Скобки Пуассона и Гамильтоновы векторные поля

Сегодня мы разберем примеры пуассоновых структур на простейших многообразиях и рассмотрим некоторые геометрические структуры (Гамильтоновы векторные поля и симплектические слоения), связанные со собкой Пуассона.

Мы будем рассматривать общий случай, когда конечномерное многообразие, снабженное пуассоновй структурой, не обязательно представляет собой кокасательное расслоение на каком-то конфигурационном пространстве и, в частности, не обязательно имеет четную размерность. Напомним общее определение.

Определение. Пуассоновой структурой (или скобкой Пуассона) на гладком вещественном многообразии M называется отображение $\{\,,\,\} : \mathcal{F}(M) \times \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(M)$ алгебры гладких функций $\mathcal{F}(M)$, удовлетворяющее следующим свойствам (ниже f, g и h — произвольные функции из алгебры $\mathcal{F}(M)$):

1. $\{f, g\} = -\{g, f\}$ — кососимметричность,
2. $\{\alpha f + \beta g, h\} = \alpha\{f, h\} + \beta\{g, h\}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ — билинейность,
3. $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$ — тождество Якоби,
4. $\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}$ — скобка Пуассона есть дифференцирование коммутативной алгебры функций.

Если на гладком многообразии M введены локальные координаты $\{z_i\}_{1\le i\le m}$, $m = \dim M$, то можно показать, что любая Пуассонова структура на алгебре гладких функций $\mathcal{F}(M) = C^\infty(M)$ имеет вид:

$$\{f, g\} = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial z_i}\,\omega_{ij}(z)\frac{\partial g}{\partial z_j}, \qquad (1)$$

где m^2 функций $\omega_{ij}(z)$ называются компонентами *Пуассонова тензора* и полностью определяют свойства Пуассоновой структуры. Очевидно, что Пуассонов тензор задается скобкой локальных координат:

$$\omega_{ij}(z) = \{z_i, z_j\}.$$

Гамильтоновы векторные поля

Пуассонова структура на многообразии M позволяет каждой функции $f \in C^\infty(M)$ поставить в соответствие *Гамильтоново векторное поле* $X_f \in TM$, которое определяется своим действием на функции на M:

$$X_f \triangleright g := \{g, f\}, \quad \forall\, g \in C^\infty(M). \qquad (2)$$

Замечание. Часто Гамильтоново векторное поле, отвечающее функции f, определяется с другим знаком:

$$\tilde{X}_f \triangleright g := \{f, g\} = -X_f \triangleright g.$$

Оба способа задания Гамильтонова векторного поля совершенно эквивалентны, но наше определение (2) продиктовано структурой динамических уравнений Гамильтона и чуть лучше приспособлено к нуждам Гамильтоновой механики.

В силу формулы (1) в (локальных) координатах z_i Гамильтонову векторному полю X_f соответствует следующий линейный дифференциальный оператор первого порядка:

$$X_f = -\sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial z_i}\,\omega_{ij}\frac{\partial}{\partial z_j} := -\partial_i f\,\omega_{ij}\partial_j. \qquad (3)$$

В последнем равенстве приняты сокращенные обозначения для частных производных $\partial_i := \partial/\partial z_i$ и введено правило суммирования: если какой-то индекс встречается в формуле дважды, то по нему подразумевается суммирование по всем его допустимым значениям (правило суммирования по повторяющимся индексам):

$$a_i b_i \equiv \sum_{i=1}^{m} a_i b_i.$$

Если обратиться к Гамильтоновым динамическим уравнениям, то видно, что траектории $z(t,a)$ временной эволюции координат являются интегральными кривыми Гамильтонова векторного поля X_H, отвечающего Гамильтониану системы $H(z)$:

$$\begin{cases} \dot{z}_i = \{z_i, H\} = X_H \triangleright z_i, \\ z_i(0) = a_i, \end{cases}$$

где a_i — координаты некоторой точки многообразия M, через которую проходит интегральная кривая $z(t,a)$ поля X_H в момент $t = 0$.

Важным свойством Гамильтоновых векторных полей на многообразии M является следующая несложная теорема.

