Семинар 5

1. Поверхность в E^3 задана графиком $z = f(x,y)$. Доказать, что вторая фундаментальная форма (Lx, x), где L – это оператор формы, вычисляется по формуле $\frac{f_{xx}{}^2(dx)^2+f_{yy}{}^2(dy)^2+2f_{xy}dxdy}{\sqrt{(1+f_x{}^2+f_y{}^2)}}$.

2. Проверить, что композиция связности Леви-Чивита в E^3 с ортогональным проектированием на касательное пространство определяет связность Леви-Чивита на гладкой поверхности в E^3.

3. Рассмотрим на вещественной прямой E^1 связность, которая задается условием $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}}\frac{\partial}{\partial x} = 1$. Требуется параллельно перенести вектор $-10\frac{\partial}{\partial x}$ из точки $x = 0$ в точку $x = 1$ по пути а) $x = t$, б) $x = t^2$.

4. Докажите, что векторное поле $Y(t), Y(t_0) = V$, параллельное вдоль кривой $\gamma(t)$, не зависит от параметризации кривой.

5. Рассмотрим сферический треугольник, высекаемый положительным октантом на сфере единичного радиуса в E^3 (центр сферы находится в начале координат). На какой угол повернется вектор, лежащий в касательном пространстве к Северному полюсу, если его параллельно перенести вдоль трех сторон сферического треугольника?

6. Объясните, как с помощью параллельного переноса можно продифференцировать любой тензор, заданный в окрестности данной точки, по напралению любого вектора, приложенного к этой точке (=вектора из касательного пространства к многообразию в этой точке).

7. Вычислите символы Кристоффеля для связности Л-Ч на евклидовой плоскости в полярной системы координат и поймите, что они не являются координатами тензора.

8. Изменится ли связность Л-Ч, если метрику на многообразии умножить на 10?

9. Рассмотрим на верхней полуплоскости Пуанкаре треугольник, две вершины которого лежат на абсолюте, а угол при третьей конечной вершине равен α. Доказать,что:
а) все такие треугольники равны;
б) площадь любого такого треугольника равна $\pi - \alpha$.

10*. Доказать, что площадь гиперболического треугольника равна π минус сумма его внутренних углов.

11. Доказать, что на матричной группе Ли существует единственная связность ∇, такая, что $\nabla X = 0$ для любого левоинвариантного векторного поля X на группе.

12**. Доказать, что связность, о которой идет речь в задаче 11, не имеет кручения тогда и только тогда, когда рассматриваемая группа Ли абелева.