Группа кос, квантовые группы и приложения

Листок 6. Представления алгебры уравнения отражений

Рекомендуемый срок сдачи: **18 мая 2023**

1. Рассмотрим алгебру уравнения отражений, порожденную N^2 генераторами L_i^j, $1 \le i, j \le N$, удовлетворяющими квадратичным соотношениям

$$R_1 L_1 R_1 L_1 = L_1 R_1 L_1 R_1, \qquad L = \|L_i^j\| \tag{1}$$

с R-матрицей $GL(N)$ типа. Перейдем к новым генераторам K_i^j алгебры уравнения отражений с помощью линейного сдвига:

$$L = I e_{\mathcal{L}} - (q - q^{-1})K, \qquad K = \|K_i^j\|,$$

где $e_{\mathcal{L}}$ — единичный элемент алгебры уравнения отражений.

а) Получите перестановочные соотношения на генераторы K_i^j в терминах матрицы K.

б) Зафиксируем базис $\{x_i\}_{1 \le i \le N}$ в N-мерном комплексном векторном пространстве V и зададим линейное действие генераторов алгебры уравнения отражений следующим образом:

$$K_i^j \triangleright x_k = C_k^j \, x_i, \qquad C_i^j = \sum_{\alpha+1}^{N} \Psi_{\alpha\, i}^{\alpha\, j},$$

где Ψ кособратная матрица к R. Докажите, что это действие определяет представление алгебры уравнения отражений в пространстве V и, если матрица C невырождена, это представление неприводимо.

в) Докажите, что центральные элементы $p_m(K) = \mathrm{Tr}_R(K^m)$ представляются скалярными операторами

$$p_m(K\triangleright) = \chi_m \, \mathrm{Id}_V$$

и найдите коэффициенты χ_m.

2. Определим "обобщенное правило Лейбница" для перестановки генераторов L_i^j и базисных векторов x_i (см. предыдущую задачу):

$$R_1 L_1 R_1 x_1 = x_1 L_2. \tag{2}$$

а) Проверьте, что приведенное выше правило Лейбница, дополненное действием генераторов на единичный элемент

$$L_i^j \triangleright 1 = \varepsilon(L_i^j) = \delta_i^j, \tag{3}$$

определяет представление алгебры уравнения отражений (1) в тензорных степенях $V^{\otimes k}$, $\forall\, k \ge 1$, и найдите явный вид этого действия в тензорном базисе $R_1 R_2 \dots R_k \, x_1 x_2 \dots x_k$ пространства $V^{\otimes k}$:

$$L_1 \triangleright R_1 R_2 \dots R_k \, x_1 x_2 \dots x_k = ?$$

б) Проверьте, что действие генераторов алгебры уравнения отражений в пространстве $V^{\otimes k}$ можно записать в матричном виде:

$$L_{\underline{k+1}} \triangleright x_1 x_2 \dots x_k = J_{k+1}^{-1}(R)\, x_1 x_2 \dots x_k,$$

где $J_{k+1}^{-1}(R) = R_k^{-1} \dots R_1^{-2} \dots R_k^{-1}$ — R-матричное представление элемента Юциса-Мерфи. Пользуясь этой записью, найдите явный вид матрицы $\Omega^{(k)}(R)$, определяющей действие центрального элемента $p_1(L) = \mathrm{Tr}_R(L)$ в пространстве $V^{\otimes k}$:

$$\mathrm{Tr}_R(L) \triangleright x_1 x_2 \dots x_k = \Omega^{(k)}(R)_{12\dots k}\, x_1 x_2 \dots x_k.$$

в) Пространство $V^{\otimes k}$ разлагается в прямую сумму

$$V^{\otimes k} = \bigoplus_{\lambda \vdash k} \bigoplus_{i=1}^{d_\lambda} V_{(i)}^{\lambda}$$

где $V_{(i)}^{\lambda} = P_{ii}^{\lambda}(R) V^{\otimes k}$ — образы действия примитивных идемпотентов $P_{ii}^{\lambda}(R)$ алгебры Гекке $H_k(q)$ в ее R-матричном представлении. Здесь индекс i нумерует стандартные таблицы Юнга, отвечающие данному разбиению $\lambda \vdash k$, d_λ — количество таких таблиц. Докажите, что центральный элемент p_1 в пространствах $V_{(i)}^{\lambda}$ представляется скалярными операторами:

$$\mathrm{Tr}_R(L \triangleright) = \chi_\lambda \, \mathrm{Id}_{V_{(i)}^{\lambda}},$$

где коэффициенты χ_λ зависят только от разбиения λ и не зависят от номера таблицы Юнга i и найдите явный вид этих коэффициентов.

3. Рассмотрим пространство V^*, двойственное к N-мерному пространству V, введенному в задачах 1 и 2. Пусть $\{y^i\}_{1 \le i \le N}$ — базис пространства V^*, двойственный базису $\{x_i\}_{1 \le i \le N}$

$$\langle x_i, y^j \rangle = \delta_i^j$$

относительно невырожденной билинейной формы $\langle \, , \, \rangle : V \otimes V^* \to \mathbb{C}$. Определим "обобщенное правило Лейбница" для перестановки генераторов L_i^j с векторами y^k:

$$L_2\, y_1 = y_1 R_1 L_1 R_1. \tag{4}$$

а) Докажите, что перестановка (4) вместе с действием (3) задает представление алгебры уравнения отражений в пространстве V^*.

б) Постройте представление алгебры уравнения отражений в пространстве $V \otimes V^*$, вычислив действие генераторов на базисных векторах $x_i y^j$ с помощью "обобщенных правил Лейбница" (2) и (4).

в) Пользуясь результаом предыдущего пункта, найдите "обобщенное правило Лейбница" для перестановки генераторов L_i^j с базисными элементами $M_k^s = x_k y^s$, которое позволит строить представления алгебры уравнения отражений в тензорных степенях $W^{\otimes n}$ пространства $W = V \otimes V^*$.