Утверждение. Гамильтоновы векторные поля образуют алгебру Ли относительно операции коммутирования и умножения на вещественные числа:

$$\alpha X_f + \beta X_g = X_{\alpha f + \beta g}, \quad [X_f, X_g] = -X_{\{f,g\}}, \quad \forall\, f, g \in C^\infty(M), \quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Пример 1. Для одномерной системы с каноническими скобками Пуассона $\{q,p\} = 1$ найдите явную форму Гамильтоновых векторных полей X_f и X_g (в виде дифференциальных операторов) для функций $f = (q^2+p^2)/2$ и $g = qp$ и проверьте прямым вычислением коммутатора $[X_f, X_g]$ справедливость сформулированного выше утверждения об алгебре Ли

Решение. Обозначим $z_1 = q$, $z_2 = p$. Учитывая вид матрицы Пуассонова тензора при такой нумерации координат фазового пространства, получаем в соответствии с определением Гамильтонова векторного поля (3):

$$\|\omega_{ij}\| = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad X_f = -(\partial_q f, \partial_p f) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_q \\ \partial_p \end{pmatrix} = p\,\partial_q - q\,\partial_p.$$

Аналогично $X_g = \{q,g\}\partial_q + \{p,g\}\partial_p = q\,\partial_q - p\,\partial_p$. Для X_g мы применили немного другой (эквивалентный) способ рассуждений: компонента векторного поля при производной ∂_i совпадает с результатом действия этого поля на координату z_i:

$$X_g = (X_g)_i \partial_i \quad \Rightarrow \quad (X_g)_i = X_g \triangleright z_i = \{z_i, g\}.$$

Вычислим коммутатор $[X_f, X_g] := X_f X_g - X_g X_f$. Заметим, что произведение $X_f X_g$ (понимаемое в смысле ассоциативной алгебры дифференциальных операторов) *не является* касательным векторным полем, поскольку представляет собой дифференциальный оператор второго порядка по производным. Однако *коммутатор* касательных векторных полей всегда касательное векторное поле, так как слагаемые, содержащие вторые производные обязательно сокращаются. Общая формула коммутатора двух произвольных векторных полей:

$$X = A_i(z)\,\partial_i, \quad Y = B_i(z)\,\partial_i \quad \Rightarrow \quad [X,Y] = C_i(z)\partial_i, \quad C_i(z) = A_k \partial_k B_i - B_k \partial_k A_i$$

В нашем примере:

$$[X_f, X_g] = 2(p\,\partial_q + q\,\partial_p).$$

С другой стороны, $\{f, g\} = q^2 - p^2 := h(q, p)$. Поэтому

$$X_{\{f,g\}} = \{q, h\}\,\partial_q + \{p, h\}\,\partial_p = -2p\,\partial_q - 2q\,\partial_p, \quad \Rightarrow \quad [X_f, X_g] = -X_{\{f,g\}}.$$

Вырожденная скобка и Пуассонов центр

Как известно, линейное пространство всех касательных векторных полей на гладком многообразии M, а также соответствующая алгебра Ли касательных векторных полей, является модулем над коммутативной алгеброй $C^\infty(M)$ гладких функций на многообразии M. Однако линейное подпространство и соответствующая подалгебра Ли Гамильтоновых векторных полей не образуют подмодуль над $C^\infty(M)$, поскольку после умножение Гамильтонова вектоного поля на произвольную функцию оно перестает, вообще говоря, быть Гамильтоновым векторным полем. Гамильтоновы векторные поля в общем случае выдерживают умножение только на элементы числового поля (вещественные числа в наших примерах).

Однако для класса так называемых *вырожденных* скобок Пуассона в алгебре функций $C^\infty(M)$ существует подалгебра *Пуассон-центральных* функций, умножение на которые сохраняет свойство Гамильтоновости векторного поля: алгебра Ли Гамильтоновых векторных полей является модулем над подалгеброй Пуассон-центральных функций.

Определение. Функция $f \in C^\infty(M)$ называется Пуассон-центральной, если ее скобка Пуассона с любой другой функцией из $C^\infty(M)$ тождественно равна нулю:

$$\{f, g\} \equiv 0, \quad \forall\, g \in C^\infty(M).$$

Множество пуассон-центральных функций образует Пуассонов центр алгебры $C^\infty(M)$.

