Механика 2023

Канонические преобразования в Гамильтоновой механике.

Краткое напоминание:

В Лагранжевом формализме $\forall$ обратимые точечные преобразования координат:

$$q^i \longmapsto Q^i \ : \ q^i = f^i(Q, t)$$

не меняют структуру уравнений движения: с учётом изменения Лагранжиана $L(q, \dot{q}, t) \longmapsto \tilde{L}(Q, \dot{Q}, t)$ ур-я Эйлера-Лагранжа сохраняют свой функциональный вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0 \longmapsto \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}^i}\right) - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial Q^i} = 0$$

В Гамильтоновом формализме <u>не любая</u> обратимая замена координат и импульсов:

$$\begin{pmatrix} q^i \\ p_j \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} Q^i \\ P_j \end{pmatrix}$$ сохраняет

структуру Гамильтоновых уравнений движения: $\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$, $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}$.

=2=

После произвольной обратимой замены

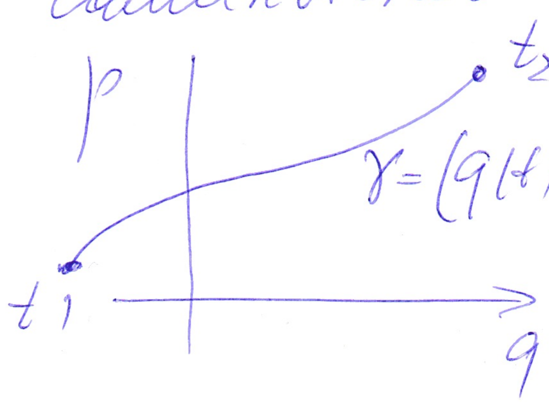
$$q^i = f^i(Q,P,t), \quad p_i = g_i(Q,P,t)$$

может не найтись новая ф-ция Гамильтона $\tilde{H}(Q,P,t)$, такая, что

$$\dot{Q}^i = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q^i}.$$

Канонические преобразования — это подмножество обратимых замен переменных, которое сохраняет "гамильтоновость" динамики в новых переменных. Отсюда очевидно, что канонические преобразования образуют группу относительно композиции как операции умножения.

Различные типы канонических преобразований удобно вводить с помощью вариационного принципа в Гамильтоновой формулировке:



$\gamma = (q(t), p(t))$ — параметризованная траектория в фазовом пр-ве, где $q^i(t)$ и $p_i(t)$ – решения динамических уравнений, находится из требования экстремальности функционала действия:

$$(\star)\quad \delta\left(\int_{t_1}^{t_2}\left(p_i(t)\dot{q}^i(t) - H(q,p,t)\right)dt\right) = 0$$

при фиксированных значениях координат q^i в начале и конце:

$$\delta q^i(t_1) = \delta q^i(t_2) = 0.$$

Как следствие, получаем ур-я движения

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}.$$

Таким образом, если преобразование

$$q_i \mapsto Q^i(q,p,t),\ p_i \to P_i(q,p,t)$$ каноническое,

т.е. новые ур-я движения сохраняют Гамильтонов вид:

$$\dot{Q}^i = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q^i},$$ то

помимо $(\star)$ должно также выполняться и второе равенство:

$$(\star\star)\quad \delta\left(\int_{t_1}^{t_2}\left(P_i\dot{Q}^i - \tilde{H}(Q,P,t)\right)dt = 0\right.$$

$$\delta Q^i(t_1) = \delta Q^i(t_2) = 0.$$

Достаточное условие эквивалентности решений (☆) и (☆☆) — отличие подынтегральных выражений на полный дифференциал dF некоторой функции, такой, что $\delta F(1) \equiv 0$ и $\delta F(2) \equiv 0$.

Произв. ф-ция 1го рода: $F_1(q, Q, t)$ (непрерывно дифф. по координатам) этому удовлетворяет. Итог:

$$\sum_{i=1}^{N} p_i dq^i - H(q,p,t) - \left(\sum_{i=1}^{N} P_i dQ^i - \tilde{H}(Q,P,t)\right) = dF_1(q, Q, t) \quad (*)$$

Зам. Здесь мы считаем независимыми наборами переменных $\{q^i\}$ и $\{Q^i\}$.

