Семинар 11

На семинаре 11 было дано следующее определение закона композиции на гладкой кубике X:
1) фиксирована точка $0 \in X$, которая принимается за нейтральный элемент группы X;
2) для произвольных точек a и b на X обозначим через $a * b$ точку на X такую, что $\langle a, b\rangle \cap X = \{a, b, a*b\}$, где $\langle a, b\rangle$ - прямая через точки a и b (если a и b совпадают, то по определению прямая $\langle a, b\rangle$ считается касательной к X в точке a); теперь композицией точек a и b в группе X по определению считается точка $a \circ b \in X$ такая, что $\{0, a * b, a \circ b\} = \langle 0, a * b\rangle \cap X$; ввиду очнвидной коммутативности композиции $a \circ b$ будем всюду в дальнейшем обозначать ее через $a + b$.
Ключевым свойством описанного группового закона является свойство его ассоциативности: $a + (b + c) = (a + b) + c$. Как мы выяснили на семинаре 11, для доказательства этого свойства нужно воспользоваться утверждением следующей задачи 1.

Задача 1. Докажите, что этот закон удовлетворяет свойствам коммутативной группы.
Даны две кубические кривые X_1 и X_2, распавшиеся на тройки различных прямых. Пусть кривые X_1 и X_2 пересекаются в 9 различных точках. Тогда если кубика X проходит через 8 из этих точек, то она проходит и через 9-ую точку.

Задача 2. Пользуясь предыдущей задачей, докажите (то есть повторите рассуждение, проведенное на семинаре) ассоциативность группового закона на гладкой кубике X.

Оставшиеся задачи - это задачи из задания к предыдущему семинару 10.

Задача 3. Докажите, что

$$\{\text{множество точек перегиба кривой X}\} \ \subset\ X \cap He(X),$$

то есть каждая точка перегиба на X лежит в пересечении кривой X с ее гессианом $He(X)$.
Указание. Воспользоваться тем, что, как было установлено на семинаре, касательная прямая к X в точке перегиба a является компонентой полярной коники $Q_a(X)$.

Задача 4. Докажите, что

$$\mathrm{Sing} X \ \subset\ X \cap He(X),$$

то есть каждая особая точка кривой X лежит в пересечении кривой X с ее гессианом $He(X)$.

Задача 5. Докажите, что на X нет других точек пересечения с ее гессианом $He(X)$, кроме точек, описанных в задачах 1 и 2, то есть каждая точка пересечения кривой X с ее гессианом либо является точкой перегиба кривой X, либо является особой точкой на X:

$$\{\text{множество точек перегиба кривой X}\} \ \cup\ \mathrm{Sing} X \ =\ X \cap He(X).$$