Семинар 12

Пусть X - неособая кубика над полем $\mathbb{C}$. Как мы уже знаем, на X определен закон композиции (который будем называть *сложением*), превращающий X в абелеву группу по сложению $(X, +)$. Для произвольного натурального $n \geqslant 2$ подмножество $X_n := \{a \in X \mid na = 0\}$ в X, очевидно, является подгруппой в X. (Здесь под na понимается результат сложения точки $a \in X$ как элемента группы $(X, +)$ с собой n раз.) Подгруппа X_n называется *подгруппой n-кручения* группы X.

Задача 1. В качестве нуля (т.е. нейтрального элемента) группы $(X, +)$ возьмем точку перегиба на X.
1) Докажите, что группа X_3 состоит из 9 элементов, а именно, точек перегиба кубики X.
2) Докажите, что имеет место изоморфизм групп $X_3 \simeq \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$.

Задача 2. Пусть, как и выше, в качестве нуля группы $(X, +)$, взята точка перегиба на X.
1) Укажите геометрическую реализацию точек подгруппы X_2 2-кручения в X.
2) Чему изоморфна группа X_2?

Следующая задача - это задача 5 из задания к семинару 11 для случая, когда X - гладкая кубика.

Задача 3. Докажите, что каждая точка пересечения кривой X с ее гессианом является точкой перегиба кривой X.