пространств, которыми мы будем пользоваться в дальнейшем.

Замечание 6.2. *Локальная компактность означает, что у любой точки существует предкомпактная окрестность, т.е. окрестность замыкание которой компактно.*

Для описания точечных конфигураций мы часто будем использовать термин частицы, говоря, что в точке x находится $\xi(x)$ частиц, а в любом другом борелевском подмножестве $A \subset \mathfrak{X}$ сумма значений по всем точкам в этой области. Пусть $\mathcal{B}(\mathfrak{X})$ – борелевская сигма алгебра подмножеств $\mathfrak{X}$. Введем функцию, считающую число частиц $\nu : \mathrm{Conf}(\mathfrak{X}) \times \mathcal{B}(\mathfrak{X}) \to \mathbb{N} \cup \infty$,

$$\nu_\xi(A) = \sum_{\{x \in A : \xi(x) \neq 0\}} \xi(x), \quad \xi \in \mathrm{Conf}(\mathfrak{X}), A \in \mathcal{B}(\mathfrak{X}). \tag{6.1}$$

Локальная конечность означает, у любого $x \in \mathfrak{X}$ есть открытая окрестность U с конечным числом частиц, $\nu_\xi(U) < \infty$. В этом случае любое компактное множество C содержит не более, чем конечное число частиц,

$$\nu_\xi(C) < \infty.$$

Можно показать, что число частиц в точечной конфигурации не более чем счетно. Перенумеруем точки в которых $\xi(x) \neq 0$ некоторым естественным образом $\xi \to \{\dots, x_0, x_1, \dots\}$ элементами некоторого подмножества $\mathcal{I} \subset \mathbb{Z}$ множества целых чисел. Функцию ν_ξ можно интерпретировать как считающую меру,

$$\nu_\xi = \sum_{i \in \mathcal{I}} \xi(x_i) \delta_{x_i}, \tag{6.2}$$

принимающую на борелевских множествах неотрицательные целые (или бесконечное) значения. Таким образом эта функция даёт отображение из пространства точечных конфигураций в пространство целочисленных локально конечных мер на $(\mathfrak{X}, \mathcal{B}(\mathfrak{X}))$.

Определение 6.3. *Считающая мера ν_ξ называется простой, если $\xi(x) \leq 1$ для любых $x \in \mathfrak{X}$.*

Зададим σ-алгебру на $\mathrm{Conf}(\mathfrak{X})$. Пусть $A \in \mathcal{B}(\mathfrak{X})$ — борелевское подмножество. Определим цилиндрические множества формулой

$$C_n^A = \{\xi \in \mathrm{Conf}(\mathfrak{X}) \colon \nu_\xi(A) = n\}$$

(то есть в заданном A содержится ровно n частиц). Пусть $\mathcal{T}(\mathfrak{X})$ — сигма-алгебра, порождённая всеми C_n^A.

Определение 6.4. Точечный процесс *— это (вероятностная) мера на* $(\mathrm{Conf}(\mathfrak{X}), \mathcal{T}(\mathfrak{X}))$.

Для задания меры достаточно определить $\mathbb{P}(\nu_\xi(A_1) = n_1, \dots, \nu_\xi(A_k) = n_k, \dots)$ для дизъюнктных подмножеств (то есть таких, что $A_i \cap A_j = \emptyset$).

Определение 6.5. *Точечный процесс называется* простым, *если для каждой точки $x \in \mathfrak{X}$ выполнено $\mathbb{P}(\xi(x) > 1) = 0$.*

Пример 6.6. *Пуассоновский процесс: $\mathfrak{X} = \mathbb{R}^n$, простой с интенсивностью λ. Задаётся соотношением*

$$\mathbb{P}(\nu_\xi(A) = k) = \frac{(\lambda|A|)^k}{k!} e^{-\lambda|A|},$$

где $|A|$ — мера Лебега множества A, то есть его объём (на самом деле, не обязательно именно мера Лебега, но это самый типичный пример). Для $A \cap B = \emptyset$ имеем

$$\mathbb{P}(\nu_\xi(A) = k, \nu_\xi(B) = m) = \mathbb{P}(\nu_\xi(A) = k)\mathbb{P}(\nu_\xi(B) = m).$$

Пример 6.7. *Процесс Бернулли: $\mathfrak{X} = \mathbb{Z}^n$, простой, задаётся соотношением*

$$\mathbb{P}(\nu_\xi(x) = 1) = \rho, \qquad \mathbb{P}(\nu_\xi(x) = 0) = 1 - \rho,$$

а для различных точек $x, y \in \mathfrak{X}$ имеем

$$\mathbb{P}(\nu_\xi(x) = k, \nu_\xi(y) = m) = \mathbb{P}(\nu_\xi(x) = k)\mathbb{P}(\nu_\xi(y) = m).$$

Часто вместо задания вероятностей цилиндрических множеств удобнее описывать процесс через корреляционные функции. Для этого в каждой случайной конфигурации перенумеруем частицы, т.е. составим список $\xi \to \{\dots, x_0, x_1, \dots\}$ точек $x \in \mathfrak{X}$, таких что $\xi(x) \neq 0$, причем каждая точка повторяется в списке $\xi(x)$ раз. Можно показать, что такую нумерация можно задать измеримым относительно $\mathcal{T}(\mathfrak{X})$ образом.

Определение 6.8. *Пусть* $(\mathrm{Conf}(\mathfrak{X}), \mathcal{T}(\mathfrak{X}), \mathbb{P})$ *– точечный процесс, и* $\xi \to \{\dots, x_0, x_1, \dots\}$ *измеримая нумерация частиц. Тогда* корреляционной мерой *на* $\mathfrak{X}^n$*, где* $n \geqslant 1$*, называется такая мера* R_n*, которая удовлетворяет равенству*

$$\int\limits_{\mathfrak{X}^n} f R_n = \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left(\sum_{i_1 \neq \dots \neq i_n} f(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) \right)$$

для произвольной функции $f\colon \mathfrak{X}^n \to \mathbb{R}$ *с компактным носителем.*

Корреляционные меры позволяют естественным образом вычислять так называемые факториальные моменты случайной меры ν_ξ произвольных борелевских множеств, т.е. чисел частиц попадающих в эти множества. Пусть $A \subset \mathfrak{X}$, тогда

$$R_n(A^n) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left(\frac{\nu_\xi(A)!}{(\nu_\xi(A) - n)!} \right) \tag{6.3}$$

Для нескольких дизъюнктных множеств $A_1, \dots, A_k \in \mathfrak{X}$ будем иметь

$$R_n(A_1^{n_1}, \dots, A_k^{n_k}) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left(\prod_k \frac{\nu_\xi(A_k)!}{(\nu_\xi(A_k) - n_k)!} \right) \tag{6.4}$$

где $n_1 + \ldots + n_k = n$.

Факториальные моменты — это линейная комбинация обычных моментов, $\mathbb{E} \left(\dfrac{x!}{(x-k)!} \right) = \mathbb{E}(x(x-1)\dots(x-k+1))$, которые, в свою очередь, выражаются через первые посредством соотношения

$$\mathbb{E}(x^n) = \sum_{k=1}^{n} s(n,k) \mathbb{E} \left(\frac{x!}{(x-k)!} \right), \tag{6.5}$$

где $s(n,k)$ — числа Стирлинга 2-го рода. Последние удовлетворяют соотношениям

$$s(n,k) = ks(n-1,k) + s(n-1,k-1), \qquad\qquad s(n,1) = s(n,n) = 1$$

Упражнение 6.9. *Докажите формулы (6.3-6.5).*

Определение 6.10. *Пусть* R_n *— корреляционная мера на* $\mathfrak{X}^n$*, и пусть* μ *— такая мера на* $\mathfrak{X}$ *(будем называть ее референтной мерой), что* R_n *абсолютно непрерывна относительно* $\mu^{\otimes n}$*. Тогда плотность* $\rho_n(x_1, \dots, x_n)$ *меры* R_n *относительно* $\mu^{\otimes n}$ *называется* корреляционной функцией*.*

Из определения в частности следует, что корреляционные функции – симметрические функции своих аргументов.

Пример 6.11. *Пусть* $\mathfrak{X}$ *метрическое пространство,* $x \in \mathfrak{X}$*, и* $B_\epsilon(x)$ *– шар радиуса* ϵ *с центром в точке* x*. Тогда*

$$\rho_n(x_1, \dots, x_n) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\mathbb{E}\nu_\xi(B_\epsilon(x_1)) \cdots \nu_\xi(B_\epsilon(x_n))}{\mu(B_\epsilon(x_1)) \cdots \mu(B_\epsilon(x_n))}. \tag{6.6}$$

Далее мы сузим изложение, ограничившись простыми точечными процессами. Они характеризуются следующими простыми свойствами.

- Для простых точечных процессов $\rho(x,x,\dots)=0$
- Для простых точечных процессов имеет место соотношение и $A\subset\mathfrak{X}$

$$\mathbb{P}(\nu_\xi(A)\geq k)=\frac{1}{k!}\int\limits_{A^k}\rho_k(x_1,\dots,x_k)d\mu_1\dots d\mu_k. \tag{6.7}$$

В частности, если $\mathfrak{X}=\mathbb{R}$ и $(\mathrm{Conf}(\mathfrak{X}),\mathcal{T}(\mathfrak{X})$ – простой точечный процесс, то

$$\rho(x_1,\dots,x_n)\mu(dx_1)\dots\mu(dx_n) \tag{6.8}$$

$$=\quad \mathbb{P}(\text{частицы есть в каждом из } [x_1,x_1+dx_1],\dots,[x_n,x_n+dx_n]), \tag{6.9}$$

а если μ — дискретная мера, например частицы живут на решетке, то

$$\rho_n(x_1,\dots,x_n)\mu(x_1)\dots\mu(x_n)=\mathbb{P}(\text{частицы есть в каждом из } x_1,\dots,x_n).$$

Выразим через корреляционные функции матожидания случайных величин, связанных с мультипликативными функционалами простых точечных процессов.

