# Канон. преобр. в гам. формализме



1) В лагр. формализме есть точечные преобразования

$$q_\alpha \longrightarrow q'_\alpha = Q_\alpha(q,t)$$

карта в конфиг. пр-стве $M$ — другая карта в $M$, своя для каждого момента $t$.

Т.е. это спец. вид замены коорд в расширенном конфиг. пр-стве $M\times[t_0,t_1]$, замена не трогает переменную $t$.

Инвариантность формализма очевидно в формулировке с принципом min действия: произвол $\tilde{L} = L + \frac{d\Lambda(q,t)}{dt}$!

$$\delta q(t)\big|_{t_{1,2}} = 0 \qquad S^{\Lambda}[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \left[L(q(t),\dot q(t),t) + \frac{d\Lambda(q(t),t)}{dt}\right]dt$$

Обратимая замена "координатизации" траектории

$$q_\alpha(t) \longmapsto q'_\alpha(t) = Q_\alpha(q(t),t) \quad (\text{если } \delta q| = 0, \text{ то и } \delta q'| = 0)$$

$$\left|\frac{\partial Q_\alpha}{\partial q_\beta}\right| \neq 0$$

не влияет на поиск экстремали действия.

А вот время менять нельзя — оно выделено в вариационной задаче — переменная интегрирования. Фактически $S[q(t); t_1, t_2]$

2) В гам. формализме принцип min действия:

$$S[q(t),p(t)] = \int_{t_0}^{t_1} \left(\dot q_\alpha(t)\, p_\alpha(t) - H(q(t),p(t),t)\right) dt$$

при усл. $\delta q_\alpha(t)\big|_{t_{0,1}} = 0$

Замена $\{q_\alpha, p_\alpha\} \longmapsto \{Q_\alpha = Q_\alpha(q,p,t),\ P_\alpha = P_\alpha(q,p,t)\}$ (*)

а также $H(q,p,t) \longrightarrow \tilde{H}(q,p,t)$

Произвольная замена (*), при подстановке в действие разрушит спец вид подынтегрального выражения (линейность по $\dot{q}(t)$, независимость от $\dot{p}$), поэтому (*) — весьма специальная замена. Хотим, чтобы после нее получилась задача вариационная такая:

$$\tilde{S}^{(F)}[Q(t),P(t)] = \int_{t_0}^{t_1} \left( \dot{Q}_\alpha(t) P_\alpha(t) - \tilde{H}(Q(t),P(t),t) + \frac{dF(\overset{?}{\dots})}{dt} \right) dt$$

$Q_\alpha(t), t_{0,1}$ ?

при усл. $\delta Q_\alpha(t)\big|_{t_0,t_1} = 0$

Ур-ния движения в обеих задачах:

| | |
|---|---|
| $dS_{\gamma(t)}[\delta q_\alpha(t), \delta p_\alpha(t)] = 0$ <br> $\gamma = \{q_\alpha(t), p_\alpha(t)\}$ | $dS_{\tilde{\gamma}}[\delta Q_\alpha(t), \delta P_\alpha(t)] = 0$ <br> $\tilde{\gamma} = \{Q_\alpha(t), P_\alpha(t)\}$ |
| $\delta p_\alpha(t): \dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}$ <br> $\delta q_\alpha(t): \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}$ <br> обнуление гран членов: <br> $\delta q_\alpha(t)\big\|_{t_{1,2}} = 0$ | $\delta P_\alpha(t): \dot{Q}_\alpha = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_\alpha}$ <br> $\delta Q_\alpha(t): \dot{P}_\alpha = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_\alpha}$ <br> — и — <br> $\delta Q_\alpha(t)\big\|_{t_{1,2}} = 0$ причем $d\left(F\Big\|_{t_0}^{t_1}\right) \equiv 0$ |

Чтобы эти системы были реализацией одной эволюции в разных координатах ДОСТАТОЧНО чтобы в $S$ и $\tilde{S}$ буквально совпали подынтегральные выражения: (**)

$$\left\{\frac{dq_\alpha(t)}{dt} p_\alpha(t) - H(q(t),p(t),t)\right\} - \left\{\frac{dQ_\alpha(t)}{dt} P_\alpha(t) - \tilde{H}(Q(t),P(t),t)\right\} = \frac{dF(\dots)}{dt}$$

при подстановке $Q_\alpha = Q_\alpha(q,p,t)$, $P_\alpha = P_\alpha(q,p,t)$, $\tilde{H}$, $F(\dots)$

Здесь $Q_\alpha$ и $P_\alpha$ – не произвольные ф-ции, т. е. $q(t)$, $p(t)$, $Q(t)$, $P(t)$ – не независимы.

