# Механика 2023

Домашнее задание № 6

Срок сдачи задания: до конца дня **29.04.23**

---

**1.** Движение заряженной частицы массы $m$ и заряда $e$ в пространстве $\mathbb{R}^3$ в поле расположенного в начале координат электрического диполя характеризуется лагранжианом

$$L = \frac{m\dot{\vec{r}}^{\,2}}{2} - \frac{e(\vec{d}, \vec{r}\,)}{r^3},$$

где $\vec{r}$ — радиус-вектор частицы, $r = |\vec{r}|$, $\vec{d}$ — постоянный вектор, называемый дипольным моментом.

а) Определите, какие из преобразований группы Галилея являются симметриями этой системы и постройте соответствующие нётеровские интегралы движения.

б) Докажите, что однопарамерическая группа преобразований

$$\Delta_\alpha : \quad \tilde{\vec{r}} = e^{\alpha}\vec{r}, \quad \tilde{t} = e^{2\alpha}t, \quad \alpha \in \mathbb{R}\,,$$

является симметрией действия системы. Постройте отвечающий этой группе нётеров интеграл движения.

**2.** Движение материальной точки массы $m$ вдоль оси $O\vec{x}$ в однородном силовом поле определяется лагранжианом

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} + mgx.$$

Докажите, что однопараметрическая группа преобразований

$$\Delta_\varepsilon : \quad \tilde{t} = t, \quad \tilde{x} = x + \varepsilon$$

является симметрией действия системы и выпишите соответствующий нётеров интеграл движения.

**3.** Лагранжиан одномерного гармонического осциллятора имеет вид:

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{m\omega^2x^2}{2}.$$

а) Найдите обобщенный импульс и постройте гамильтониан $H$ этой системы.

б) Заменим пару вещественных переменных $x$ и $p$ на одну комплесную $a$:

$$a := \sqrt{\frac{m\omega}{2}}\left(x + i\,\frac{p}{m\omega}\right).$$

Выразите гамильтониан в терминах комплексно сопряженных переменных $a$ и $\bar{a}$.

в) Вычислите скобки Пуассона $\{a, \bar{a}\}$ и $\{a, H\}$.

г) Выпишите уравнение Гамильтона для $a$ и найдите его общее решение.

**4.** Лагранжиан точечного заряда $q$ массы $m$, движущегося в пространстве $\mathbb{R}^3$ в постоянном однородном магнитном поле $\vec{B}$ параллельном оси $O\vec{z}$, в декартовых координатах имеет вид:

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) + \xi\left(x\dot{y} - y\dot{x}\right).$$

Здесь константа $\xi$ выражается через физические параметры задачи: $\xi = \frac{qB}{2c}$, где $B = |\vec{B}|$, $c$ — скорость света в вакууме.

а) Найдите обобщенные импульсы и постройте гамильтониан системы.

б) Найдите решение уравнений Гамильтона, отвечающее начальным данным

$$x(0) = y(0) = z(0) = 0, \quad p_x(0) = p, \quad p_y(0) = 0, \quad p_z(0) = P,$$

и опишите форму соответствующей траектории. *(Совет: при решении удобно воспользоваться комплексными переменными $Q = x + iy$, $P_Q = p_x + ip_y$.)*

в) Вычислите скобки Пуассона $\{v_i, v_j\}_{1\le i,j\le 3}$ между компонентами вектора скорости заряда $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \equiv (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$.

**5.** Рассмотрим фазовое пространство трехмерной частицы, снабженное канонической скобкой Пуассона $\{x_i, p_j\} = \delta_{ij}$, где $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$ и $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$ — радиус-вектор и импульс частицы, соответственно.

Пусть $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ — произвольная гладкая векторная функция:

$$\vec{F} = f_1\,\vec{r} + f_2\,\vec{p} + f_3\,[\vec{r} \times \vec{p}],$$

где $f_{\alpha\ (\alpha=1,2,3)}$ — функции от скалярных аргументов $\vec{r}^{\,2}$, $\vec{p}^{\,2}$ и $(\vec{r}, \vec{p})$. Вычислите следующие скобки Пуассона:

а) $\{\vec{F}, (\vec{M}, \vec{n})\}$, где $\vec{M} := [\vec{r} \times \vec{p}]$ — вектор углового момента частицы, $\vec{n}$ — постоянный вектор, задающий направление в пространстве (компоненты $\vec{n}$ не зависят от $\vec{r}$ и $\vec{p}$).

б) $\{\vec{F}, \vec{M}^2\}$.

**6.** Лагранжиан двумерного изотропного осциллятора в декартовых координатах пространства $\mathbb{R}^2$ имеет вид:

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - \frac{m\omega^2}{2}\left(x^2 + y^2\right).$$

а) Найдите обобщенные импульсы и постройте гамильтониан системы.

б) Докажите, что функции

$$J_1 = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 - p_y^2\right) + \frac{m\omega^2}{2}\left(x^2 - y^2\right), \quad J_2 = \frac{1}{m}\,p_x p_y + m\omega^2 xy, \quad J_3 = \omega\left(xp_y - yp_x\right)$$

являются интегралами движения.

в) Докажите, что линейная оболочка функций $J_i$ $\mathcal{L} := \mathrm{Span}(J_1, J_2, J_3)$ инвариантна относительно скобки Пуассона, т.е., скобка Пуассона любых двух элементов из $\mathcal{L}$ принадлежит $\mathcal{L}$.