Любая постоянная функция очевидным образом принадлежит Пуассонову центру. Кроме того, в силу линейности скобки Пуассона и тождества Лейбница центр образует подалгебру в ассоциативной алгебре функций $C^\infty(M)$.

Определение. Пуассонова структура на многообразии M называется *невырожденной*, если ее Пуассонов центр состоит только из констант. В противном случае, когда имеются не постоянные Пуассон-центральные функции, Пуассонова структура называется *вырожденной*.

Опираясь на формулу (1) легко показать, что скобка Пуассона вырождена (соответственно, невырождена) тогда и только тогда, когда вырождена (невырождена) матрица Пуассонова тензора: $\det\omega = 0$ (соответственно, $\det\omega \neq 0$).

Каноническая Пуассонова структура $\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$ на кокасательном расслоении T^*M n-мерного многообразия M не вырождена, так как ее Пуассонов тензор имеет матрицу (при нумерации $z_i = q_i$, $z_{n+i} = p_i$, $1 \le i \le n$):

$$\omega = \|\omega_{ij}\| = \begin{pmatrix} O_n & I_n \\ -I_n & O_n \end{pmatrix},$$

где I_n и O_n соответственно единичная и нулевая матрицы размера $n \times n$.

Пуассоновы структуры на алгебре функций любого *нечетномерного* многообразия обязательно вырождены, в силу того, что кососимметрическая матрица Пуассонова тензора нечетной размерности обязательно вырождена.

Если Пуассонова структура вырождена, то существуют непостоянные Пуассон-центральные функции. Пусть f одна из таких функций. Тогда уравнение $f(z) = \mathrm{const}$ определяет некоторое подмногообразие в M и все Гамильтоновы векторные поля касательны к этому подмногообразию, поскольку в силу центральности f любое Гамильтоново векторное поле обладает нулевым действием на f:

$$X_g \triangleright f = \{f, g\} = 0, \quad \forall\, g \in C^\infty(M).$$

В силу того, что Гамильтоновы векторные поля образуют алгебру Ли, верно и обратное утверждение (теорема Фробениуса): существует разбиение многообразия M в дизъюнктное объединение подмногообразий (симплектическое слоение), такое, что Гамильтоновы векторные поля касательны к каждому подмногообразию (листу слоения) и скобка Пуассона не вырождена при ограничении на листы слоения. Невырожденное ограничение скобки задает симплектическую форму на каждом листе.

С точки зрения Гамильтоновой динамики это означает, что если начальные данные уравнений движения даются точкой $z_i(0) = a_i$, принадлежащей какому-то листу слоения, то в процессе эволюции траектория движения системы остается на этом листе для любого момента $t > 0$.

Скобка Пуассона-Ли и симплектическое слоение

Важный класс вырожденных скобок Пуассона связан с алгебрами Ли. Пусть $\mathcal{G}$ — конечномерная алгебра Ли, $\{e_i\}_{1\le i\le n}$ — некоторый базис линейного пространства $\mathcal{G}$, $n = \dim \mathcal{G}$. Тогда скобку Ли достаточно задать на базисных элементах:

$$[e_i, e_j] = C_{ij}^k e_k.$$

Напомним, что по индексу k проводится суммирование от 1 до n. Числовые коэффициенты C_{ij}^k называются структурными константами алгебры Ли в базисе $\{e_i\}$.

В этом случае на линейном пространстве $M = \mathcal{G}^*$ можно ввести координаты z_i относительно дуального базиса к базису $\{e_i\}$ и задать структуру *Пуассона-Ли* на алгебре функций $C^\infty(\mathcal{G}^*)$ с помощью следующего Пуассонова тензора:

$$\{z_i, z_j\} = C_{ij}^k z_k. \tag{4}$$

Проиллюстрируем эту конструкцию и введенные ранее понятия на простом примере. Рассмотрим алгебру Ли $sl(2,\mathbb{R})$ вещественных 2×2 матриц с нулевым следом. Линейное $\mathbb{R}$-пространство таких матриц трехмерно и мы выберем базис $sl(2,\mathbb{R})$ в виде следующих элементов:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Замечание. Более традиционным является так называемый Картановский базис в виде набора матриц

$$H = Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad E = \frac{1}{2}(X + Y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \frac{1}{2}(X - Y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Однако наш выбор удобнее для анализа симплектических листов соответствующей скобки Пуассона-Ли.