У нас всего $4N$ переменных $\{q^i\}$, $\{Q^i\}$, $\{p_i\}$ и $\{P_i\}$ и $2N$ связей:

$$Q_i = Q_i(q,p,t) \quad P_i = P_i(q,p,t),$$

где всё обратимо и можно выразить q и p через Q и P. Можно выбирать в качестве $2N$ независимых переменных разные группы из $\{q, p, Q, P\}$.

Из (*) следуют соотношения:

$$\underbrace{p_i = \frac{\partial F_1(q,Q,t)}{\partial q^i}}_{①} \qquad \underbrace{P_i = -\frac{\partial F_1(q,Q,t)}{\partial Q^i}}_{②}$$

$$\tilde{H}(Q,P,t) = \left(H(q,p,t) + \frac{\partial F_1}{\partial t}\right)\Big|_{\substack{q=f(Q,P,t)\\ p=g(Q,P,t)}}$$

Здесь имеется в виду, что мы выражаем из (1-й) системы равенств $Q^i = Q^i(q,p,t)$ и подставляя во (2) группу равенств получаем $P_i = P_i(q,p,t)$ и эти выражения можно обратить:

$q^i = f^i(Q,P,t)$, $p_i = g_i(Q,P,t)$.

Три других типа канонических преобразований получаются из (*) преобр. Лежандра.

Если, например, выбираются в качестве независимых переменных $\{q^i\}$ и $\{P_i\}$, то в (*) надо преобразовать слагаемое

$$\sum P_i dQ^i = d(P_i Q^i) - Q^i dP_i$$

→ объединить с dF_1.

$$\sum p_i dq^i + \sum Q^i dP_i + (\tilde{H} - H)dt = dF_2(q, P, t)$$

$$\Rightarrow \quad p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q^i} \Rightarrow \text{находим } P_i = P_i(q, p, t)$$

подставляем

$$Q^i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}(q, P, t) \Rightarrow Q^i = Q^i(q, p, t)$$

$$\tilde{H} = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}$$ (такая связь при любом каноническом преобразовании).

Для канон. преобразования 3-го рода с $F_3(p, Q)$ преобразуем в (*) $\sum p_i dq^i$:

$$\sum_i p_i dq^i = \underbrace{d\left(\sum p_i q^i\right)}_{\text{в } dF_1} - \sum_i q^i dp_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\sum_i q^i dp_i - \sum_i P_i dQ^i + (\tilde{H} - H)dt = dF_3(p, Q, t)$$

$$q^i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i} \Rightarrow Q^i = Q^i(q, p, t)$$

$$P_i = -\frac{\partial F_3}{\partial Q^i} \Rightarrow P_i = P_i(q, p, t)$$

$$\tilde{H} = H + \frac{\partial F_3}{\partial t}$$

И, наконец, преобразуя <u>оба</u> слагаемых

$$\sum p_i dq^i = d\left(\sum p_i q^i\right) - \sum q^i dp_i \quad \text{и}$$

$$\sum_i P_i dQ^i = d\left(\sum_i P_i Q^i\right) - \sum_i Q^i dP_i \qquad =?=$$

получаем каноническое преобр. с $F_4(p, P, t)$

$$q^i = -\frac{\partial F_4(p, P, t)}{\partial p_i} \Rightarrow P_i = P_i(q, p, t)$$

$$Q^i = \frac{\partial F_4}{\partial P_i} \Rightarrow Q^i = Q^i(q, p, t)$$

$$\hat{H} = H + \frac{\partial F_4}{\partial t}$$

<u>Пример 1</u>.

От канонических переменных q и p $(N = 1)$ выполнен переход к Q и P по формулам

$$Q = \ln\left(\frac{\sin p^\alpha}{q}\right)$$

$$P = q^\beta \operatorname{ctg} p^\alpha$$

а) При каких α и β это каноническое преобразование?

б) Найдите производящую функцию $F_1(q, Q, t)$ этого канонического преобразования.