Независимы только $q_\alpha(t)$ и $p_\alpha(t)$ – две из них

Давайте выберем другую пару независимых ф-ций:
$$\boxed{q_\alpha(t) \text{ и } Q_\alpha(t)}$$

Это возможно, если условие $Q_\alpha = Q_\alpha(q, p, t)$ можно разрешить отн. $p_\alpha$: $p_\alpha = \varphi_\alpha(q, Q, t)$

т. е. если
$$\boxed{\left|\frac{\partial Q_\alpha}{\partial p_\beta}\right| \neq 0} \qquad (0)$$

Тогда мы можем сказать, что $F(q_\alpha(t), Q_\alpha(t), t)$ – произвольная гладкая ф-ция своих аргументов, для нее будет выполнено условие $d\left(F\Big|_{t_0}^{t_1}\right) \equiv 0$

---

Переписываем (**) в терминах выбранных независ. переменных.

$$\left(\frac{dq_\alpha(t)}{dt} p_\alpha(t) - H(q(t), p(t), t)\right) - \left(\frac{dQ_\alpha(t)}{dt} P_\alpha(t) - \tilde{H}(Q(t), P(t), t)\right) =$$
$$= \frac{\partial F}{\partial q_\alpha} \frac{dq_\alpha(t)}{dt} + \frac{dF}{\partial Q_\alpha} \frac{dQ_\alpha(t)}{dt} + \frac{\partial F}{\partial t}$$

Т. к. $\frac{dq_\alpha}{dt}$ и $\frac{dQ}{dt}$ независ. ф-ции, приравниваем коэфф. при них

$$\begin{cases} p_\alpha(t) = \dfrac{\partial F}{\partial q_\alpha}(q(t), Q(t), t) & (1) \\ P_\alpha(t) = -\dfrac{\partial F}{\partial Q_\alpha}(q(t), Q(t), t) & (2) \\ \tilde{H}(Q, P, t) - H(q, p, t) = \dfrac{\partial F(q, Q, t)}{\partial t} & (3) \end{cases}$$

и остаток:

Эти ур-ния задают допустимые замены координат $\{q,p\} \to \{Q,P\}$, которые не меняют вида ур-ний движения в гам. формализме ($H \to \tilde{H}$). Это $\boxed{\text{Def}}$ Канонические ~~Как~~ преобразования. $F(q;Q,t)$ — их производящая ф-ция (1-го рода)

Как их понимать и применять?

1) Берем $\forall$ гладкую (как минимум класса $C^2$) ф-цию $F(q_\alpha, Q_{\alpha'}, t)$ с условием

$$\left|\frac{\partial^2 F}{\partial q_\alpha \partial Q_\beta}\right| = \left|\frac{\partial (p_\alpha \text{ из } (1))}{\partial Q_\beta}\right| \neq 0 \quad (4)$$

$$\left| - \frac{\partial P_\beta \text{ из } (2)}{\partial q_\alpha} \right|$$

2) Разрешаем (1) отн. $Q_\alpha$:

$$p_\alpha = \frac{\partial F(q,Q,t)}{\partial q_\alpha} \Rightarrow Q_\alpha = \mathbb{Q}_\alpha(q,p,t)$$

таким образом из $F$ определяем $\mathbb{Q}_\alpha$

3) Подставляем найденное $\mathbb{Q}_\alpha$ в (2):

$$P_\alpha = -\frac{\partial F}{\partial Q_\alpha}(q, \mathbb{Q}(q,p,t), t) \equiv \mathbb{P}_\alpha(q,p,t)$$

так находим $\mathbb{P}_\alpha$

4) Из (3) находим новый гамильтониан

обращение формул для $Q$ и $P$

$$\tilde{H}(Q,P,t) = \left(H(q,p,t) + \frac{\partial F(q,Q,t)}{\partial t}\right)\Bigg|_{\substack{q(Q,P,t)\\ p(Q,P,t)}}$$

тут сначала $q$ выражаете как $q(Q,P,t)$ из (2). Это возможно в силу (4). Затем рез-т подставляем в (1): $p(Q,P,t)$