Скобка Ли алгебры $sl(2,\mathbb{R})$ задается обычным матричным коммутатором. Структурные константы $sl(2,\mathbb{R})$ в выбранном базисе находятся по скобке Ли базисных векторов:

$$[Z, X] = 2Y, \quad [Z, Y] = 2X, \quad [X, Y] = -2Z. \tag{5}$$

Введем на вещественном линейном пространстве $M = sl^*(2,\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^3$ координаты (x, y, z) и зададим скобку Пуассона-Ли в соответствии с набором структурных констант в соотношениях (5):

$$\{z, x\} = 2y, \quad \{z, y\} = 2x, \quad \{x, y\} = -2z. \tag{6}$$

Данная Пуассонова структура вырождена, так как задана на функциях трехмерного многообразия. Нетрудно убедиться, что однородный квадратичный полином $F(x, y, z) = z^2 + x^2 - y^2$ принадлежит Пуассонову центру:

$$\{F, x\} = \{F, y\} = \{F, z\} = 0 \quad \Rightarrow \quad \{F, f\} = 0, \quad \forall\, f(x, y, z) \in C^\infty(sl^*(2,\mathbb{R})).$$

Можно показать, что полином F порождает весь Пуассонов центр в том смысле, что любая пуассон-ценртральная функция $G(x, y, z)$ является функцией от F:

$$\{G, f\} = 0, \quad \forall\, f \in C^\infty(sl^*(2,\mathbb{R})) \quad \Leftrightarrow \quad G(x, y, z) = \tilde{G}(F(x, y, z)).$$

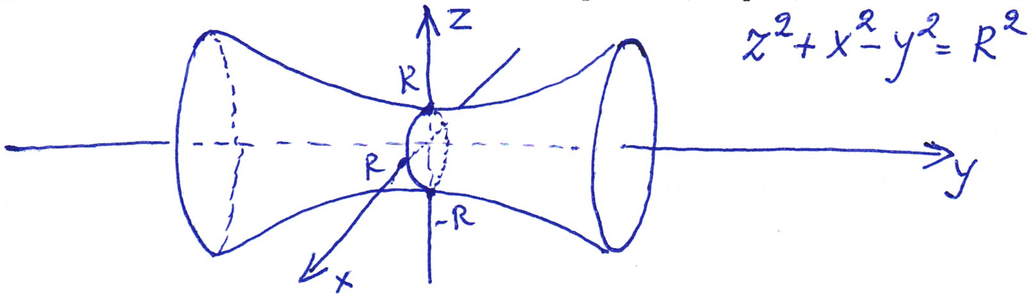
Вследствие этого листы симплектического слоения трехмерного линейного пространства $sl^*(2,\mathbb{R})$ совпадают с поверхностями уровня полинома F:

$$z^2 + x^2 - y^2 = C = \text{const}. \tag{7}$$

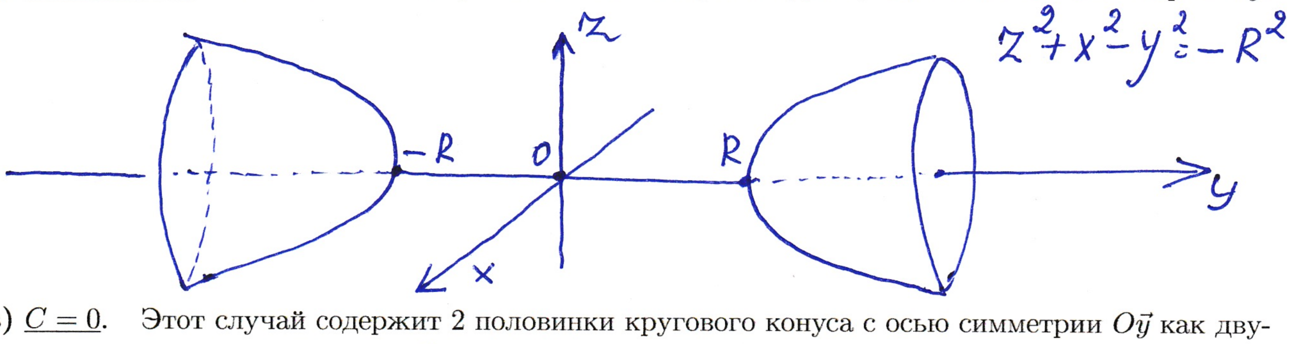
Это набор двумерных[1] поверхностей, при ограничении на которые скобка (6) становится невырожденной и по ней можно построить симплектическую форму на каждой такой поверхности.