Решение:

Воспользуемся критерием каноничности преобразования:

$$\{Q, P\}_{(q,p)} = 1$$

Скобка Пуассона в терминах q и p.

$$\{\underbrace{\ln(\sin p^{\alpha}) - \ln q}_{Q},\ q^{\beta}\,\mathrm{ctg}\,p^{\alpha}\} =$$

$$= \{\ln(\sin p^{\alpha}), q^{\beta}\}\,\mathrm{ctg}\,p^{\alpha} - q^{\beta}\{\ln q, \mathrm{ctg}\,p^{\alpha}\} =$$

$$\frac{\alpha p^{\alpha-1}\cos p^{\alpha}}{\sin p^{\alpha}}\{p, q\}(\beta q^{\beta-1})\,\mathrm{ctg}\,p^{\alpha} +$$

$$+ \frac{q^{\beta}}{q}\{q, p\}\frac{\alpha p^{\alpha-1}}{\sin^2 p^{\alpha}} =$$

$$= \alpha p^{\alpha-1} q^{\beta-1}\left(\frac{1}{\sin^2 p^{\alpha}} - \beta\,\mathrm{ctg}^2 p^{\alpha}\right)$$

Для каноничности преобразования это выражение должно равняться 1 $\Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\beta = 1}$, иначе из $q^{\beta-1}$ останется зависимость от q. Для $\beta = 1$ результат сильно упростится:

$$\frac{1}{\sin^2 p^\alpha} - \operatorname{ctg}^2 p^\alpha \equiv 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{Q, P\}_{(q,p)} = \alpha p^{\alpha-1} \Rightarrow \boxed{\alpha = 1}.$$

Итак, замена каноническая при $\alpha = \beta = 1$: $Q = \ln\left(\frac{\sin p}{q}\right)$ $P = q \operatorname{ctg} p$.

б). Для $F_1(q, Q, t)$:

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q} \quad P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ нужно выразить p и P в виде функций от q и Q:

$$Q = \ln\left(\frac{\sin p}{q}\right) \Rightarrow \sin p = q e^Q \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p = \arcsin(q e^Q)$$

$$P = q \operatorname{ctg} p = q \frac{\sqrt{1 - \sin^2 p}}{\sin p} = e^{-Q}\sqrt{1 - q^2 e^{2Q}}.$$

Дальше решаем уравнение на F_1: $\frac{\partial F_1}{\partial q} = p = \arcsin(q e^Q) \Rightarrow$

$$\Rightarrow F_1 = \underset{\text{пока } \forall \text{ ф-ция}}{\phi(Q)} + \underbrace{\int \arcsin(q e^Q)\, dq}_{y = q e^Q \text{ и } \int \text{ем по частям}} =$$

$= \Phi(Q) + q \arcsin(qe^{Q}) + e^{-Q}\sqrt{1-q^2e^{2Q}}$.

$\Phi(Q)$ фиксируется из второго соотношения:

$$\frac{\partial F_1}{\partial Q} = -P = -e^{-Q}\sqrt{1-q^2e^{2Q}}$$

Дифференцируем F_1 по Q:

$$\frac{\partial F_1}{\partial Q} = \frac{\partial \Phi}{\partial Q} - e^{-Q}\sqrt{1-q^2e^{2Q}} \Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial Q} = 0$$

$$\Rightarrow F_1 = q \arcsin(qe^{Q}) + e^{-Q}\sqrt{1-q^2e^{2Q}} + Const$$

ни на что не влияет.

Пример 2

Вспомним задачу с трением.

$$L(q, \dot{q}, t) = \frac{1}{2}e^{2\mu t}(\dot{q}^2 - k^2q^2)$$

Перейдём к Гамильтонову формализму:

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \dot{q}e^{2\mu t} \Rightarrow \dot{q} = e^{-2\mu t}p \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H(q, p, t) = \left(\dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L\right)\Bigg|_{\dot{q} = e^{-2\mu t}p} =$$

$$= \frac{p^2}{2}e^{-2\mu t} + \frac{kq^2}{2}e^{2\mu t}$$ ← есть явная зависимость от t.

Уберём зависимость от t из Гамильтониана с помощью канонического преобразования:

$$Q = e^{\mu t} q \quad P = e^{-\mu t} p \quad \boxed{\star}$$

Почему это канон. преобразование?

<u>Ответ</u>: $\{Q, P\} = \{e^{\mu t} q, e^{-\mu t} p\} = \{q, p\} = 1.$

Найдём производящую функцию и выясним, каким будет новый Гамильтониан.

$\boxed{\text{Зам.}}$ Для получения $\tilde{H}(Q, P, t)$ <u>не достаточно</u> подставить $q = e^{-\mu t} Q$, $p = e^{\mu t} P$ в $H(q, p, t)$! Надо ещё $\frac{\partial F}{\partial t}$ добавить.

