Скобки Пуассона углового момента

Угловой момент — важная динамическая характеристика механической системы, конфигурационное пространство которой не одномерно.

Для частицы в $\mathbb{R}^3$:

$\boxed{0}$ $\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{p}]$, $\vec{r} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$ — радиус-вектор

Удобное описание компонент углового момента: $\boxed{M_i = \varepsilon_{ijk} q_j p_k}$, здесь

ε_{ijk} — полностью антисимметрический тензор 3-го ранга: $\begin{cases} \varepsilon_{123} = 1 \\ \varepsilon_{ijk} = (-1)^{\bar{\sigma}} \varepsilon_{123} \end{cases}$, где

$\bar{\sigma}$ — четность перестановки $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{pmatrix}$.

Кроме того, будем применять правило суммирования по повторяющимся индексам. Итак, из свойств ε_{ijk} $\Rightarrow$

$$M_i = \varepsilon_{ijk} q_j p_k \Rightarrow \begin{cases} M_1 = \varepsilon_{123} q_2 p_3 + \varepsilon_{132} q_3 p_2 = \\ \quad = q_2 p_3 - q_3 p_2 \\ M_2 = q_3 p_1 - q_1 p_3 \\ M_3 = q_1 p_2 - q_2 p_1 \end{cases}$$

Для канонической Пуассоновой структуры $\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$ вычислим скобки Пуассона момента с другими динамическими величинами.

Пример 1. Скобки компонент углового момента с компонентами радиус-вектора

$\{M_i, q_j\} = \{\varepsilon_{iab} q_a p_b, q_j\} =$ (по линейности скобок и правилу Лейбница) $=$

$= \varepsilon_{iab} q_a \{p_b, q_j\} = -\varepsilon_{iaj} q_a = \underline{\varepsilon_{ija} q_a}$

Аналогично:

$\underline{\{M_i, p_j\} = \varepsilon_{ija} p_a}$

Пример 2. Скобки углового момента со скалярными функциями: $\vec{r}^{\,2}$, $\vec{p}^{\,2}$ и $(\vec{r}\vec{p})$

$\vec{r}^{\,2} = \vec{r}\cdot\vec{r} = q_i q_i$

$\{M_i, \vec{r}^{\,2}\} = \{M_i, q_a q_a\} = 2 q_a \{M_i, q_a\} =$

$=$ (Пример 1) $= \underbrace{2\varepsilon_{iab} q_a q_b}_{2[\vec{r}\times\vec{r}],} \equiv 0.$

Аналогично $\{M_i, \vec{p}^2\} = 0$.

$\{M_i, \vec{r}\cdot\vec{p}\} = 0$

Замечание. Эти нулевые ответы не удивительны, если вспомнить, что компоненты углового момента – генераторы группы вращений.

Пример 3.

$$\{M_1, M_2\} = \{q_2 p_3 - q_3 p_2, q_3 p_1 - q_1 p_3\} =$$

$$= \{q_2 \underline{p_3}, \underline{q_3} p_1\} + \{\underline{q_3} p_2, q_1 \underline{p_3}\} =$$

$$= -q_2 p_1 + q_1 p_2 = M_3$$

$\boxed{У}$ $\{M_i, M_j\} = \varepsilon_{ijk} M_k$ – алгебра Ли $so(3)$. (*)

$\boxed{У}$ Этот вид будет иметь скобка Пуассона углового момента с $\forall$ вектором.

Следствие: $\{M_i, \vec{M}^2\} = 0$

Замечание. Это будет с $\forall$ скалярной функцией.

Итак, квадрат углового момента

$\vec{M}^2 = M_1^2 + M_2^2 + M_3^2$ – элемент Пуассонова центра вырожденной $so(3)$-скобки (*).

Изучим пуассонову структуру (*) $= 4 =$ на Евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ с координатами (M_1, M_2, M_3).

Гамильтоновы векторные поля, порождённые координатными функциями (компонентами углового момента M_i):

$X_1 \leftrightarrow \{*, M_1\}$. Получим явный вид в базисе $\frac{\partial}{\partial M_k}$:

$$X_1 = (X_1)_k \frac{\partial}{\partial M_k} = \{M_k, M_1\}\frac{\partial}{\partial M_k} =$$

$$= \{M_2, M_1\}\frac{\partial}{\partial M_2} + \{M_3, M_1\}\frac{\partial}{\partial M_3} = M_2 \frac{\partial}{\partial M_3} - M_3 \frac{\partial}{\partial M_2}$$

Для общего k:

$$X_k \leftrightarrow \{*, M_k\} \Rightarrow \boxed{X_k = \varepsilon_{kab} M_a \frac{\partial}{\partial M_b}}$$

Из свойств ε-тензора $\Rightarrow$

$M_k X_k \equiv 0$ — три поля зависимы, так, как они касаются <u>двумерных</u> симплектических листов скобки (*) — — сфер: $M_i M_i = R^2$

$X_k \triangleright (M_i M_i - R^2) = 0$ — условие касания <u>векр. поля</u> X_k и поверхности $\vec{M}^2 = R^2$.

Проверим теорему об алгебре Ли:

$$[X_1, X_2] = \left[M_2 \frac{\partial}{\partial M_3} - M_3 \frac{\partial}{\partial M_2}, M_3 \frac{\partial}{\partial M_1} - M_1 \frac{\partial}{\partial M_3} \right] =$$

$$= M_2 \frac{\partial}{\partial M_1} - M_1 \frac{\partial}{\partial M_2} = -X_3 = -X_{\{M_1, M_2\}}$$

Какие Гамильтоновы потоки (группы диффеоморфизмов $\mathbb{R}^3$) задают эти векторные поля?

