

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО 2023
ЛИСТОК 10

1. Сколько корней многочлена $z^7 + 3z + 1$ находится в круге $|z| < 1$?
2. Сколько корней многочлена $z^5 + z^2 + 3z + 1$ находится в круге $|z| < 1$?
3. Докажите, что уравнение $e^z = z + 2$ имеет в левой полуплоскости ($\operatorname{Re} z < 0$) единственный (и при том действительный) корень.
4. Докажите, что при $\lambda > 1$ уравнение $ze^{\lambda-z} = 1$ имеет в единичном круге ровно один корень (и при том действительный).
5. Найдите количество корней многочлена

$$z^6 + z^5 + 6z^4 + 5z^3 + 8z^2 + 4z + 1$$

в правой полуплоскости.

6. Найдите количество корней уравнения

$$z^4 + 2z^3 + 3z^2 + z + 2 = 0$$

в правой полуплоскости и в правом верхнем квадранте.

7. Пусть f – целая не постоянная функция. Положим

$$M = \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

Докажите, что функция $r \mapsto M(r)$ является строго возрастающей. Чему может быть равен ее предел при $r \rightarrow +\infty$?

8. Докажите, что всякий конформный автоморфизм комплексной плоскости имеет вид $z \mapsto az + b$, $a \neq 0$.

9. Докажите, что не существует конформного автоморфизма между множествами $\mathbb{C} \setminus \{0, 1, 2\}$ и $\mathbb{C} \setminus \{0, 1, 1000\}$.

10. Докажите, что всякий конформный автоморфизм единичного круга – дробно-линейный автоморфизм.

11. Пусть U – единичный круг (без границы). Существует ли голоморфное отображение $f : U \rightarrow U$, для которого $f(0) = \frac{1}{2}$, $f(\frac{1}{2}) = \frac{7}{8}$?