Пусть $(\mathrm{Conf}(\mathfrak{X}),\mathcal{T}(\mathfrak{X}),\mathbb{P})$ – простой точечный процесс, а $g\colon\mathfrak{X}\to\mathbb{R}$ — функция с компактным носителем. Перенумеруем точки x случайной точечной конфигурации, в которых $\xi(x)\neq 0$, $\xi=\{x_1,x_2,\dots\}\in\mathrm{Conf}(\mathfrak{X})$, и вычислим среднее от произведения $(1+g(x_i))$ по всем таким точкам.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\mathbb{P}\left(\prod_{i=1}^{\infty}(1+g(x_i))\right) &= \sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{E}_\mathbb{P}\left(\sum_{i_1<\dots<i_k}g(i_1)\dots g(i_k)\right)\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\mathbb{E}_\mathbb{P}\left(\sum_{i_1\neq\dots\neq i_k}g(i_1)\dots g(i_k)\right)\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\int\limits_{\mathfrak{X}^k}\prod_{i=1}^{k}g(x_i)\rho(x_1,\dots,x_k)d\mu_1\dots d\mu_k.\end{aligned} \tag{6.10}$$

Выбирая различные функции $g(x)$ можно вычислять

Пример 6.12. ***Вероятность дырки.***

Пусть $A\subset\mathfrak{X}$, $g(x)=-\mathbb{I}_A$. Тогда

$$\mathbb{E}\left(\prod_i(1-\mathbb{I}_A(x_i))\right)=\mathbb{P}(\nu_\xi(A)=0)$$

это вероятность "дырки"(что в A ничего не лежит). Подставляя то, что мы получили выше, имеем

$$\mathbb{E}\left(\prod_i(1-\mathbb{I}_A(x_i))\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\int\limits_{A^k}\rho_k(x_1,\dots,x_k)d\mu_1\dots d\mu_k.$$

Эту формулу можно вывести и из чисто вероятностных соображений. Заметим, что согласно (6.7) с номером k в правой части слагаемое есть с точностью до знака вероятность того, что в A содержится по меньшей мере k частиц. Тогда выражение для вероятности дырки простое следствие принципа включения-исключения.

Пример 6.13. ***Вероятность*** k ***частиц в области*** A***.***

Пусть $A \subset \mathfrak{X}$, $g_z(x) = -z\mathbb{I}_A$. *Тогда рассмотрим*

$$\frac{d^n}{dz^n}\left(\prod_i (1 - z\mathbb{I}_A(x_i))\right)\Bigg|_{z=1} = (-1)^n \sum_{i_1<\ldots<i_n} \mathbb{I}_A(x_i) \prod_{i\neq i_1,\ldots,i_n} (1 - \mathbb{I}_A(x_i)).$$

С точностью до знака, мы построили индикатор события, состоящего в том, что в A *содержится ровно* n *частиц:*

$$(-1)^n \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \frac{d^n}{dz^n}\left(\prod_i (1 - z\mathbb{I}_A(x_i))\right)\Bigg|_{z=1} = \mathbb{P}(\nu_\xi(A) = n).$$

Пример 6.14. ***Производящие функции, моменты, кумулянты и кластерные корреляуионные функции.***

Пусть $(\mathrm{Conf}(\mathfrak{X}), \mathcal{T}(\mathfrak{X}), \mathbb{P})$ *– простой точечный процесс в метрическом пространстве* $\mathfrak{X}$*. Зафиксируем точки* $y_1, y_2, \ldots \in \mathfrak{X}$ *и возьмём* $g_{\mathbf{z}}(x) = \sum\limits_i z_i \delta^\mu_{y_i}(x)$*, где функция (точнее функционал)* $\delta^\mu_y(x)$ *понимается следующим образом. Введем функцию*

$$\delta^\epsilon_y(x) := \frac{\mathbb{I}_{B_\epsilon(y)}(x)}{\mu(B_\epsilon(y))}, \tag{6.11}$$

а выражения ниже с функцией $\delta^\mu_y(x)$ *в будем понимать, как выражения с* $\delta^\epsilon_y(x)$ *под знаком предела с* $\epsilon \to 0$*. В частности, интегрирование её произведения с функцией* $f(x)$*, непрерывной в* $x = y$*, даёт*

$$\int_{\mathfrak{X}} f(x)\delta^\mu_y(x)\mu(dx) = f(y). \tag{6.12}$$

Если $\mathfrak{X} = \mathbb{R}^d$ *а* μ *– мера Лебега* $\mu(d^n x) = d^n x$*, то* $\delta^\mu_y(x)$ *имеет смысл дельта функции Дирака,* $\delta^\mu_y(x) = \delta(x - y)$*.*

Тогда

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\prod_{i=1}^{\infty}(1 + g_{\mathbf{z}}(x_i))\right) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\int\limits_{\mathfrak{X}^k} \rho_k(x_1,\ldots,x_k)\prod_{i=1}^{k} g(x_i)\mu(dx_1)\ldots\mu(dx_k) \qquad (6.13)\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{i_1,\ldots,i_k}\int\limits_{\mathfrak{X}^k} \rho_k(x_1,\ldots,x_k)\delta^\mu_{y_{i_1}}(x_1)\ldots\delta^\mu_{y_{i_1}}(x_k) z_{i_k}\ldots z_{i_k}\mu(dx_1)\ldots\mu(dx_k).
\end{aligned}$$

Учитывая, что процесс простой, т.е. $\rho(x, x, \ldots) = 0$*, мы можем продолжить равенство так:*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{i_1\neq\ldots\neq i_k} z_{i_1}\ldots z_{i_k}\rho_k(y_1,\ldots,y_k) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i_1<\ldots<i_k} z_{i_1}\ldots z_{i_k}\rho_k(y_1,\ldots,y_k) =: P(\mathbf{z}). \tag{6.14}$$

Таким образом полученное выражение имеет смысл производящей функции корреляционных функций.

Рассмотрим набор случайных величин,

$$\eta^\epsilon_i = \frac{\nu_\xi(B_\epsilon(y_i))}{\mu(B_\epsilon(y_i))}. \tag{6.15}$$

Можно построить из них производящую функцию моментов

$$\begin{aligned} M_{\eta^\epsilon}(\mathbf{z}) &= \mathbb{E}\exp\left(\sum_i z_i\eta_i^\epsilon\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{i_1,\dots,i_k}\mu_k(\eta^\epsilon_{i_1},\dots,\eta^\epsilon_{i_k})z_{i_1}\cdots z_{i_k} \qquad (6.16)\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{i_1\neq\cdots\neq i_k}\mu_k(\eta^\epsilon_{i_1},\dots,\eta^\epsilon_{i_k})z_{i_1}\cdots z_{i_k} + (\textit{слагаемые с повторениями}), \end{aligned}$$

где второй строчке сумма моментов, соответствующих произведениям попарно различных величин η_i^ϵ, выделена явно. Заметим, что после взятия предела $\epsilon \to 0$ эти моменты превращаются в корреляционные функции

$$\lim_{\epsilon\to 0}\mu_k(\eta^\epsilon_{i_1},\dots,\eta^\epsilon_{i_k}) = \rho_k(y_{i_1},\dots,y_{i_k}), \qquad (6.17)$$

т.е. почленный предел выделенной суммы совпадает с $P(\mathbf{z})$.

Взяв логарифм, перейдем, как обычно, к производящей функции кумулянтов,

$$\begin{aligned} C_{\eta^\epsilon}(\mathbf{z}) &= \ln M_{\eta^\epsilon}(\mathbf{z}) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{i_1,\dots,i_k}c_k(\eta^\epsilon_{i_1},\dots,\eta^\epsilon_{i_k})z_{i_1}\cdots z_{i_k} \qquad (6.18)\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{i_1\neq\cdots\neq i_k}c_k(\eta^\epsilon_{i_1},\dots,\eta^\epsilon_{i_k})z_{i_1}\cdots z_{i_k} + (\textit{слагаемые с повторениями}),, \end{aligned}$$

которые связаны с моментами соотношением (1.18). Здесь в второй строке мы опять явно выделили сумму без повторений. Очевидно, что почленный предел этой суммы без повторений, и подобная сумма без повторений выделенная из $\ln P(\mathbf{z})$ совпадают, т.е.

$$\lim_{\epsilon\to 0}C_{\eta^\epsilon}(\mathbf{z}) = \ln P(\mathbf{z}) + (\textit{слагаемые с повторениями}). \qquad (6.19)$$

При этом пределы кумулянтов и моментов с повторениями плохо определены, но они не влияют на слагаемые без повторений и, следовательно, пределы кумулянтов без повторений связаны с корреляционными функциями, как кумулянты с моментами.

Величины

$$t_k(y_{i_1},\dots,y_{i_k}) = (-1)^{k-1}\lim_{\epsilon\to 0}c_k(\eta^\epsilon_{i_1},\dots,\eta^\epsilon_{i_k}), \quad i_1\neq\cdots\neq i_k \qquad (6.20)$$

называются кластерными корреляционными функциями. Согласно сказанному выше их производящая функция

$$T(\mathbf{z}) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\sum_{i_1<\ldots<i_k}z_{i_1}\ldots z_{i_k}t_k(y_1,\dots,y_k) \qquad (6.21)$$

выражается через логарифм $P(\mathbf{z})$

$$\ln P(\mathbf{z}) = T(\mathbf{z}) + (\textit{слагаемые с повторениями}). \qquad (6.22)$$

Перераскладывая логарифм ряда в новый ряд последовательно получим

$$\begin{aligned} t_1(x) &= \rho_1(x), \qquad (6.23)\\ t_2(x_1,x_2) &= \rho_1(x_1)\rho_1(x_2) - \rho(x_1,x_2), \qquad (6.24) \end{aligned}$$

и так далее.

6.1 Детерминантный точечный процесс

Важным примером точечного процесса является детерминантный точечный процесс.

Определение 6.15. *Точечный процесс* $(\mathbb{P}, \mathrm{Conf}(\mathfrak{X}), \mathcal{T})$ *называется детерминантным если существует измеримая функция* $K : \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \to \mathbb{C}$, *такая что все корреляционные функции представимы в виде*

$$\rho_n(x_1, \dots, x_n) = \det_{1 \leqslant i,j \leqslant n}(K(x_i, x_j)), \quad n = 1, 2, 3, \dots. \tag{6.25}$$

Замечание 6.16. *По построению сразу получается, что детерминантный процесс — простой.*

Применим к детерминантному процессу ту теорию, которую мы развили выше. Подставляя детерминантные выражения для корреляционных функций а формулу (6.10) получим

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\prod_{i=1}^{\infty}(1 + g(x_i))\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\int\limits_{\mathbb{R}^k}\det_{1 \leqslant i,j \leqslant n}(K(x_i, x_j)g(x_i))d\mu(x_1)\dots d\mu(x_k). \tag{6.26}$$

Как понимать ряд в правой части,

Заметим, что если A — некоторая матрица, то определитель матрицы $(I + A)$ можно записать в виде раздожения по диагональным минорам матрицы A

$$\det(I + A) = 1 + \sum_i A_{ii} + \sum_{i_1 < i_2}\det\begin{pmatrix} A_{i_1 i_1} & A_{i_1 i_2} \\ A_{i_2 i_1} & A_{i_2 i_2}\end{pmatrix} + \dots \tag{6.27}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{i_1, \dots, i_k}\det_{1 \le l,m \le k}\{A_{i_l, i_m}\} \tag{6.28}$$

Если теперь думать о $g(x)K(x, y)$ — как о ядре интегрального оператора $\widehat{gK} \colon L^2(\mathfrak{X}, \mu) \to L^2(\mathfrak{X}, \mu)$, заданного соотношением

$$(\widehat{gK}f)(x) = \int\limits_{\mathfrak{X}} g(x)K(x, y)f(y)d\mu(y),$$

мы видим, что правая часть (6.26) также есть разложение по диагональным минорам подобного определителя

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\prod_{i=1}^{\infty}(1 + g(x_i))\right) = \det(1 + \widehat{gK})_{L^2(\mathfrak{X}, \mu)}. \tag{6.29}$$

В правой части стоит определитель Фредгольма оператора, действующего на функциональном пространстве, одно из определений которого для случая интегрального оператора дается рядом в правой части формулы (6.26). Конечно, для того, чтобы это выражением имело смысл, сумма ряда должна быть хорошо определена. Однако, отложим пока математические подробности и применим это общее выражение к величинам, обсуждавшимся в примерах 6.12-6.14, обращаясь с определителями бесконечномерных операторов как с матрицами.