**Rem 1** Условие (**) со стр 2 достаточно но не необходимо.

Можно напр. следить за условием $\boxed{dS = \lambda d\tilde{S}}$ (у нас было $\lambda = 1$). Это приведет к возможности менять масштаб:

$$\boxed{q_\alpha \mapsto \underbrace{(\mu_\alpha q_\alpha)}_{Q_\alpha},\ p_\alpha \mapsto \underbrace{(\nu_\alpha p_\alpha)}_{P_\alpha};\quad \mu_\alpha \nu_\alpha = \lambda \\ \tilde{H} = \lambda H\left(\tfrac{1}{\mu_\alpha} Q_\alpha, \tfrac{1}{\nu_\alpha} P_\alpha, t\right)}$$

Это, так называемые, расширенные канонические преобразования. И это, по большому счету, не очень интересно.

**Rem 2** Важно: выбрав $F(q, Q, t)$ мы строим канонические преобразования независимо от вида $H$ (т.е. для $\forall H$ универсально).

Канон. замены координат работают независимо от динамики

**Rem 3** ! Среди наших канонических преобразований нет тождественного!

Действительно $Q_\alpha = Q_\alpha(q, p, t) = q_\alpha \Rightarrow \dfrac{\partial Q_\alpha}{\partial p_\beta} = 0$, т.е невозможно выразить

$$p_\alpha = \frac{\partial F(q, Q, t)}{\partial q_\alpha},$$ как ф-цию $q$ и $Q$

Вспоминаем, что мы обсуждали другую версию принципа наименьшего действия с гран условиями вида $\delta p(t)\big|_{t_{0,1}} = 0$.

Будем сравнивать наше исходное действие с действием в новых коорд. $Q$, $P$ с гран усл. на $P$:

$$\left[\begin{array}{l}\tilde{S}^{(F_2)}[Q(t),P(t)] = \int\limits_{t_0}^{t_1}\left(-Q_\alpha \dot{P}_\alpha - \tilde{H}(Q,P,t) + \frac{dF_2(\ldots)}{dt}\right)dt \\ \delta P(t)\Big|_{t_{0,1}} = 0\end{array}\right.$$

Считаем, что $S[q(t),p(t)]$ и $\tilde{S}^{(F_2)}$ имеют буквально совпадающие подынтегральные выражения. Этого достаточно, чтобы ур-ния Гамильтона имели одинаковое семейство решений (с точностью до замены $q,p \leftrightarrow Q,P$)

$$\left(p_\alpha \frac{dq_\alpha}{dt} - H(q,p,t)\right) - \left(-Q_\alpha \frac{dP_\alpha}{dt} - \tilde{H}(Q,P,t)\right) = \frac{dF_2(q,P,t)}{dt} =$$

тогда $F_2\Big|_{t_0}^{t_1} = 0$ в силу гран. усл.

$$= \frac{\partial F_2}{\partial q_\alpha}\frac{dq_\alpha}{dt} + \frac{\partial F_2}{\partial P_\alpha}\frac{dP_\alpha}{dt} + \frac{\partial F_2}{\partial t}$$

$\Downarrow$ независимость $q_\alpha(t)$ и $P_\alpha(t)$ $\Rightarrow$ независимость $\dot{q}_\alpha$ и $\dot{P}_\alpha$

$$\boxed{\begin{cases} p_\alpha = \dfrac{\partial F_2(q,P,t)}{\partial q_\alpha} & (а) \\ Q_\alpha = \dfrac{\partial F_2(q,P,t)}{\partial P_\alpha} & (б) \\ \tilde{H}(Q,P,t) = H(q,p,t) + \dfrac{\partial F_2}{\partial t} & (в) \end{cases}}$$

**Def** $\leftarrow$ Канонические преобразования с производящей ф-цией $F_2(q,P,t)$ 2-го рода

Как применять такие преобразования:

1) Берем $\forall$ $C^{\geq 2}$ гладкую ф-цию $F_2(q,P,t)$

2) Разрешаем (а) относительно $P_\alpha$; для чего требуется условие

$$\boxed{\left|\frac{\partial p_\alpha}{\partial P_\beta}\right| = \left|\frac{\partial^2 F_2(q,P,t)}{\partial q_\alpha \partial P_\beta}\right| \neq 0} \quad (\star)$$

$$\frac{\partial^2 F_2}{\partial q_\alpha \partial P_\beta} = \frac{\partial Q_\beta}{\partial q_\alpha} \leftarrow \text{см. (б)}$$