Преобразование $\boxed{\star}$ <u>не является</u> преобразованием 1-го рода с $F_1(q, Q)$, т.к. при $t = 0$ оно <u>тождественное</u>, а тождественные преобразования <u>отсутствуют</u> во множестве канон. преобразований 1-го рода.

Будем искать $F_2(q, P)$ (среди преобр. второго рода есть тождественное).

$$p = \frac{\partial F_2}{\partial q} = e^{\mu t} P \Rightarrow F_2 = e^{\mu t} q P + \Phi(P) = 12 =$$

$$Q = \frac{\partial F_2}{\partial P} = e^{\mu t} q \Rightarrow \Phi(P) = \text{Const} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{F_2 = e^{\mu t} q P} \quad (\text{const} = 0 \text{ время}).$$

Теперь новый Гамильтониан имеет вид:

$$\tilde{H}(Q,P,t) = \left(H + \frac{\partial F_2}{\partial t}\right)\Bigg|_{\substack{q = e^{-\mu t} Q \\ p = e^{\mu t} P}} =$$

$$= \frac{P^2}{2} + \frac{k^2 Q^2}{2} + \mu Q P$$ – <u>не зависит от t</u>!

Уравнения движения:

$$\begin{cases} \dot{Q} = \{Q, \tilde{H}\} = P + \mu Q \\ \dot{P} = \{P, \tilde{H}\} = -k^2 Q - \mu P \end{cases}$$

В матричном виде:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu & 1 \\ -k^2 & -\mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix}$$

Спектр A: $\quad \lambda^2 - \lambda \, \mathrm{Tr} A + \det A = 0$

$$\lambda^2 + (k^2 - \mu^2) = 0$$

$$\begin{cases} \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\mu^2 - k^2} = \pm \varkappa & \text{при } \mu^2 \geq k^2 \\ \lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{k^2 - \mu^2} = \pm i\omega & \text{при } \mu^2 < k^2 \end{cases}$$

Собств. вектора A:

1° $+\varkappa$: $\begin{pmatrix} 1 \\ \varkappa-\mu \end{pmatrix}$ $\quad -\varkappa$: $\begin{pmatrix} 1 \\ -\mu-\varkappa \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} Q(t) \\ P(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{\varkappa t} \begin{pmatrix} 1 \\ \varkappa-\mu \end{pmatrix} + C_2 e^{-\varkappa t} \begin{pmatrix} 1 \\ -\varkappa-\mu \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow q(t) = e^{-\mu t} Q = C_1 e^{(\varkappa-\mu)t} + C_2 e^{-(\varkappa+\mu)t} -$$

– апериодическое затухание.

2° При $k^2 > \mu^2$:

$$q(t) \sim e^{-\mu t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t) -$$

$$\omega = \sqrt{k^2-\mu^2}$$

– затухающие колебания.

<u>Пример 3.</u> (Бочечная задача).

Для одномерного гармонического осциллятора $H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}$

Совершите каноническое преобразование 1го рода с производящей ф-цией $F_1(q,Q)=\frac{m\omega q^2}{2}\operatorname{ctg}Q$, найдите выражение $q(Q,P)$ и $p(Q,P)$, а также новый гамильтониан $\tilde{H}(Q,P)$.

Решение:

$$p=\frac{\partial F_1}{\partial q}=m\omega q\operatorname{ctg}Q$$

$$P=-\frac{\partial F_1}{\partial Q}=\frac{m\omega q^2}{2\sin^2 Q}\Rightarrow\begin{cases}q=\sqrt{\frac{2P}{m\omega}}\sin Q\\ p=\sqrt{2m\omega P}\cos Q\end{cases}$$

Поскольку $\frac{\partial F_1}{\partial t}=0$, то $\tilde{H}$ получается подстановкой $q(Q,P)$ и $p(Q,P)$ в исходный Гамильтониан $H(q,p)$:

$$\tilde{H}(Q,P)=\omega P\cos^2 Q+\omega P\sin^2 Q=\omega P$$

Уравнения движения:

$$\dot{P}=0 \qquad \dot{Q}=\omega$$

$$P=\frac{E}{\omega} \qquad Q=\omega t+\varphi_0$$

E — значение энергии на выбранном решении.

В исходных переменных получаем известное решение для гармонических колебаний:

$$q(t) = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$p(t) = \sqrt{2mE} \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$E = \frac{p^2(0)}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2(0)}{2}$$ – значение энергии колебаний в начальный момент времени $t=0$.