Вероятность дырки:

$$\mathbb{P}(\nu_\xi(A)=0)=\det(1-\widehat{K}\,|_A)_{L^2(\mathfrak{X},\mu)}=\det(1-\widehat{K})_{L^2(A,\mu)}; \qquad (6.30)$$

Вероятность k частиц в множестве $A\subset\mathfrak{X}$:

$$\mathbb{P}(\nu_\xi(A)=k)=\left.\frac{d^k}{dz^k}\right|_{z=-1}\det(1+z\widehat{K})_{L^2(A,\mu)}. \qquad (6.31)$$

Кластерные корреляционные функции: Согласно формуле (6.22) коэффициенты производящей функции (6.21) кластерных функций ищутся как коэффициенты при мономах, в которые входят только параметры z_i с разными номерами, в разложении

$$\ln P(\mathbf{z})=\ln\det\left(1+\widehat{g_{\mathbf{z}}K}\right)_{L^2(A,\mu)}=\operatorname{Tr}\ln\left(1+\widehat{g_{\mathbf{z}}K}\right)=\sum_{n\geqslant1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\operatorname{Tr}(g_{\mathbf{z}}K)^n, \qquad (6.32)$$

где $g_{\mathbf{z}}(x)=\sum\limits_i z_i\delta^\mu_{y_i}(x)$. Здесь мы выразили логарифм определителя оператора через след логарифма того же оператора и разложили последний в ряд по степеням оператора $\widehat{g_{\mathbf{z}}K}$. Для следов степеней последнего получим

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr}(\widehat{g_{\mathbf{z}}K})^k &= \int\limits_{\mathfrak{X}^k} g(x_1)K(x_1,x_2)g(x_2)K(x_2,x_3)\cdots g(x_k)K(x_k,x_1)\mu(dx_1)\cdots\mu(dx_k)\\ &= \sum_{i_1,\dots,i_k}\int\limits_{\mathbb{R}^k}\delta^\mu_{y_1}(x_1)K(x_1,x_2)\cdots\delta^\mu_{y_k}(x_k)K(x_k,x_1)z_{i_1}\cdots z_{i_k}d\mu(x_1)\cdots\mu(dx_k)\\ &= \sum_{i_1,\dots,i_k} z_{i_1}\dots z_{i_k}K(y_{i_1},y_{i_2})\dots K(y_{i_k},y_{i_1}). \qquad (6.33)\end{aligned}$$

Коэффициент при мономе $z_{i_1}\dots z_{i_k}$ без повторений, $i_1\neq\dots\neq i_k$, получается равен

$$\frac{1}{k}\sum_{\sigma\in S_k}K(y_{i_{\sigma(1)}},y_{i_{\sigma(2)}})\dots K(y_{i_{\sigma(k)}},y_{i_{\sigma(1)}})=t_k(y_{i_1},\dots,y_{i_k}). \qquad (6.34)$$

Например, в случае, когда ядро эрмитово, t_2 задаётся квадратом модуля корреляционной функции: $K(x,y)=K^*(y,x)\ \Rightarrow\ t_2(x,y)=K(x,y)K(y,x)=|K(x,y)|^2$.

Как мы уже поняли, оператор $\widehat{K}$ играет ключевую роль в задании детерминантного точечного процесса. Позже мы обсудим некоторые математические подробности теории определителей Фредгольма более детально, а сейчас заметим, что чтобы оператор K задавал точечный процесс, необходимо, все корреляционные функции были неотрицательны $\rho_n\geqslant0$, а определители Фредгольма в правой части формул (6.30,6.31) были конечны и хорошо определены как минимум для компактных множеств A. Первое условие выполнено например когда оператор $\widehat{K}\geq0$ – положительный, второе, когда он локально ядерный (определение ядерного оператора мы дадим позже.)

Напоследок отметим свойства детерминантных процессов.

1. Детерминантный процесс — простой (уже отмечали выше).

2. Вероятность того, что число частиц кончено или бесконечно, равна 0 или 1 в зависимости от того, конечна или бесконечно величина $\mathrm{Tr}\widehat{K}$.

3. Если число частиц равно n с вероятностью 1, то $\widehat{K}$ — ортогональный проектор ($\mathrm{rank}\widehat{K} = n$, $\widehat{K}^2 = \widehat{K}$).

4. Теорема Макки-Сошникова.

   Теорема 6.17. *Пусть* $\widehat{K}$ *– самосопряженный, положительный, локально-ядерный ограниченный оператор на* $L_2(\mathfrak{X}, \mu)$*. Его интегральное ядро* $K(x, y)$ *есть корреляционное ядро детерминантного точечного процесса тогда и только тогда, когда* $0 \leq K \leq 1$.

ДАЛЕЕ РЕДАКТИРОВАНИЕ ПРОДОЛЖАЕТСЯ

6.2 Биортогональный ансамбль.

Рассмотрим точечный процесс на прямой, заданный условием

$$\mathbb{P}(x_1 \in dx_1, \dots, x_n \in dx_n) = \frac{1}{Z_n} \det_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (\varphi_i(x_j)) \det_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (\psi_i(x_j))\, \mu(dx_1) \dots \mu(dx_n),$$

при условии, что $\det\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \langle \varphi_i, \psi_j \rangle \neq 0$ ($\varphi, \psi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$). Тогда это — детерминантный точечный процесс. Более того, его ядро (мы получили в прошлый раз) имеет вид

$$K_n(x, y) = \sum_{i,j} \varphi_i(x) A_{ij}^{-t} \psi_j(y),$$

где $A_{ij} = \langle \varphi_i, \psi_j \rangle_{L^2(\mathbb{R}, \mu)}$, $\langle f, g \rangle = \int fg d\mu$.

6.3 Корреляционные функции в унитарных ансамблях (онлайн конспект)

Сегодня у нас $\beta = 2$. Пусть имеется распределение вида

$$f(\lambda_1, \ldots, \lambda_N) = \frac{1}{Z(\beta, N)N!} \prod_{i<j} |\lambda_i - \lambda_j|^2 \prod_{i=1}^{N} e^{-V(\lambda_i)}$$

Здесь у нас все $\lambda_i \in \mathfrak{X}$, где $\mathfrak{X} = \mathbb{R}, [-\pi, \pi], \mathbb{R}_{\geqslant 0}$. Вес $e^{-V(x)}$ задаёт скалярное произведение в $L^2(\mathfrak{X}, e^{-V(x)})$ по правилу

$$< f, g >= \int\limits_{\mathfrak{X}} fx)g(x)e^{-V(x)}dx$$

для всех $f, g \in L^2(\mathfrak{X}, e^{-V(x)})$.

Нормировочный множитель Z вычисляется из условия того, что интеграл по всему пространству равен единице. Иными словами, если $m_i(x) = x^i$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, то

$$Z = \frac{1}{N!} \int\limits_{\mathfrak{X}^N} \prod_{i<j} |\lambda_i - \lambda_j|^2 \prod_{i=1}^{N} e^{-V(\lambda_i)} d\lambda_i = \frac{1}{N!} \int\limits_{\mathfrak{X}^N} \det_{1\leqslant i,j\leqslant N}(m_{i-1}(\lambda_j)) \det_{1\leqslant k,l\leqslant N}(m_{k-1}(\lambda_l)) \prod_{i=1}^{N} e^{-V(\lambda_i)} d\lambda_i.$$

Утверждение 6.18. *(Формула Андреева, Andreief, 1883): пусть $f_1, \ldots, f_N$, $g_1, \ldots, g_N$ — интегрируемые в $\mathfrak{X}$ функции. Тогда:*

$$\frac{1}{N!} \int\limits_{\mathfrak{X}^N} \det_{1\leqslant i,j\leqslant N}(f_i(\lambda_j)) \det_{1\leqslant k,l\leqslant N}(g_k(\lambda_l)) \prod_{i=1}^{N} d\lambda_i = \det_{1\leqslant i,j\leqslant N} \left(\int\limits_{\mathfrak{X}^N} g_i(\lambda) f_j(\lambda) d\lambda \right).$$

Доказательство. Для доказательства используется формула Коши-Бине (ЗДЕСЬ МОЖНО НЕСКОЛЬКО ПОДРОБНЕЕ ПРО НЕЁ НАПИСАТЬ). □

Используя формулу Андреева, мы можем продолжить наше равенство и получить в итоге $Z = \det H$, где матрица H имеет вид $H_{ij} =< m_{i-1}, m_{j-1} >$.

Пусть $p_i(x)$ и $q_i(x)$ — два произвольных набора приведённых многочленов (старший коэффициент равен единице), степени которых есть $\deg p_i = \deg q_i = i$. Тогда мы можем переписать Z в виде матрицы от p_i и q_i в виде $Z = \det H$, где $H_{ij} =< p_i, q_j >$. Видно, что Z не зависит от выбора этих многочленов (если $\det H \neq 0$).

Определим $f_k(x_1, \ldots, x_k)$ — корреляционную функцию порядка k. По смыслу это будет

$$\mathbb{P}(k \text{ частиц находится в отрезках } [x_1, x_1{+}dx_1], \ldots, [x_k, x_k{+}dx_1]) = \rho_k(x_1, \ldots, x_k)dx_1, \ldots dx_k.$$

Отметим, что получившаяся мера не вероятностная, интеграл по всему пространству не равен единице (а чему он равен, мы увидим чуть позже).