Разрешив получаем

$$P_\alpha = \mathbb{P}_\alpha(q,p,t)$$

← наши преобразование импульсов

③ Подставляем это выражение в (б):

$$Q_\alpha = \frac{\partial F_2(q,\mathbb{P}(q,p,t),t)}{\partial P_\alpha} =: \mathbb{Q}_\alpha(q,p,t)$$

наши преобр. координат

④ Из (в) находим новый гамильтониан

$$H(Q,P,t) = \left(H(q,p,t) + \frac{\partial F_2(q,P,t)}{\partial t}\right)\Bigg|_{\substack{q(Q,P,t)\\ p(Q,P,t)}}$$

тут сначала из (б) выражается $q(Q,P,t)$ (возможно, т.к. (★) выполнен)

Затем рез-т подставляется в (а) и выражается $p(Q,P,t)$

---

С такими канон. преобразованиями 2-го рода разрешается проблема тождественного канон. преобразования.

$$\boxed{F_2(q,P,t) = q_\alpha P_\alpha} \qquad (\text{x})$$

$\dfrac{\partial^2 F_2}{\partial q_\alpha \partial P_\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ – очевидно обратима.

(а): $p_\alpha = \dfrac{\partial F_2}{\partial q_\alpha} = P_\alpha$ (б) $Q_\alpha = \dfrac{\partial F_2}{\partial P_\alpha} = q_\alpha$

Так что (x) – произв. ф-ция тождеств. канон. преобразования.

---

**Rem 4** А что давала аналогичная произв. ф-ция 1 рода?

$$F_1(q,Q,t) = q_\alpha Q_\alpha$$

$$\begin{cases} p_\alpha = \dfrac{\partial F_1}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha \\ P_\alpha = -\dfrac{\partial F_1}{\partial Q_\alpha} = -q_\alpha \end{cases} \leftarrow \{q,p\} \mapsto \{Q,P\} = \{p,-q\}$$

Такое преобразование меняет ролями q и P.

Таким образом роли q и p симметрируются up to sign

Ещё пример канон. преобразования с произв. функцией

$$\boxed{F_2(q,P,t) = \Lambda_\alpha(q,t)P_\alpha + N(q,t)}$$

подходящее преобразование импульсов.

$$p_\alpha = \frac{\partial F_2}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial \Lambda_\beta}{\partial q_\alpha} P_\beta + \frac{\partial N}{\partial q_\alpha}$$

$\left|\dfrac{\partial \Lambda_\beta}{\partial q_\alpha}\right| \neq 0$ — тогда канон. преобр. законно

$$Q_\alpha = \frac{\partial F_2}{\partial P_\alpha} = \Lambda_\alpha(q,t)$$

это точечное преобразование координат из лагранжева формализма

Таким образом, канонические преобр гамильтонова формализма содержат $\forall$ точечные преобр. лагранжева формализма как подкласс

Координатный произвол в гам. ф-ме **шире**

## Rem 5 О связи производящих ф-ций $F_1(q,Q,t)$ и $F_2(q,P,t)$

При выводе уравнений для канонических преобразований, генерируемых произв. ф-циями $F_1$ и $F_2$ мы требовали:

$$\boxed{\dot q_\alpha p_\alpha - H(q,p,t) \overset{1\,\text{род}}{=} \dot Q_\alpha P_\alpha - \tilde H(Q,P,t) + \dot F_1(q,Q,t) \overset{2\,\text{род}}{=} -Q_\alpha \dot P_\alpha - \tilde H(Q,P,t) + \dot F_2(q,P,t)} \quad (*)$$

В первом случае использовалась пара независимых друг от друга наборов координатных ф-ций $\{q_\alpha(t), Q_\beta(t)\}$. Во втором — $\{q_\alpha(t), P_\alpha(t)\}$.

