

Семинар 6

1. Через некоторую точку гладкой поверхности в E^3 проходит прямолинейная образующая. Докажите, что кривизна поверхности в этой точке неположительна.
2. Согласуйте определение геодезической на абстрактном римановом многообразии с уже известным вам определением геодезической на поверхности в E^3 .
3. Написать уравнение геодезической на верхней полуплоскости Пуанкаре и по всем правилам его решить (заметьте, что ответ вы уже знаете).
- 4*. На какой угол повернется вектор, если его один раз пронести вокруг Земли по параллели Балашихи (для удобства считать, что Земля имеет форму шара)?
5. Докажите, что выпуклая линейная комбинация связностей есть снова связность.
6. С помощью разбиения единицы и результата задачи 5 докажите, что связности на гладком многообразии образуют бесконечномерное аффинное пространство.
7. На группе $G = SU(2)$ зададим левоинвариантную риманову метрику с помощью положительной квадратичной формы $g(X, X) = 0,5\text{Tr}(X\bar{X}^t)$ на касательном пространстве T_eG к группе G в единице. Доказать, что эта метрика одновременно и правоинвариантна.
8. Проверьте, что формула $\nabla_X Y = 0,5[X, Y]$ на единичных левоинвариантных векторных полях X, Y на группе задает связность Леви-Чивита на римановом многообразии $(SU(2), g)$.
- 9*. Доказать, что однопараметрические подгруппы $\exp(tX), X \in T_eG$, группы G – это в точности геодезические на многообразии $(SU(2), g)$, проходящие через единицу.