Пусть $f(\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$ — плотность распределения координат N частиц, симметричных относительно действия S_N ($f(\lambda_{\sigma(1)}, \ldots, \lambda_{\sigma(N)}) = f(\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$, где $\sigma \in S_N$). Тогда корреляционные функции будут, очевидно, $S_N(x_1, \ldots, x_N) = N!f(x_1, \ldots, x_N)$, а также

$$S_N(x_1, \ldots, x_k) = \frac{N!}{(N-k+1)!} \int\limits_{\mathfrak{X}^{N-k}} f(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_N) dx_{k+1} \ldots dx_N.$$

Вернёмся к тому, что мы делали выше. Имеем

$$\rho_N(x_1,\dots,x_N)=\frac{1}{Z}\Delta^2(x_1,\dots,x_N)\prod_{i=1}^{N}e^{-V(\lambda_i)}=\frac{1}{\det H}\det_{1\leqslant i,j\leqslant N}(p_{i-1}(x_j))\det_{1\leqslant k,l\leqslant N}(q_{k-1}(x_l))\prod_{i=1}^{N}e^{-V(\lambda_i)}$$

Обозначив $H^{-t}=(H^{-1})^T$, мы можем продолжить равенство следующим образом:

$$\rho_N(x_1,\dots,x_N)=\det\sum_{k,l=1}^{N}p_{k-1}(x_i)H^{-t}_{kl}q_{l-1}(x_j)\exp\left(-\frac{V(x_i)+V(x_j)}{2}\right)=\det_{1\leqslant i,j\leqslant N}(K_N(x_i,x_j)),$$

где $K_N(x_i,x_j)=\sum\limits_{k,l=1}^{N}p_{k-1}(x_i)H^{-t}_{kl}q_{l-1}(x_j)\exp\left(-\frac{V(x_i)+V(x_j)}{2}\right)$ — *корреляционное ядро.*

Оказывается, аналогичное можно проделать с произвольным k.

Теорема 6.19. $\rho_N(x_1,\dots,x_k)=\det\limits_{1\leqslant i,j\leqslant k}(K_N(x_i,x_j))$.

Доказательство теоремы отложим на потом, а пока опишем свойства корреляционного ядра.

1. $K_N(x,y)$ не зависит от выбора p_i и q_j.
2. $\int\limits_{\mathfrak{X}}K_N(x,x)dx=N$ (или $\operatorname{Tr}K=N$).
3. $\int\limits_{\mathfrak{X}}K_N(x,y)K_N(y,z)dy=K_N(x,z)$ (или $K*K=K$ — идемпотентность оператора K)

Доказательство. Докажем свойства ядра. Имеем для второго свойства:

$$\int\limits_{\mathfrak{X}}K_N(x,x)dx=\sum_{k,l=1}^{N}\int\limits_{\mathfrak{X}}p_{k-1}(x)H^{-t}_{kl}q_{l-1}(x)e^{-V(x)}dx=\sum_{k,l=1}^{N}H_{kl}H^{-1}_{lk}=\operatorname{Tr}I_N=N,$$

потому что $\int\limits_{\mathfrak{X}}p_{k-1}(x)q_{l-1}(x)dx=<p_{k-1},q_{l-1}>=H_{kl}$. Аналогично для третьего свойства:

$$\int\limits_{\mathfrak{X}}K_N(x,y)K_N(y,z)dy=$$

$$=\int\limits_{\mathfrak{X}}\sum_{i,j=1}^{N}p_{i-1}(x)H^{-t}_{ij}q_{j-1}(y)\exp\left(-\frac{V(x)+V(y)}{2}\right)\sum_{k,l=1}^{N}p_{k-1}(y)H^{-t}_{kl}q_{l-1}(z)\exp\left(-\frac{V(y)+V(z)}{2}\right)dy=$$

$$=\exp\left(-\frac{V(x)+V(z)}{2}\right)\sum_{i,j,k,l=1}^{N}p_{i-1}(x)H^{-t}_{ij}H_{kj}H^{-t}_{kl}q_{l-1}(z)=$$

$$=\exp\left(-\frac{V(x)+V(z)}{2}\right)\sum_{i,j,l=1}^{N}p_{i-1}(x)H^{-t}_{ij}\delta_{jl}q_{l-1}(z)=K_N(x,z).$$

□

Чтобы доказать теорему, сначала докажем так называемую *лемму Дайсона.*

Лемма 6.20. $\int\limits_{\mathfrak{X}} \det\limits_{1\leqslant i,j\leqslant k} K_N(x_i,x_j)dx_k = (N-k+1) \det\limits_{1\leqslant i,j\leqslant k-1} K_N(x_i,x_j)$

Доказательство. Распишем определитель по определению

$$\int\limits_{\mathfrak{X}} \det_{1\leqslant i,j\leqslant k} K_N(x_i,x_j)dx_k = \sum_{\sigma\in S_k}(-1)^\sigma \int\limits_{\mathfrak{X}} \prod_{i=1}^{k} K_N(x_i,x_{\sigma(i)})dx_k =$$

$$= \sum_{\sigma\in S_k}(-1)^\sigma \prod_{i=1}^{k-1} K_N(x_i,x_{\sigma(i)}) \int\limits_{\mathfrak{X}} K_N(x_k,x_k)dx_k + \sum_{\sigma\in S_k,\sigma(k)\neq k} C_\sigma \int\limits_{\mathfrak{X}} (-1)^\sigma K_N(x_k x_{i_1})K_N(x_{i_1}x_{i_2})\dots K_N(x_{i_s}x$$

Здесь перестановка σ содержит цикл $(k,i_1,i_2,\dots,i_s)$, C_σ означает произведение ядер, в которые не входит x_k. Первое слагаемое согласно второму свойству корреляционных ядер превращается в $N \det\limits_{1\leqslant i,j\leqslant k-1} K_N(x_i,x_j)$. Ко второму слагаемому надо применить третье свойство корреляционных ядер, и небольшое усилие позволяет понять, что оно равно в точности $-(k-1) \det\limits_{1\leqslant i,j\leqslant k-1} K_N(x_i,x_j)$. Таким образом, лемма доказана. □

Теперь из леммы Дайсона и свойства

$$S_N(x_1,\dots,x_k) = \frac{N!}{(N-k+1)!} \int\limits_{\mathfrak{X}^{N-k}} f(x_1,\dots,x_k,x_{k+1},\dots,x_N)dx_{k+1}\dots dx_N.$$

теорема следует сразу.

В частности, для $\rho_1(x) = K_N(x,x)$, мы имеем $\int\limits_{\mathfrak{X}} \rho_1(x)dx = N$ — ожидаемый результат (общее количество частиц в пространстве), потому что по смыслу $\int\limits_{A} \rho_1(x)dx$ есть математическое ожидание числа частиц в множестве A.

6.4 Детерминант Фредгольма (онлайн конспект)

Итак, в прошлый раз мы определили корреляционное ядро $K(x, y)$ и корреляционные функции $\rho(x_1, \ldots, x_n) = \det\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n}(K(x_i, x_j))$. Сегодня мы поглядим на всё это дело с точки зрения функционального анализа.

У нас имеются: пространство $\mathfrak{X}$, пространство конфигураций $\mathrm{Conf}(\mathfrak{X})$ (пространство точек), имеется подмножество $A \subset \mathfrak{X}$. Мы рассматриваем интегральный оператор $\widehat{(K)}\colon L^2(A, \mu) \to L^2(A, \mu)$, действующий по формуле

$$(\widehat{K}f)(x) = \int\limits_A K(x, y)f(y)d\mu(y).$$

Тогда *детерминант Фредгольма* — это определитель $\det(1 + \widehat{K})_{L^2(A,\mu)}$. Как мы помним, вероятность для нулевого числа частиц есть $\mathbb{P}(V_\xi(A) = 0) = \det(1 - \widehat{K})_{L^2(A,\mu)}$, где $\xi \in \mathrm{Conf}(\mathfrak{X})$. При этом детерминант Фредгольма представляется в виде ряда

$$\det(1 + \widehat{K})_{L^2(A,\mu)} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!} \int\limits_{A^n} \det_{1\leqslant i,j\leqslant n}(K(x_i, x_j))d\mu(x_1)\ldots d\mu(x_n).$$

Отметим, что если точек в рассматриваемых конфигурациях конечное число, то ряд превращается в конечную сумму.

Есть два подхода к пониманию детерминантов Фредгольма (к тому, что это такое). Один из них восходит к самому Фредгольму и подразумевает, что мы рассматриваем интеграл как предел конченых величин (и тогда матрицы все конечны, у них есть миноры и т.п.). Нам нужно тогда, чтобы ряд сходился, а также (чтобы можно было переставить сумму и интеграл) сходимость должна быть равномерной на компактных множествах, должна быть ограниченность некоторой интегрируемой функцией сверху — в этом случае можно применить теорему об ограниченной сходимости. Более или менее, мы этим всем пользовались в прошлый раз, хотя явно этого не обговаривали (то есть вычисления-то мы проводили, а проверку оставили на потом). Наша цель сейчас — навести строгость, то есть понять, каковы должны быть ядра $K(x_i, x_j)$, чтобы всё, что написано, имело смысл.

Про второй подход мы поговорим позже, а пока займёмся подходом Фредгольма.

Определение 6.21. *Пусть (A, μ) — измеримое пространство, а функция $a(x)\colon A \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям: 1. $a(x) > 0$; 2. $1/a(x) \in L^2(A, \mu)$, то есть $\int\limits_A |a(x)^{-2}|d\mu(x) < \infty$.*

Подмножество $S \in A \times A$ называется тонким*, если для всех $x_0, y_0 \in A$ выполнено*

$$\mu(\{x \in A\colon (x, y_0) \in S\}) = 0; \qquad \mu(\{y \in A\colon (x_0, y) \in S\}) = 0; \qquad \mu(\{x \in A\colon (x, x) \in S\}) = 0.$$

Если множество не является тонким, то говорят, что оно — толстое.

Определение 6.22. Ядром *называется измеримая функция $K(x, y)\colon A \otimes A \to \mathbb{C}$, которая непрерывна на некотором открытом толстом подмножестве $U \in A \times A$, и для которой выполняется условие $||K||_a = \sup\limits_{A\times A}(a(x)a(y)K(x, y)) < \infty$.*

Для более или менее всех интересующих нас примеров с абсолютно непрерывной мерой в качестве этого толстого подмножества выступает всё множество $A \times A$ (за исключением, может быть, конечного числа точек). Для дискретных мер в качестве толстых подмножеств можно брать подходящие конечные множества.

