

Механика 2023

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ № 7

Срок сдачи задания: до конца дня **20.05.23**

1. Пуассонова структура на \mathbb{R}^3 в декартовых координатах (x, y, z) задается формулами

$$\{x, y\} = -2z, \quad \{y, z\} = -2x, \quad \{z, x\} = 2y.$$

а) Убедитесь, что функция $f(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2$ принадлежит пуассонову центру этой структуры, то есть имеет нулевую скобку Пуассона с любой функцией.

б) Для семейства поверхностей уровня этой функции — двухполостных гиперболоидов вращения

$$y^2 = x^2 + z^2 + R^2, \quad R \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

постройте наборы координат Дарбу.

в) Рассмотрим три Гамильтоновых векторных поля X_x , X_y и X_z , порожденных декартовыми координатами (напомним, что $X_x = \{*, x\}$ и т.д.). На поверхности гиперболоида, заданного в пункте б), выразите эти поля через два базисных касательных векторных поля к гиперболоиду и найдите функциональное тождество, отражающее зависимость трех полей X_x , X_y и X_z на поверхности гиперболоида.

2. Для канонического преобразования $(q, p) \mapsto (Q, P)$ известно выражение нового импульса P в терминах старых координат q и p :

$$P = \frac{p}{f'(q)}, \quad \text{где } f(q) \in C^1(\mathbb{R}), \quad f'(q) = \frac{df}{dq}.$$

а) Найдите производящую функцию 1-го рода этого канонического преобразования, воспользовавшись анзацем $F_1(q, Q) = e^{-Q}A(q)$, $A(q) \in C^1(\mathbb{R})$.

Производящая функция определяется неоднозначно, достаточно найти одну.

б) Получите выражение для новой координаты Q в терминах q и p .

3. Бусинка массы m перемещается вдоль проволоки, лежащей на столе (т.е., в горизонтальной плоскости). Трение между бусинкой и проволокой отсутствует, внешние силы на систему не действуют. Форма проволоки в декартовых координатах на плоскости задается соотношением $y(x) = \cosh x$.

а) Запишите лагранжиан и с помощью преобразования Лежандра постройте гамильтониан этой механической системы.

б) Подберите каноническое преобразование $(x, p) \mapsto (X, P)$ такое, что в новых переменных гамильтониан системы будет зависеть только от импульса: $\tilde{H}(P)$.

Воспользуйтесь результатами задачи 2.

в) Найдите общее выражение для траектории движения бусинки $x(t)$.

4. Одномерный гармонический осциллятор задается гамильтонианом

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}.$$

- а) Считая начальные данные q_0 и p_0 канонически сопряженными переменными со скобкой Пуассона $\{q_0, p_0\} = 1$, докажите, что решения уравнений движения $q(t)$ и $p(t)$ в любой момент времени тоже образуют пару канонически сопряженных величин:

$$\{q(t), p(t)\}_{(q_0, p_0)} = 1.$$

- б) Найдите производящую функцию первого рода $F_1(q_0, q(t), t)$, отвечающую каноническому преобразованию эволюции во времени

$$(q_0, p_0) \mapsto (q(t), p(t)).$$

- в) Найдите производящую функцию второго рода $F_2(q_0, p(t), t)$, отвечающую каноническому преобразованию эволюции.