Видно, что преобр. 2 рода получаются из преобр 1 рода заменой переменных $\{Q_\alpha(t)\} \to \{P_\alpha(t)\}$ и переопределением произв. ф-ции:

$$\boxed{F_2(q,P,t) = \{Q_\alpha P_\alpha + F_1(q,Q,t)\}}\Big|_{Q_\beta(q,P,t)}$$

где выражения для связи $Q$ и $P$ получаются из условий $(*)$:

$$\boxed{P_\alpha = -\frac{\partial F_1(q,Q,t)}{\partial Q_\alpha}} \overset{\text{если } \left|\frac{\partial^2 F_1}{\partial Q_\alpha \partial Q_\beta}\right| > 0}{\Longleftrightarrow} Q_\beta(q,P,t)$$

Это похоже на преобр. Лежандра!

Преобр. Лежандра в стандартной формулировке

$$\begin{array}{l} \text{переменная} \\ \text{ф-ция} \end{array} \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{array}{l} y = \pm \frac{\partial f}{\partial x} \ \left(\text{условие } \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right| > 0\right) \\ g(y) = \pm\left(\pm y x - f(x)\right)\Big|_{x(y)} \end{array}$$

Преобразование Лежандра инволютивно и употребление знаков $\pm$ или $\pm$ не отменяет это свойство.

В случае с переходом от $F_1$ к $F_2$ мы используем знаки "$-$" и "$-$".

Вывод: Если $\left|\frac{\partial^2 F_1}{\partial Q_\alpha \partial Q_\beta}\right| > 0$ (эквивалентно $\left|\frac{\partial^2 F_2}{\partial P_\alpha \partial P_\beta}\right| > 0$)

то устанавливается $1 \Leftrightarrow 1$ соответствие между каноническими преобразованиями, порождаемыми ф-циями 1 рода $F_1(q, Q, t)$ и ф-циями 2 рода $F_2(q, P, t)$

Заметим однако, что разобранные нами важные примеры $F_1 = q_\alpha Q_\alpha$, $F_2 = q_\alpha P_\alpha$ не удовлетворяют условиям выпуклости.

Таким образом разного рода произв. ф-ции дают разные карты, покрывающие части всего "многообразия" канонических преобразований

---

Всего есть 4 рода произв. ф-ций

$$F_1(q, Q, t)$$

$$P_\alpha = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_\alpha} \qquad p_\alpha = \frac{\partial F_1}{\partial q_\alpha}$$

$$Id \in \quad F_2(q, P, t) = (F_1 + Q_\alpha P_\alpha)\Big|_{Q(\dots)} \qquad F_3(p, Q, t) = (F_1 - q_\alpha p_\alpha)\Big|_{q(\dots)} \qquad Id \in$$

$$p_\alpha = \frac{\partial F_2}{\partial q_\alpha} \qquad P_\alpha = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_\alpha}$$

$$F_4(p, P, t) = \Big(\underbrace{F_1 + Q_\alpha P_\alpha}_{F_2} - q_\alpha p_\alpha\Big)\Big|_{\dots}$$

$F_3 = -p_\alpha Q_\alpha$ даёт тождеств. преобразование

---

3 род $F_3(p, Q, t)$

$$\begin{cases} q_\alpha = -\dfrac{\partial F_3(p, Q, t)}{\partial p_\alpha} \\ P_\alpha = -\dfrac{\partial F_3(p, Q, t)}{\partial Q_\alpha} \\ \tilde{H} = H + \dfrac{\partial F_3}{\partial t} \end{cases}$$

$$\left|\frac{\partial^2 F_3}{\partial p_\alpha \partial Q_\beta}\right| > 0$$

4 род

$$\begin{cases} q_\alpha = -\dfrac{\partial F_4(p, P, t)}{\partial p_\alpha} \\ Q_\alpha = \dfrac{\partial F_4(p, P, t)}{\partial P_\alpha} \\ \tilde{H} = H + \dfrac{\partial F_4}{\partial t} \end{cases} \qquad \left|\frac{\partial^2 F_4}{\partial p_\alpha \partial P_\beta}\right| > 0$$

Ясно, что когда у нас $n$ пар координат и импульсов $\{q_\alpha, p_\alpha\}$ $\alpha = 1\ldots n$, то у нас $4^n$ различных возможностей задания производящих ф-ций канонических преобразований. Для известных нам нужд этого более чем достаточно