Определим теперь следующие выражения, зависящие от n:

$$\Delta_n(K) = \int\limits_{A^n} \det_{1\leqslant i,j\leqslant n}(K(x_i, x_j))d\mu(x_1)\dots d\mu(x_n).$$

Кроме того, положим

$$\Delta(K) = \det(1 + \widehat{K})_{L^2(A,\mu)} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!}\Delta_n(K).$$

Положим также $\Delta_0(K) = 1$.

Лемма 6.23. *$\Delta_n(K) \leqslant c^n(||K||_a)^n n^{n/2}$, где $c^2 = \int \frac{dx}{a(x)^2}$.*

Доказательство. Пусть B — матрица $n \times n$ такая, что $B_{ij} \leqslant 1$. Тогда для неё справедливо так называемое *неравенство Адамара*: $|\det B| \leqslant n^{n/2}$. В самом деле, пусть $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_n$ — собственные значения матрицы $BB^\dagger$. Тогда мы имеем

$$|\det B| = \sqrt{\det(BB^\dagger)} = \sqrt{\prod_i \lambda_i} \leqslant \sqrt{\lambda_1^n}.$$

При этом для максимального собственного значения справедлива оценка

$$\lambda_1 = \max_{||v||=1} ||B^\dagger Bv||_2 \leqslant ||B^\dagger B||_{\sup} \leqslant n,$$

поскольку

$$\sqrt{\sum_{i,j}((B^\dagger B)_{ij}v_j)^2} \leqslant \sqrt{\sum_j (nv_j)^2} \leqslant n; \qquad |(B^\dagger B)_{ij}| \leqslant \sum_{k=1}^n |B^\dagger_{ik}| \cdot |B_{kj}| \leqslant n.$$

Неравенство Адамара доказано.

Теперь пусть $B = (b_1, \ldots, b_n)$. Тогда $\det B \leqslant n^{n/2}||b_1||_{\sup}\ldots||b_n||_{\sup}$. Поэтому имеем оценку

$$\Delta_n(K) = \int\limits_{A^n} \det_{1\leqslant i,j\leqslant n}\left(\frac{K(x_i,x_j)a(x_i)a(x_j)}{||K||_a}\right)||K||_a^n \prod_i a_i(x)^{-2}d\mu(x_1)\dots d\mu(x_n) \leqslant$$

$$\leqslant ||K||_a^n n^{n/2} \int\limits_{A^n} \prod_i a_i(x)^{-2}d\mu(x_1)\dots d\mu(x_n) = c^n||K||_a^n n^{n/2}.$$

Требуемое доказано. ☐

Следствие. $\Delta(K) = \sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!}\Delta_n(K) \leqslant \sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{c^n(||K||_a)^n n^{n/2}}{n!} < \infty$ (использовали формулу Стирлинга).

Лемма 6.24. *Функция $K \to \det(1+K)$ непрерывна по норме $||K||_a$,*

$$|\Delta(K_1)-\Delta(K_2)| \leqslant ||K_1-K_2||_a \sum_{n\geqslant 0} \frac{n^{n/2-1}c^n}{n!},$$

где $c<\infty$.

Доказательство. Для доказательства этой леммы сначала докажем второе неравенство Адамара: именно, если имеются две матрицы F и G размера $n\times n$, то

$$|\det F - \det G| \leqslant n^{1+n/2}||F-G|| \max(||F||,||G||)^n.$$

В самом деле, пусть $F=\begin{pmatrix} f_1\\ \vdots\\ f_n\end{pmatrix}$, $G=\begin{pmatrix} g_1\\ \vdots\\ g_n\end{pmatrix}$. Тогда

$$|\det F-\det G| = \left|\det\begin{pmatrix} f_1-g_1\\ f_2\\ \vdots\\ f_n\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} g_1\\ f_2-g_2\\ \vdots\\ f_n\end{pmatrix} + \ldots + \det\begin{pmatrix} g_1\\ g_2\\ \vdots\\ f_n-g_n\end{pmatrix}\right|.$$

В силу первого неравенства Адамара справедливо неравенство

$$\left|\det\begin{pmatrix} g_1\\ \vdots\\ f_k-g_k\\ \vdots\\ f_n\end{pmatrix}\right| \leqslant n^{n/2}||g_1||\ldots||g_{k-1}||\cdot||f_k-g_k||\cdot||f_{k+1}||\ldots||f_n|| \leqslant \max(||F||,||G||)^{n-1}||F-G||\cdot n^{n/2}.$$

Отсюда видно, почему второе неравенство Адамара выполняется. А из него уже более или менее непосредственно вытекает утверждение леммы. ☐

Пример 6.25. *CUE — круговой унитарный ансамбль. Напомним, что для него*

$$f_\beta(\theta_1,\ldots,\theta_n) = \frac{1}{Z}\prod_{j<k}|e^{i\theta_j}-e^{i\theta_k}|^\beta,$$

где $\beta=2$. Смысл такой: у нас n точек живёт на единичной окружности, и мы хотим понять, например, какова вероятность того, что на некоторой дуге этих точек нет. В нашем случае мы получаем следующее: $\mathfrak{X}=[0,2\pi)$, $\mu=\dfrac{dx}{2\pi}$

$$f_\beta(\theta_1,\ldots,\theta_n) = \frac{1}{Z}\det_{0\leqslant j\leqslant N-1, 1\leqslant k\leqslant N}\left(e^{ij\theta_k}\right)\prod_{1\leqslant l\leqslant N} e^{-i\frac{N-1}{2}\theta_l}\prod_{1\leqslant m\leqslant N} e^{i\frac{N-1}{2}\theta_m}\det_{0\leqslant j\leqslant N-1, 1\leqslant k\leqslant N}\left(e^{-ij\theta_k}\right) =$$

$$= \frac{1}{Z}\det_{0\leqslant j\leqslant N-1, 1\leqslant k\leqslant N}\left(e^{i\theta_k s_j}\right)\det_{0\leqslant j\leqslant N-1, 1\leqslant k\leqslant N}\left(e^{-i\theta_k s_j}\right),$$

где $s_j = \dfrac{N-1}{2} + j$. *Ядро имеет вид*

$$K_N(x,y) = \sum_{k,l=0}^{N-1} p_k(x) H^{-t}_{kl} q_l(y),$$

где

$$H_{kl} = \langle p_k, q_l \rangle = \int\limits_0^{2\pi} e^{i\theta s_k} e^{-i\theta s_l} \frac{d\theta}{2\pi} = \int\limits_0^{2\pi} e^{i\theta(k-l)} \frac{d\theta}{2\pi} = \delta_{kl}.$$

Волшебным образом матрица H *имеет единичный вид, поэтому ядро принимает следующую симпатичную форму*

$$K_N(x,y) = \sum_{k=0}^{N-1} e^{i(x-y)s_k} = \frac{\sin\left(\frac{x-y}{2}N\right)}{\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)},$$

в чём несложно убедиться, проделав соответствующие вычисления.

С точки зрения здравого смысла, мы ожидаем увидеть на окружности равномерное распределение частиц. С точки зрения корреляционных функций $\rho_1(x) = K_n(x,x) = N$, *то есть плотность (с учётом нашей меры) есть* $\rho = \dfrac{N}{2\pi}$. *Теперь возьмём предел* $n \to \infty$. *Поскольку мы хотим рассматривать кусочки дуги, на которых содержится конечное число частиц (и предельное поведение на них), длины дуг должны быть обратно пропорциональны плотности. Нам надо взять отрезок так, чтобы увидеть нетривиальное поведение, не зависящее от* N, *то есть рассматривать универсальное поведение распределения на подходящем масштабе. Поэтому введём обозначения:* $a = \dfrac{x \cdot 2\pi}{N}$, $b = \dfrac{y \cdot 2\pi}{N}$. *Тогда вероятность того, что на отрезочке* $[a,b]$ *не будет частиц, есть*

$$\mathbb{P}(V_\xi([a,b]) = 0) = \det(1 - \widehat{K}_N)_{L^2([a,b],\mu)}.$$

Пусть K_∞ *— предельное ядро. Как мы видели,*

$$|\det(1 - K_N) - \det(1 - K_\infty)| \leqslant c||K_N - K_\infty||_a.$$

В новом масштабе

$$\frac{1}{N} K_N\left(\frac{2\pi x}{N}, \frac{2\pi y}{N}\right) = \frac{\sin((x-y)\pi)}{N \sin\left(\frac{(x-y)\pi}{N}\right)} \to \frac{\sin((x-y)\pi)}{\pi(x-y)}.$$

Последнее называется синус-процессом и обозначается $K_{\sin}(x,y)$.

Поглядим на групповые корреляционные функции: $T_2(x,y) = \rho_1(x)\rho_1(y) - \rho_2(x,y) = |K(x,y)|^2$. *В данном случае, когда ядро — это синус-процесс, мы получаем*

$$T_2(r) = \frac{\sin \pi r}{\pi r},$$

где $r = x - y$. *Например, очень похоже на то, что нули дзета-функции Римана ведут себя именно так. Сама дзета-функция Римана при таком подходе рассматривается как некий оператор, и гипотеза Римана заключается в том, что этот оператор самосопряжён. Однако пока никто этого доказать не сумел.*

Обратимся теперь ко второму подходу к детерминантам Фредгольма — операторному подходу. Будем смотреть на $\widehat{K}$ как на оператор. Что тогда такое $\det(\mathbb{I}+\widehat{K})$? Хочется придать смысл равенству $\det(\mathbb{I}+\widehat{K}) = \prod\limits_i (1+\lambda_i)$ в бесконечномерном случае. И здесь нам понадобятся сведения из функционального анализа.

ПРИМЕРНО ЗДЕСЬ ПО СУТИ НАЧАЛАСЬ НОВАЯ ЛЕКЦИЯ

Пусть для всех i, j выполнено $A_i \cap A_j = \emptyset$. Тогда в самом общем виде выполняется следующее равенство (в прошлый раз мы смогли постичь это в определённых частных случаях):

$$\mathbb{P}(\nu_\xi(a_1) = k_1, \ldots, \nu_\xi(a_n) = k_n) =$$

$$= (-1)^{k_1+\ldots+k_n} \frac{d^{k_1+\ldots+k_n}}{d^{k_1}\ldots d^{k_n}} \det(1 - z_1\widehat{K}|_{A_1} - \ldots - z_n\widehat{K}|_{A_n})_{L_2(A_1\cap\ldots\cap A_n,\mu)}.$$

В прошлый раз мы понимали равенство

$$\det(1+\widehat{K}) = \prod_i (1+\lambda_i)$$

в смысле сходимости рядов. В этот раз мы хотим поглядеть на это дело как на равенство операторов в смысле функционального анализа.

Первая часть сегодняшней лекции — это напоминание о том, что нам понадобится (поэтому всё — без доказательств).

