

Классическая теория поля 2023

Листок 4. Поля в волновой зоне и излучение

Срок сдачи: 15 мая 2023

1. Электромагнитное поле в пространстве \mathbb{R}^3 задано 4-вектором потенциала следующего вида:

$$A^0 = 0, \quad \vec{A}(t, \vec{r}) = \frac{E}{2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \cos \omega t.$$

Определите:

- Вектор плотности потока энергии в произвольной точке \vec{r} пространства \mathbb{R}^3 (вектор Умова-Пойнтинга $\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \times \vec{H}]$).
- Полную энергию за четверть периода $0 < t < \pi/2\omega$, прошедшую через поверхность цилиндра радиуса R и высоты L с осью симметрии Oz . Геометрический центр цилиндра находится в начале координат.

2. Докажите, что для электромагнитного поля величина

$$W^2 - \frac{1}{c^2} |\vec{S}|^2$$

является лоренцевым инвариантом. Здесь W — плотность энергии поля, \vec{S} — вектор Умова-Пойнтинга (вектор плотности потока энергии).

3. Рассмотрим *замкнутую* (то есть, не подверженную действию внешних сил) конечную систему массивных заряженных частиц, у которых отношение массы к заряду одинаково для всех частиц:

$$\frac{m_k}{q_k} = \alpha = \text{const}, \quad \forall k.$$

Докажите, что в такой системе отсутствует электрическое дипольное излучение при любом движении частиц.

Указание. Вспомните определение центра масс системы материальных точек и учтите характер движения центра масс замкнутой системы.

4. Заряд q колеблется вдоль оси Oz вокруг начала координат по закону

$$z(t) = R \cos(\omega t).$$

Полагая $R\omega \ll c$ (c — скорость света), найдите:

- Напряженности электрического и магнитного полей, создаваемых этим зарядом в областях пространства, удаленных на расстояние $r \gg c/\omega$ (волновая зона), в первом исчезающем порядке по отношению v/c , где v — скорость заряда.
 - Усредненную по периоду колебаний плотность потока излучения как функцию угла θ между направлением в точку наблюдения и положительным направлением оси Oz .
5. Тонкий обруч радиуса R изготовлен из непроводящего материала. На дугу обруча с центральным углом α нанесен заряд Q с постоянной линейной плотностью распределения по дуге. Обруч равномерно вращается в своей плоскости вокруг оси, проходящей через его геометрический центр перпендикулярно плоскости обруча. Угловая скорость вращения ω .

- Найдите вектор дипольного момента $\vec{d}(t)$ этой системы.
- Найдите полную мощность излучения во всех направлениях в дипольном приближении.