

Классическая теория поля 2023

Листок 3. ЛАГРАНЖЕВА ФОРМУЛИРОВКА И ТЕОРЕМА НЁТЕР

Срок сдачи: **05 мая 2023**

1. Решения уравнения движения свободного массивного скалярного поля в 4-мерном пространстве Минковского с лагранжевой плотностью

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2$$

раскладываются в сумму положительно и отрицательно частотных компонент:

$$\phi(x) = \phi^+(x) + \phi^-(x), \quad \phi^\pm(x) = \int_{\mathbb{R}^3} a^\pm(\vec{p}) \frac{e^{\pm i p \cdot x}}{2p^0} \Big|_{p^0 = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3},$$

где $p \cdot x = p^\mu x_\mu$. Выразите сохраняющийся 4-вектор P^μ полной энергии и импульса поля ϕ в терминах амплитуд $a^\pm(\vec{p})$.

Напоминание: $P^\mu = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 x T^{0\mu}$, где $T^{\mu\nu}$ — тензор энергии-импульса поля.

2. В двумерном пространстве Минковского с метрикой $g = \text{diag}(1, -1)$ задано скалярное поле с лагранжевой плотностью

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{\beta^2} (1 - \cos(\beta \phi)), \quad \beta > 0.$$

- а) Найдите частное решение уравнений движения для поля ϕ в виде бегущей вправо волны $\phi(x) = f(x^1 - vx^0)$ такое, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - f(-x)) = 2\pi/\beta$.
- б) Пользуясь теоремой Нётер, вычислите *полную* энергию и импульс найденного в пункте а) решения.

3. Рассмотрим систему 2 свободных комплексных скалярных полей $\phi_1(x)$ и $\phi_2(x)$ с лагранжевой плотностью

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^2 \partial_\mu \bar{\phi}_i \partial^\mu \phi_i.$$

Помимо пространственно-временных симметрий из группы Пуанкаре эта модель имеет и другие симметрии, называемые *внутренними*. Определите группу внутренних симметрий модели и найдите соответствующие сохраняющиеся Нётеровские токи.

4. В трехмерном пространстве Минковского с метрическим тензором $g = \text{diag}(1, -1, -1)$ задано действие для вещественного векторного поля $A_\mu(x)$, взаимодействующего с комплексным скалярным полем ϕ

$$S[A, \phi] = \int_{M_3} d^3 x \left[\varepsilon^{\mu\nu\lambda} A_\mu \partial_\nu A_\lambda + \overline{\nabla^\mu \phi} \nabla_\mu \phi \right], \quad \nabla_\mu := \partial_\mu - iqA_\mu,$$

где вещественная константа q — параметр взаимодействия, а $\varepsilon^{\mu\nu\lambda}$ — антисимметрический тензор третьего ранга, нормированный условием $\varepsilon^{012} = 1$.

- а) Проверьте, что действие $S[A, \phi]$ инвариантно относительно калибровочных преобразований полей вида:

$$A_\mu(x) \mapsto \tilde{A}_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \alpha(x), \quad \phi(x) \mapsto \tilde{\phi}(x) = e^{iq\alpha(x)} \phi(x).$$

- б) Напишите уравнения движения полей ϕ и A_μ .
- в) Найдите тензор энергии-импульса этой системы.