Итак, пусть $\mathcal{H}$ — комплексное, сепарабельное Гильбертово пространство, $\mathrm{End}(\mathcal{H})$ — множество линейных операторов на нём. Возьмём оператор $B \in \mathrm{End}(\mathcal{H})$. Будем говорить, что он

1. ограниченный, если $||Bv|| \leqslant c||v||$ для некоторого c при всех v (мы будем писать $B < \infty$); $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ — множество ограниченных операторов.
2. эрмитов, если $\langle v, Bw\rangle = \langle Bv, w\rangle$ для любыш $v, w \in \mathcal{H}$ из области определения B,
3. самосопряженным, если $B = B^*$, т.е. B – эрмитов и области определения B и B^* совпадают.
4. положительный, если для всех $v \in \mathcal{H}$: $\langle v, Bv\rangle \geqslant 0$ (в этом случае B — эрмитов); будем писать $B \geqslant 0$. Подчеркнём, что из ограниченности и положительности B следует, что он самосопряжён, то есть $B = B^*$.
5. Если B положителен, то существует ровно один оператор D такой, что $B = D^2$. Про последний мы будем писать так: $D = \sqrt{B}$.
6. Если B ограничен, то B^*B положителен. В частности, введём обозначение $|B| = \sqrt{B^*B}$.
7. Полярное разложение: для каждого ограниченного оператора B существует ровно один оператор U такой, что
   (a) U – частичная изометрия, т.е. $||Uv|| = ||v||$ для любых $v \in \mathrm{Ker}^\perp(B)$
   (b) $B = U|B|$,

   (c) $||Uv|| = 0$ для всех $v \in \mathrm{Ker}B$.

8. Ранг оператора — это $\mathrm{Rank}B = \dim(\mathrm{Im}(B))$.

9. Компактный оператор переводит ограниченное множество в предкомпактное. Эквивалентно, оператор B компактен, если для любой ограниченной последовательности $v_n \in \mathcal{H}_n$ последовательность Bv_{nn} содержит сходящуюся подпоследовательность. J_∞ – множество компактных операторов.

10. Ограниченный оператор B является компактным тогда и только тогда, когда $B = \lim\limits_{n\to\infty} B_n$ по норме $||B||$, где каждый из B_n имеет конечный ранг.

11. Спектральная теорема (для компактного оператора): пусть $B \in J_\infty$ — компактный оператор в $\mathcal{H}$. Тогда:

    (a)) Спектр $\sigma(B)$ является ограниченным дискретным множеством без предельных точек за исключением, быть может, нуля.

    (b) Любое собственное значение $\lambda \in \sigma(B)$ имеет конечную кратность.

    (c) Для любого ненулевого собственного значения $\lambda \in \sigma(B)$ оператора B существует коммутирующих с ним проектор P_λ конечного ранга такой, что $\sigma(B|_{P_\lambda \mathcal{H}}) = \{\lambda\}$, $\sigma(B|_{(\mathbb{I}-P_\lambda)\mathcal{H}}) = \sigma(B) \setminus \{\lambda\}$, а ранг проектора $\mathrm{rank}P_\lambda$ есть алгебраическая кратность числа λ.

Замечание 6.26. *Проектор может быть реализован в виде*

$$P_\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-\lambda|=\varepsilon} \frac{dz}{z-B}.$$

12. Теорема о базисе: пусть B — самосопряжённый компактный оператор — множество ограниченных операторов). Тогда существует ортонормированный базис из собственных векторов оператора B.

13. Теорема (о каноническом разложении): пусть $B \in J_\infty$ — компактный оператор. Тогда существуют ортонормированные наборы $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ и $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$, а также упорядоченный набор положительных чисел $\mu_1(B) \geqslant \mu_2(B) \geqslant \ldots$ такие, что

$$B = \sum_{n \geqslant 1} \mu_n(B) \psi_n \langle \varphi_n, \cdot \rangle.$$

$\mu_n(B)$ — это *сингулярные числа*, они оказываются собственными числами оператора $|B|$.

Приведём доказательство этой теоремы. Заметим, что $|B| \geqslant 0$ (положительный оператор), и для него существует собственный базис $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$: $|B|\varphi_n = \mu_n \varphi_n$. Тогда по теореме о базисе

$$|B| = \sum_n \mu_n(B) \varphi_n \langle \varphi_n, \cdot \rangle.$$

Используя полярное разложение, имеем $B = U|B|$, и таким образом, $\psi_n = U\varphi_n$.

14. Неравенство Вейля: Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ — собственные значения оператора B, $|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant$, $\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \ldots$ — сингулярные числа оператора B. Тогда для любого n:

$$\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mu_i.$$

Следующая тема для разговора — ядерные операторы.

Теорема 6.27. *(A). Пусть $\mathcal{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство, $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис. Тогда для любого положительного $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$* **след оператора** *$B$, определяемый соотношением*

$$\mathrm{Tr}(B) = \sum_n \langle \varphi_n, B\varphi_n \rangle$$

не зависит от выбора базиса.

Определение 6.28. *Оператор B называется* ядерным *(Trace-class), если* $\mathrm{Tr}(|B|) < \infty$. *Множество ядерных операторов обозначается J_1.*

Теорема 6.29. *(B). J_1 является $*-$идеалом, то есть*
а) J_1 — линейное пространство;
б) $\forall\, D \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $\forall\, B \in J_1$ выполнено $BD, DB \in J_1$,
в) если $B \in J_1$, то $B^* \in J_1$.

Определение 6.30. *Введём на J_1 норму $||\cdot||_1$ по следующему правилу:*

$$||B||_1 = \mathrm{Tr}(|B|).$$

Определённая выше норма обладает следующими свойствами:
а) $||B|| \leqslant ||B||_1$;
б) J_1 с нормой $||\cdot||_1$ — банахово пространство;
в) $B \to \mathrm{Tr}(B)$ — ограниченный линейный функционал на J_1, причём для всех $B \in J_1$ и $D \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ выполнено $\mathrm{Tr}(DB) = \mathrm{Tr}(BD)$;
г) $B \in J_1$ — компактные операторы.

Теорема 6.31. *(C). Пусть $K(x,y)\colon A \times A \to \mathbb{C}$ — непрерывная положительно определённая функция, то есть для любого $\varphi(x) \in L^2(A,\mu)$ выполнено*

$$\int\limits_{A\times A} \varphi(x)K(x,y)\varphi(y)d\mu(x)d\mu(y) \geqslant 0.$$

Тогда существует и единственен оператор $\widehat{K} \in J_1$, $\widehat{K}\colon L^2(A,\mu) \to L^2(A,\mu)$ такой, что

$$(\widehat{K}f)(x) = \int\limits_A K(x,y)f(y)d\mu(y), \qquad ||\widehat{K}||_1 = \int\limits_A K(x,x)d\mu(x).$$

Далее (следующая подтема) — операторы Гильберта-Шмидта.

Определение 6.32. *Оператор* $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ *называется* оператором Гильберта-Шмидта, *если* $\mathrm{Tr}(BB^*) < \infty$. *Множество всех операторов Гильберта-Шмидта обозначается* J_2.

Определение 6.33. *Введём на* J_2 *норму* $||\cdot||_2$ *по следующему правилу:*

$$||B||_2 = \sqrt{\mathrm{Tr}(|BB^*|)}.$$

Теорема 6.34. *(D).* J_2 *является* $*-$*идеалом, то есть*
а) J_2 *— линейное пространство;*
б) $\forall\, D \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $\forall\, B \in J_2$ *выполнено* $BD, DB \in J_2$,
в) если $B \in J_2$, *то* $B^* \in J_2$.

Свойство: $||B|| \leqslant ||B||_2 \leqslant ||B||_1$;

Теорема 6.35. *(E). Пусть* $\mathcal{H} = L^2(a, \mu)$. *Тогда для любого* $\widehat{K} \in J_2$ *существует единственный оператор* $K(x, y) \in L^2(A \otimes A, \mu \otimes \mu)$ *такой, что*

$$(\widehat{K}f)(x) = \int\limits_A K(x,y)f(y)d\mu(y),$$

и наоборот, для любого $K(x, y) \in L^2(A \otimes A, \mu \otimes \mu)$ *определён оператор* $\widehat{K}$ *как выше, причём*

$$||\widehat{K}||_2 = ||K||_2 = \left(\int\limits_{A^2} |K(x,y)|^2 d\mu(x)d\mu(y)\right)^{1/2}.$$

Определённая выше норма обладает следующими свойствами:
а) J_2 со скалярным произведением $\langle B, D\rangle = \mathrm{Tr}(B^*D)$ — гильбертово пространство;
б) $B \in J_2$ — компактные операторы.
в) $B \in J_1$ тогда и только тогда, когда существуют $C, D \in J_2$ такие, что $B = CD$.

Теорема 6.36. *(F). Пусть* $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ *и* $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ *— ортонормированный базис в* $\mathcal{H}$ *и* $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. *Тогда* $\sum\limits_n ||B\varphi_n||^2$ *и* $\sum\limits_n |\langle\varphi_n, B\varphi_n\rangle|^2$ *не зависят от выбора базисов и равны между собой. Если же они конечны, то они равны* $||B||_2^2$.

Зачем всё это нужно? Во-первых, сходимость детерминантов Фредгольма следует из сходимости по норме $||\cdot||_1$. Во-вторых, хотя обычно трудно установить, принадлежит ли данный оператор J_1, его можно попробовать представить в виде произведения операторов Гильберта-Шмидта, что сразу даст нам результат.

Пример: рассмотрим GUE. Функция распределения максимального собственного значение — это некоторых детерминант Фредгольма. Утверждение, которое будет сделано, заключается в том, что этот детерминант сходится к детерминанту с ядром Эйри, и доказывать мы это будем именно с помощью операторов Гильберта-Шмидта. Но об этом мы поговорим заметно позже.

Итак, мы ввели весь необходимый аппарат из функционального анализа. Теперь вернёмся к вычислению детерминанта Фредгольма от операторов. Для этого нам понадобится понятие внешней степени в $\mathcal{H}$. Именно, рассмотрим тензорную степень пространства: $\otimes^n\mathcal{H}$ — она определяется последовательно, сначала для $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathcal{H}$ говорим, что $\varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_n \in \otimes^n\mathcal{H}$. А вообще, тензорное произведение — это пространство полилинейных функций на $\mathcal{H}^n$, то есть:

а) если $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathcal{H}$ и $\eta_1, \ldots, \eta_n \in \mathcal{H}$, то действие определяется формулой

$$\varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_n(\eta_1, \ldots, \eta_n) = \prod_{i=1}^{n} \langle \varphi_i, \eta_i \rangle.$$

б) Скалярное произведение в $\otimes^n\mathcal{H}$ есть

$$\langle \varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_n, \psi_1 \otimes \ldots \otimes \psi_n \rangle = \prod_{i=1}^{n} \langle \varphi_i, \psi_i \rangle.$$

в) Для любого $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ существует оператор $\Gamma_n(B) \in \mathcal{L}(\otimes^n\mathcal{H})$ такой, что

$$\Gamma_n(B)(\varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_n) = (B\varphi_1 \otimes \ldots \otimes B\varphi_n), \qquad \Gamma_n(A)\Gamma_n(B) = \Gamma_n(AB).$$

г) Если $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ортонормированная система в $\mathcal{H}$, то $\{\varphi_{k_1} \otimes \ldots \otimes \varphi_{k_n}\}_{k_1,\ldots,k_n}$ — базис в $\otimes^n\mathcal{H}$.