Явный вид поверхностей (7) для разных значений константы C легко находится.

а) $\underline{C = R^2 > 0}$. Это семейство однополостных гиперболоидов вращения с осью симметрии $O\vec{y}$:



б) $\underline{C = -R^2 < 0}$. Это семейство двухполостных гиперболоидов вращения с осью симметрии $O\vec{y}$:

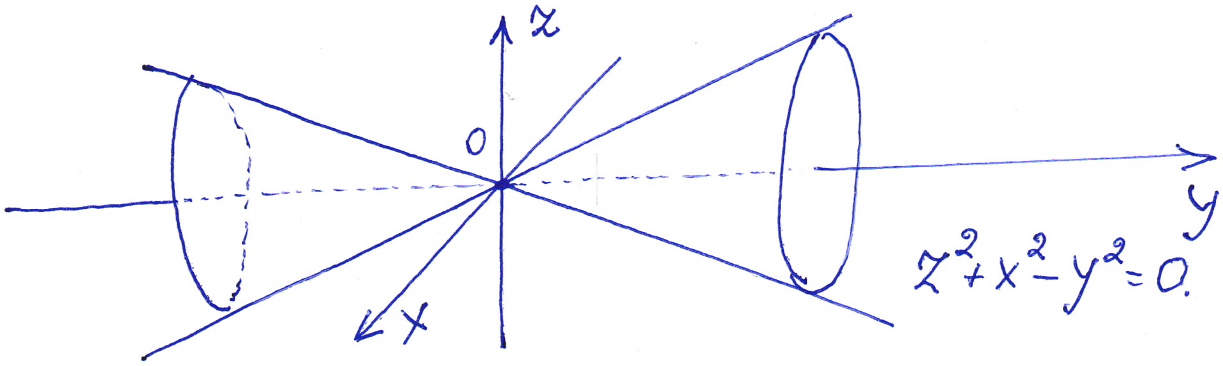


в) $\underline{C = 0}$. Этот случай содержит 2 половинки кругового конуса с осью симметрии $O\vec{y}$ как двумерные симплектические многообразия

$$y^2 = x^2 + z^2, \; y > 0, \qquad y^2 = x^2 + z^2, \; y < 0$$

и точку вырождения структуры Пуассона-Ли $x = y = z = 0$.

[1] Исключение составляет "поверхность" $x = y = z = 0$ — точка начала координат. Это точка вырождения структуры Пуассона-Ли: скобка любых функций в начале координат равна нулю, поскольку Пуассонов тензор (4) обращается в нуль в этой точке.



Пример 2. Рассмотрим поверхности уровня (7) в случае $C = R^2$. Для этих поверхностей найдите:

а) Ограничение скобки Пуассона-Ли, отвечающей алгебре $sl(2,\mathbb{R})$, на эти поверхности. Приведите пример координат Дарбу для ограничения скобки Пуассона.

б) Гамильтоновы векторные поля X_u, X_ϕ отвечающие координатным функциям на гиперболоиде.

в) Выражение для симплектической 2-формы Ω, отвечающей невырожденному ограничению скобки Пуассона.

г) Вычислите значение симплектической формы на Гамильтоновых векторных полях $\Omega(X_u, X_\phi)$.

Решение.

а) В области пространства $\mathbb{R}^3$ вне конуса $z^2 + x^2 - y^2 = 0$ введем гиперболические координаты $r > 0$, $-\infty \le u \le +\infty$, $\phi \in [0, 2\pi)$ следующими соотношениями:

$$z = r \operatorname{ch} u \cos\phi, \quad x = r \operatorname{ch} u \sin\phi, \quad y = r \operatorname{sh} u. \tag{8}$$

Тогда однополостные гиперболоиды семейства (7) фиксируются условием $r = R > 0$ для некоторого вещественного R.