Для примера рассмотрим X_1. Найдем его интегральные кривые в $\mathbb{R}^3$.

$$\dot{M}_1 = X_1 \triangleright M_1 = 0 \Rightarrow M_1 = Const$$

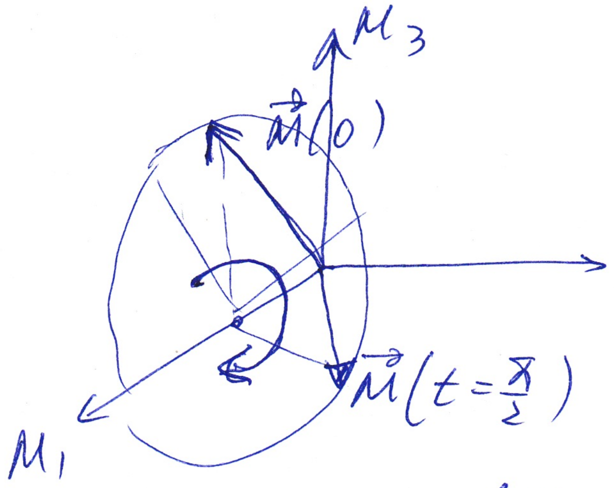
$$\begin{cases} \dot{M}_2 = X_1 \triangleright M_2 = \{M_2, M_1\} = -M_3 \\ \dot{M}_3 = X_1 \triangleright M_3 = M_2 \end{cases} \quad (**)$$

$\Rightarrow$ интегральные кривые располагаются в плоскостях $M_1 = Const$.

Из $(**)$: $\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} M_2 \\ M_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M_2 \\ M_3 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} M_2(t) \\ M_3(t) \end{pmatrix} = \exp\left(t\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} M_2(0) \\ M_3(0) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} Cos\,t & -Sin\,t \\ Sin\,t & Cos\,t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M_2(0) \\ M_3(0) \end{pmatrix}.$$

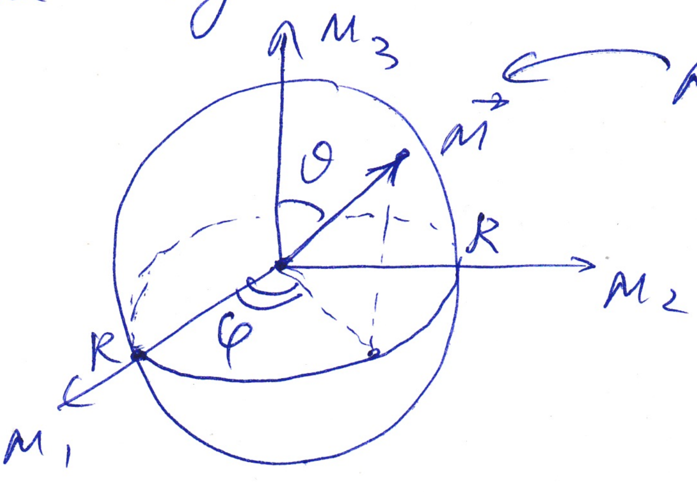


Вектор $\vec{M}(0)$ вращается вокруг оси M_1 с сохранением первой компоненты $\vec{M}_1(t)=M_1(0)$.

$\boxed{\text{V}}$ Линейная комбинация $\vec{n}\vec{X}=n_1X_1+n_2X_2+$
$+n_3X_3$

задает вращение вокруг единичного вектора $\vec{n}$ (ось вращения).

<u>Симплектическое слоение</u> $so(3)$ скобки Пуассона (*): $\mathbb{R}^3$ расслаивается в объединение концентрических сфер. Начало координат — "симплектический лист" нулевой размерности — точка вырождения Пуассоновой структуры.



$\vec{M}^2=R^2$

$M_1=R\sin\theta\cos\varphi$

$M_2=R\sin\theta\sin\varphi$

$M_3=R\cos\theta$

Пуассонова структура на сфере $\vec{M}^2 = R^2$ задаётся скобками координат θ и φ.

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{M_2}{M_1} \quad \cos\theta = \frac{M_3}{|\vec{M}|}, \quad |\vec{M}| = \sqrt{M_i M_i}$$

$$\{\cos\theta, \operatorname{tg}\varphi\} = -\frac{\sin\theta}{\cos^2\varphi}\{\theta, \varphi\}$$

и

$$\left\{\frac{M_3}{|\vec{M}|}, \frac{M_2}{M_1}\right\} = \frac{1}{|\vec{M}|}\left(\frac{1}{M_1}\{M_3, M_2\} - \frac{M_2}{M_1^2}\{M_3, M_1\}\right) =$$

Пуассон-центр. функция

$$= -\frac{1}{|\vec{M}|}\left(1 + \frac{M_2^2}{M_1^2}\right)\Bigg|_{\vec{M}^2 = R^2} = -\frac{1}{R\cos^2\varphi}$$

$$\Rightarrow \boxed{\{\theta, \varphi\} = \frac{1}{R\sin\theta} \Rightarrow} \quad (\star)$$

$$\Rightarrow \{\varphi, R\cos\theta\} = 1$$

Координаты Дарбу.

Итак, $M_3 = R\sin\theta$ – импульс, сопряжённый координате φ.

<u>Замечание</u>. Скобка $(\star)$ сингулярна на оси Oz, где $\theta = 0$ или $\theta = \pi$. Это следствие сингулярности сферической замены на оси Oz. Вблизи Oz надо выбирать другую карту на сфере.