Определение 6.37. *Пусть* $\psi_1, \ldots, \psi_n \in \mathcal{H}$. *Положим*

$$\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma \psi_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes \psi_{\sigma(n)}.$$

Тогда внешняя степень $\bigwedge^n \mathcal{H}$ *— это линейная оболочка всех таких выражений.*

В частности, $\bigwedge^0 \mathcal{H} = \mathbb{C}$, $\bigwedge^n \mathcal{H} \subset \otimes^n\mathcal{H}$.

Лемма 6.38. $\langle \psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n, \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \rangle = \det(\langle \psi_i, \varphi_j \rangle)$.

Это — лёгкое упражнение.

Лемма 6.39. *Пусть* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *— собственные значения оператора* $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$*, причём* $\dim\mathcal{H} = N < \infty$. *Обозначим за* $\bigwedge^n \mathcal{B} = \Gamma_n(B)$ *— ограничение на* $\bigwedge^n \mathcal{H}$. *Тогда*

$$\operatorname{Tr} \bigwedge^n \mathcal{B} = e_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_n \leqslant N} \lambda_{i_1} \ldots \lambda_{i_n},$$

где за e_n *обозначены элементарные симметрические функции.*

Доказывается тривиально — по определению следа (упражнение).

Суммируя все такие следы, мы получаем равенство

$$\sum_{n=0}^{n} \operatorname{Tr} \bigwedge^n \mathcal{B} = \sum_{n=0}^{n} e_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \prod_{i=1}^{N} (1 + \lambda_i) = \det(1 + B)$$

Наша цель — распространить его на случай $N = \infty$.

Теорема 6.40. *(1) Для* $B \in J_1$ *выполнено* $\det(1+zB) = \prod\limits_{i=1}^{\infty}(1+z\lambda_i(B))$*. В частности, справедлива* **формула Лидского***:* $\mathrm{Tr}(B) = \sum \lambda_i$.

Теорема 6.41. *(2) Для* $B \in J_1 \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$*. Тогда справедливо* $\bigwedge^n \mathcal{B} \in J_1 \subset \mathcal{L}(\bigwedge^n \mathcal{H})$*, причём* $|| \bigwedge^n \mathcal{B}||_1 \leqslant \frac{||B||_1^n}{n!}$.

Отметим, что отсюда сразу следует, что $\det(1+zB) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} z^k \mathrm{Tr}(\bigwedge^n \mathcal{B})$ *— целая функция переменной* z*, поскольку* $|\det(1+zB)| \leqslant \exp(||B||_1|z|)$*. Однако этой оценкой мы не ограничимся, справедлива более сильная оценка (и это — ещё одно утверждение этой теоремы): для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $c_\varepsilon < \infty$ *такое, что* $|\det(1+zB)| \leqslant c_\varepsilon \exp(\varepsilon|z|)$.

Теорема 6.42. *(3, о непрерывности)* $B \to \det(B)$ *— непрерывная функция в* J_1*. В частности, для всех* $A, B \in J_1$ *выполнено*

$$|\det(1+A) - \det(1+B)| \leqslant ||A_B||_1 \exp(1 + ||A||_1 + ||B||_1)$$

Из теоремы 3 ясно, что $\det(1+zB) \sim \prod\limits_i (1 - \frac{z}{z_i})$.

Теорема 6.43. *(4) Для всех* $A, B \in J_1$ *выполнено:*
а) $\det(1+A+B+AB) = \det(1+A)\det(1+B)$*;*
б) $\det(1+B) \neq 0$ *тогда и только тогда, когда* $(1+B)$ *— обратим;*
в) если $z_0 = -\lambda^{-1}$*, где* λ *— собственное значение кратности* n*, то* z_0 *— ноль функции* $\det(1+zB)$ *кратности* n.

Теорема 6.44. *(5) Пусть* $f(z)$ *— целая функция с нулями* $z_1, z_2, \ldots$ *(с повторением с учётом конечных кратностей), причём* $f(0) = 1$*,* $\sum\limits_n |z_n|^{-1} < \infty$ *и для любого* $\varepsilon > 0$ *выполняется неравенство* $|f(z)| < c_\varepsilon e^{\varepsilon|z|}$*. Тогда* $f(z) = \prod\limits_i (1 - \frac{z}{z_i})$.

Эту теорему доказывать не будем.

Доказательство теоремы 2. Первая часть. Заметим, что $|\bigwedge^n(B)| = \bigwedge^n(|B|)$. Поэтому

$$||\bigwedge^n(B)||_1 = \mathrm{Tr}(|\bigwedge^n(B)|) = \mathrm{Tr}(\bigwedge^n(|B|)) = \sum_{i_1 < \ldots < i_n} \mu_{i_1} \ldots \mu_{i_n} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{n!} \sum_{i_1=1,\ldots,i_n=1}^{\infty} \mu_{i_1} \ldots \mu_{i_n} = \frac{1}{n!} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \right)^n = \frac{||B||_1}{n!}.$$

Теперь докажем второе утверждение. Выберем N такое, что $\sum\limits_{n>N} \mu_n < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда $\prod\limits_{n>N}(1 + |z|\mu_n) \leqslant \exp(\frac{|z|\varepsilon}{2})$. С другой стороны, $\prod\limits_{n=0}^{N}(1+|z|\mu_n) \leqslant c_\varepsilon \exp(\frac{|z|\varepsilon}{2})$. Поэтому $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n \mathrm{Tr} \bigwedge^n(\mathcal{B}) \leqslant c_\varepsilon \exp(|z|\varepsilon)$.

Доказательство теоремы 3. Введём обозначение $F(B) = \det(1+B)$. Пусть $C, D \in J_1$. Тогда $F(C + zD)$ — целая функция, так как $\bigwedge^n(C+zD)$ — многочлен от z степени

n. Введём обозначение $g(z) = F(\frac{A+B}{2} + z(A-B))$. Тогда видно, что $g(1/2) = F(A)$, $g(-1/2) = F(B)$ и

$$|F(A) - F(B)| = |g(1/2) - g(-1/2)| \leqslant \sup_{-1/2\leqslant t\leqslant 1/2} |g'(t)| \leqslant R^{-1} \sup_{|z|\leqslant R+1/2} |g(z)|.$$

Здесь мы воспользовались тем, что

$$|g'(a)| = |\frac{1}{2\pi i} \int \frac{dzg(z)}{(z-a)^2}| \leqslant \sup_{|z|\leqslant R+1/2} |g(z)| \frac{1}{R^2} \int \frac{|dz|}{2\pi} \leqslant \frac{1}{R} \sup_{|z|\leqslant R+1/2} |g(z)|.$$

Продолжая оценки, имеем

$$|F(A) - F(B)| \leqslant ||A-B||_1 \sup_{|z|\leqslant ||A-B||_1^{-1}+1/2} |\det \frac{A+B}{2} + z(A-B)| \leqslant$$

$$\leqslant ||A-B||_1 \sup_{|z|\leqslant ||A-B||_1^{-1}+1/2} \exp(||\frac{A+B}{2} + z(A-B)||_1)$$

Подставляя вместо z максимальное по модулю значение, то есть $|z| = ||A-B||_1^{-1} + 1/2$, мы имеем оценку

$$|F(A)-F(B)| \leqslant ||A-B||_1 \exp(\frac{||A||_1}{2} + \frac{||B||_1}{2} + \frac{||A-B||_1}{2} + 1) \leqslant ||A-B||_1 \exp(\frac{||A||_1}{2} + \frac{||B||_1}{2} + 1).$$

Теорема 3 доказана.

Перейдём к доказательству теоремы 4.
а) Требуемое справедливо для операторов конечного ранга и распространяется на J_1 в силу непрерывности из теоремы 3.
б) Если оператор $1+B$ необратим, то $\lambda = -1$ — его собственное значение. Если же он обратим, то для оператора $C = -B(1+B)^{-1}$ мы имеем $(1+C)(1+B) = 1$, откуда $\det(1+C)\det(1+B) = 1$ в силу пункта а).
в) Пусть λ — собственное значение оператора $B \in J_1$, P_λ — соответствующий спектральный проектор. Тогда $P_\lambda B(1-P_\lambda)B = 0$, откуда

$$\det(1+zB) = \det(1+zP_\lambda B + z(1-P_\lambda)B) = \det(1+zP_\lambda B + z(1-P_\lambda)B + zP_\lambda B(1-P_\lambda)B) =$$

$$= \det(1+zP_\lambda B)\det(1+z(1-P_\lambda)B).$$

Второй определитель не имеет нуля $z = -\lambda^{-1}$ по теореме 3. А первый — это определитель конечной размерности, который можно вычислить явно — получается $\det(1+z\lambda)^n$.

Наконец, возвращаемся к доказательству теоремы 1. Функция $f(z) = \det(1+zB)$ по теореме 4 имеет нули в $b - \lambda_n^{-1}$. Поскольку

$$\sum_{n=1}^{k} |\lambda_n| \leqslant \sum_{n=1}^{k} \mu_n \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z_n} < \infty, \qquad f(0) = 1,$$

мы можем заключить из теоремы 2, что $f(z) \leqslant c_\varepsilon \exp(|z|\varepsilon)$. А из теоремы 5 окончательно получаем $\det(1+zB) = \prod_i (1+z\lambda_i)$.