Гладкие функции на гиперболоиде могут рассматриваться как функции координат u и ϕ. Пуассонова структура на этих функциях полностью задается одной скобкой $\{u, \phi\}$ (зависящей от R как от параметра) на поверхности гиперболоида. Для ее нахождения найдем зависимость координат u и ϕ от x, y и z. Точенее, выразим не сами эти координаты, а некоторые удобные функции от них. В силу формул (8) имеем следующие соотношения:

$$\operatorname{sh} u = \frac{y}{r}, \quad r = \sqrt{z^2 + x^2 - y^2}, \qquad \operatorname{tg}\phi = \frac{x}{z}.$$

Заметим, что r является Пуассон-центральной функцией для скобки (6) и при вычислениях скобок r может рассматриваться как константа. Теперь имеем с одной стороны:

$$\{\operatorname{sh} u, \operatorname{tg}\phi\} = \{u, \phi\} \frac{\operatorname{ch} u}{\cos^2\phi}, \tag{9}$$

а с другой стороны

$$\{\operatorname{sh} u, \operatorname{tg}\phi\} = \left\{\frac{y}{r}, \frac{x}{z}\right\} = \frac{1}{r}\left(\frac{1}{z}\{y, x\} - \frac{x}{z^2}\{y, z\}\right) = \frac{1}{r}\left(2 + 2\frac{x^2}{z^2}\right).$$

Подставив сюда x и z в терминах r, u и ϕ из (8), получаем второе выражение для скобки

$$\{\operatorname{sh} u, \operatorname{tg}\phi\} = \frac{2}{r\cos^2\phi}.$$

Сравнивая с выражением (9), получаем окончательный ответ

$$\{u, \phi\} = \frac{2}{r \operatorname{ch} u}.$$

После ограничения на поверхность $r = R$ получаем невырожденную скобку с Пуассоновым тензором

$$\omega(u, \phi) = \begin{pmatrix} \{u, u\} & \{u, \phi\} \\ \{\phi, u\} & \{\phi, \phi\} \end{pmatrix} = \frac{2}{R \operatorname{ch} u} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Перепишем выражение для скобки Пуассона на гиперболоиде в следующем виде:

$$\frac{R \operatorname{ch} u}{2} \{u, \phi\} = 1.$$

Как нетрудно видеть, в качестве координат Дарбу можно взять $q = \operatorname{sh} u$, $p = R\phi/2$. Естественно, этот выбор далеко не однозначен, не только потому, что константу $R/2$ можно произвольно делить между q и p, но и потому, что можно вводить функциональную зависимость от u и ϕ в определение координат Дарбу. Например, можно брать

$$q = f(u), \quad p = \frac{R \operatorname{ch} u}{2 f'(u)} \phi,$$

где $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — обратимая вещественная фунция с не равной нулю производной. Если производная где-то равна нулю, то замена становится, вообще говоря, только локальной. Например,

$$q = e^u, \quad p = \frac{R}{4} \phi (1 + e^{-2u}).$$

б) По определению Гамильтонова векторного поля имеем:

$$X_u = \{u, u\}\partial_u + \{\phi, u\}\partial_\phi = -\frac{2}{R \operatorname{ch} u} \partial_\phi, \qquad X_\phi = \{u, \phi\}\partial_u + \{\phi, \phi\}\partial_\phi = \frac{2}{R \operatorname{ch} u} \partial_u.$$

в) Симплектическая 2-форма, отвечающая невырожденной Пуассоновой структуре (10) имеет вид:

$$\Omega = \frac{1}{2} \Omega_{ij} \, dz_i \wedge dz_j, \qquad \|\Omega_{ij}\| = \|\omega_{ij}\|^{-1},$$

где выбрана такая нумерация координат: $z_1 = u$, $z_2 = \phi$. Вычислив обратную матрицу Пуассонова тензора (10), получаем:

$$\Omega = \frac{R \operatorname{ch} u}{2} \, d\phi \wedge du.$$

г) Подставляя выражения Гамильтоновых векторных полей X_u и X_ϕ, получаем иллюстрацию известной формулы:

$$\Omega(X_u, X_\phi) = -\frac{2}{R \operatorname{ch} u} = -\{u, \phi\}.$$

Как известно, для произвольных Гамильтоновых векторных полей на многообразии с невырожденной скобкой Пуассона выполнено равенство:

$$\Omega(X_f, X_g) = -\{f, g\}.$$