Напоследок обсудим явные формулы, получающиеся из доказанного в качестве следствия. Пусть $B \in J_1$, $B\colon L^2[a,b] \to L^2[a,b]$ и задана соотношением

$$Bf(x) = \int\limits_a^b K(x,y)f(y)dy,$$

где функция $K(x,y)$ непрерывна на $[a,b]^2$. Тогда, во-первых,

$$\mathrm{Tr}B = \int\limits_a^b K(x,x)dx,$$

а во-вторых,

$$\det(1+B) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{\Delta_n(B)}{n!}.$$

Приложение A

Вспомогательные сведения

A.1 Формулы Сохоцкого-Племеля

Теорема A.1. *[Формула Сохоцкого-Племеля] Пусть L — направленный гладкий контур в комплексной плоскости, а $f(z)$ — абсолютно интегрируемая на L функция. Введём следующие обозначения:*

$$g(x) = \int\limits_L \frac{f(z)\,dz}{z-x}, \quad \forall x \in \mathbb{C} \tag{A.1}$$

и

$$g(x^{\pm}) = \lim_{y \to x^{\pm}} g(y) \quad \forall x \in L, \tag{A.2}$$

где знак плюс (минус) соответствует пределу слева (справа) от контура, соответственно. Тогда, если в некоторой окрестности точки $x_0 \in L$ функция g(x) удовлетворяет условию Гёльдера, т.е. $|g(x') - g(x'')| \leq a|x' - x''|^{\nu}$ для некоторых $a, \nu > 0$, справедливы соотношения

$$g(x_0^+) - g(x_0^-) = 2\pi\mathrm{i} \cdot f(x_0), \tag{A.3}$$

$$g(x_0^+) + g(x_0^-) = 2 \cdot V.P. \int\limits_L \frac{f(z)\,dz}{z - x_0}, \tag{A.4}$$

где интеграл теперь понимается в смысле главного значения.

A.2 Дополнение Шура

Лемма A.2. *[Лемма о дополнении Шура] Пусть матрица $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ имеет блочный вид*

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \tag{A.5}$$

где $A \in \mathbb{C}^{k\times k}$, $B \in \mathbb{C}^{k\times(n-k)}$, $C \in \mathbb{C}^{(n-k)\times k}$, $D \in \mathbb{C}^{(n-k)\times(n-k)}$. Тогда для элементов обратной матрицы M^{-1} при всех $1 \leqslant i, j \leqslant k$ имеет место следующая формула:

$$\left[M^{-1}\right]_{ij} = \left[\left(A - BD^{-1}C\right)^{-1}\right]_{ij}, \tag{A.6}$$

при условии, что указанные матрицы обратимы.

Доказательство. Главная идея заключается в том, чтобы представить матрицу M в виде блочного *разложения Гаусса*:

$$M = \begin{pmatrix} I_k & * \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ * & I_{n-k} \end{pmatrix}. \tag{A.7}$$

Для этого введём матрицу L и её обратную согласно правилу:

$$L = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ -D^{-1}C & I_{n-k} \end{pmatrix}; \qquad L^{-1} = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ D^{-1}C & I_{n-k} \end{pmatrix}. \tag{A.8}$$

Тогда легко видеть, что

$$ML = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ -D^{-1}C & I_{n-k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - BD^{-1}C & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_k & BD^{-1} \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A - BD^{-1}C & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix},$$

то есть имеет место разложение

$$M = \begin{pmatrix} I_k & BD^{-1} \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A - BD^{-1}C & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ -D^{-1}C & I_{n-k} \end{pmatrix}. \tag{A.9}$$

Следовательно,

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ D^{-1}C & I_{n-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (A - BD^{-1}C)^{-1} & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_k & -BD^{-1} \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} \tag{A.10}$$

или, после перемножения этих трёх матриц,

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} (A - BD^{-1}C)^{-1} & -(A - BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \\ D^{-1}C(A - BD^{-1}C)^{-1} & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{pmatrix} \tag{A.11}$$

Требуемое доказано. □

Упражнение А.3. *Докажите, что в условиях леммы А.2 справедливо* матричное тождество Вудбури *(см. формулы (А.10, А.11)):*

$$(D - CA^{-1}B)^{-1} = D^{-1} - D^{-1}C(A - BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1}. \tag{A.12}$$

Следствие А.4. *В условиях леммы А.2 справедливо соотношение*

$$\det M = \det D \cdot \det(A - BD^{-1}C). \tag{A.13}$$

Доказательство. Непосредственно вытекает из формулы (А.9). □

А.3 Кватернионы и матрицы кватернионов

Определение А.5. *Алгебры*

$$\mathbb{H}_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\langle e_0, e_1, e_2, e_3 \rangle, \qquad \mathbb{H}_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\langle e_0, e_1, e_2, e_3 \rangle \tag{A.14}$$

кватернионов над полями действительных и комплексных чисел это ассоциативные алгебры с единицей с образующими $e_0 \equiv \mathbf{1}, e_1, e_2, e_3$*, удовлетворяющие соотношениям*

$$e_i^2 = -1, \quad e_i e_j = \varepsilon_{ijk} e_k, \quad i \neq j \in \{1, 2, 3\}. \tag{A.15}$$

где ε_{ijk} *– полностью антисимметричный тензор Леви-Чивита и мы подразумеваем суммирование по повторяющимся индексам*

Введем на элементах
$$q = q^0 e_0 + q^1 e_1 + q^2 e_2 + q^3 e_3 \tag{A.16}$$
алгебр $\mathbb{H}_\mathbb{R}$ и $\mathbb{H}_\mathbb{C}$ три различных инволютивных антиавтоморфизма

$$\begin{aligned} \overline{q} &= q^0 e_0 - q^1 e_1 - q^2 e_2 - q^3 e_3, & \text{(A.17)}\\ q^\dagger &= (q^0)^* e_0 - (q^1)^* e_1 - (q^2)^* e_2 - (q^3)^* e_3, & \text{(A.18)}\\ q^T &= (q^0)^* e_0 + (q^1)^* e_1 - (q^2)^* e_2 + (q^3)^* e_3, & \text{(A.19)} \end{aligned}$$

где знак $*$ над коэффициентами во втором равенстве – обычное комплексное сопряжение. Эти операции мы будем называть кватернионным сопряжением, эрмитовым сопряжением и транспонированием соответственно. Термин инволютивный означает, что операция, примененная к объекту дважды, возвращает исходный объект, а термин антиавтоморфизм говорит, что операция, примененная к произведению обращает порядок сомножителей,
$$\overline{q_1 q_2} = \overline{q}_2 \overline{q}_1, \quad (q_1 q_2)^\dagger = q_2^\dagger q_1^\dagger, \quad (q_1 q_2)^T = q_2^T q_1^T. \tag{A.20}$$
Транспонирование и кватернионное сопряжение связаны соотношениями
$$\overline{q} = -e_2 q^T e_2 = e_2 q^T e_2^{-1}, \qquad q \in \mathbb{H}_\mathbb{C}. \tag{A.21}$$
Очевидно также, что для вещественных кватернионов кватернионное и эрмитово сопряжения совпадают.
$$q^\dagger = \overline{q}, \quad q \in \mathbb{H}_\mathbb{R}. \tag{A.22}$$

Подобные операции вводятся и для кватернионных матриц. Для матрицы $M \in \mathbb{H}_\mathbb{C}^{n\times n}$ введем дуальную матрицу M^R,[1] эрмитово сопряженную матрицу $M^\dagger$ и транспонированную матрицу M^T с матричными элементами
$$(M^R)_{ij} = \overline{(M)_{ji}}, \quad (M^\dagger)_{ij} = (M)_{ji}, \quad M^T_{ij} = (M_{ji})^T. \tag{A.23}$$

Утверждение А.6. *Дуальная и эрмитово сопряженная матрицы совпадают, т.е.*
$$M^R = M^\dagger, \tag{A.24}$$
тогда и только тогда, когда $M \in \mathbb{H}_\mathbb{R}$ – вещественно-кватернионная матрица

Если выполнены соотношения
$$M^R = M, \quad M^\dagger = M, \tag{A.25}$$
то матрица M называется самодуальной и эрмитовой соответственно. Из утвержения (А.6) следует , что вещественно-кватернионная матрица $M \in \mathbb{H}_\mathbb{R}^{n\times n}$ эрмитова тогда и только тогда, когда она самодуальна.

Алгебры кватернионов $\mathbb{H}_\mathbb{C}^{n\times n}$ и $\mathbb{H}_\mathbb{R}^{n\times n}$ имеют точное представление в алгебре комплексных двумерных матриц. Оно строится следующим отождествлением.
$$e_0 \to \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \quad e_1 \to \begin{pmatrix}\mathbf{i} & 0\\ 0 & -\mathbf{i}\end{pmatrix} \quad e_2 \to \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}, \quad e_3 \to \begin{pmatrix}0 & \mathbf{i}\\ \mathbf{i} & 0\end{pmatrix}. \tag{A.26}$$

---

[1] Индекс R, маркирующий дуальную матрицу, отсылает нас к английскому слову «reversed», т.е. обращенный (во времени). Это связано с тем, что взятие дуальной матрицы соответствует преобразованию соответствующего квантово-механического оператора при обращении времени.

Таким образом кватернионной матрице $M \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^{n\times n}$ будет соответствовать комплексная матрица вдвое большего размера $M \in \mathbb{C}^{2n\times 2n}$. Обратное также верно.Четыре матрицы (А.26) вместе с четырьмя матрицами, полученными умножением первых на мнимую единицу, образуют базис в $\mathbb{C}^2$, откуда следует, что любая комплексная матрица $M \in \mathbb{C}^{2n\times 2n}$ размера $2n \times 2n$ соответствует кватернионной матрице $M \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^{n\times n}$ размера $n \times n$. Поэтому здесь и далее мы будем использовать одни и те же обозначения для кватернионов (и кватернионных матриц) и их комплексных матричных аналогов вдвое большего размера.

Специальное подмножество моножества $\mathbb{C}^{2n\times 2n}$ четномерных комплекснозначных матриц образовано матрицами, полученными с помощью отображения (А.26) из вещественно-кватернионных матриц. Их мы также именуем вещественно-кватернионными. Чтобы идентифицировать вещественно-кватернионные матрицы среди всех матриц в $\mathbb{C}^{2n\times 2n}$, можно воспользоваться утверждением А.6. Для этого, однако, мы должны предъявить аналоги сопряжений $M^R, M^\dagger$ и M^T. Нетрудно увидеть, что эрмитово сопряжение и транспонирование в кватернионных матрицах совпадает с обычным эрмитовым сопряжением и транспонированием их комплексных аналогов, что в частности справедливо для образующих (А.26). Заметим, что при построении дуальной матрицы используется кватернионное сопряжение, т.е. в каждом матричном элементе сопрягаются лишь базисные элементы, но не коэффициенты при них. Добиться этого эффекта в матричном аналоге кватерниона можно, воспользовавшись соотношением (А.21), из которого видно, что для дуальной матрицы справедлива формула

$$M^R = ZM^TZ^{-1} \tag{A.27}$$

где матрица

$$Z = I_n \otimes e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & & & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{A.28}$$

есть одно из матричных представлений симплектической формы.