---

## Канонические преобразования и скобки Пуассона

Итак, имеем эквивалентные описания эволюции

набор $\{q_\alpha, p_\alpha, H\}$ $\xleftrightarrow{\text{канон. преобр.}}$ набор $\{Q_\alpha, P_\alpha, \tilde{H}\}$

$$\begin{cases} \dot{q}_\alpha = \dfrac{\partial H}{\partial p_\alpha} \\ \dot{p}_\alpha = -\dfrac{\partial H}{\partial q_\alpha} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{Q}_\alpha = \dfrac{\partial \tilde{H}}{\partial P_\alpha} \\ \dot{P}_\alpha = -\dfrac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_\alpha} \end{cases}$$

Мы их записывали с помощью скобок Пуассона

$$\dot{f}(q,p) = \{f, H\} \qquad f(Q,P) = \{f, \tilde{H}\}$$

где скобки Пуассона задаются в координатах Дарбу

$$\boxed{\{\ \}_{(q,p)}} \qquad \boxed{\{\ \}_{(Q,P)}}$$

$$\begin{aligned} &\{q_\alpha, p_\beta\} = \delta_{\alpha\beta} \\ &\{q,q\} = \{p,p\} = 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &\{Q_\alpha, P_\beta\} = \delta_{\alpha\beta} \\ &\{Q,Q\} = \{P,P\} = 0 \end{aligned}$$

Мы имеем задание 2-х (в данном примере) пуассоновых структур на $T^*M$.

**Они равные ли?**

Ответ: они идентичные

**Теорема**: Пусть $\varphi$:

$$\{q_\alpha, p_\beta\} \xrightarrow{\varphi} \{Q_\alpha = \mathbb{Q}_\alpha(q,p,t), P_\alpha = \mathbb{P}_\alpha(q,p,t)\}$$

каноническое преобразование координат на $T^*M$

$\varphi^*$ – соотв. двойственное преобр. функций

$$f(Q,P) \xrightarrow{\varphi^*} (\varphi^* \circ f)(q,p) = f(\mathbb{Q}(q,p,t), \mathbb{P}(q,p,t))$$

Тогда

$$\boxed{\varphi^* \circ \{f_1, f_2\}_{(Q,P)} = \{\varphi^* \circ f_1, \varphi^* \circ f_2\}_{(q,p)}} \quad (A)$$

**Доказательство**

Сводится к проверке факта:

$$\{\mathbb{Q}_\alpha(q,p,t), \mathbb{P}_\beta(q,p,t)\}_{(q,p)} = \delta_{\alpha\beta}$$

$$\{\mathbb{Q}_\alpha(q,p,t), \mathbb{Q}_\beta(q,p,t)\}_{(q,p)} = \{\mathbb{P}_\alpha(q,p,t), \mathbb{P}_\beta(q,p,t)\}_{(q,p)} = 0$$

Это прямолинейная проверка в лоб

Я другой не знаю.

Здесь приводить не будем.

Верно и обратное утверждение

**Теорема** Всякое преобразование координат $\varphi$ на пуассоновом многообразии $M$, сохраняющее ее пуассонову структуру (т.е. удовл. условию (A) стр 12) является каноническим для $\forall$ гамильтоновой эволюции.

Док-во Особенно просто, если преобразование не зависит явно от $t$. Рассмотрим только этот случай

Связь гамильтонианов в этом случае

$$H(q,p) = \overset{*}{\varphi} \circ \tilde{H}(Q,P) \equiv H(\mathbb{Q}(q,p), \mathbb{P}(q,p))$$

Эволюция в коорд. $(Q,P)$

ур-ния Г в $Q,P$

$$\frac{d\, f(Q,P)}{dt} = \{f, \tilde{H}\}_{(Q,P)}$$

Образ этой эволюции в коорд. $(q,p)$

$$\overset{*}{\varphi} \circ \frac{df}{dt} = \overset{*}{\varphi} \circ \left(\{f, \tilde{H}\}_{(Q,P)}\right)$$

совпадает с эволюцией образа; записанной для переменных $(q,p)$

ур-ния Г. в $(q,p)$

$$\frac{d}{dt}(\overset{*}{\varphi} \circ f) = \{\overset{*}{\varphi} \circ f, H\}_{(q,p)} = \{\overset{*}{\varphi} \circ f, \overset{*}{\varphi} \circ \tilde{H}\}_{(q,p)} =$$

$$= \overset{*}{\varphi} \circ \left(\{f, \tilde{H}\}_{(Q,P)}\right)$$

Значит эволюции систем $(Q,P,\tilde{H})$ и $(q,p,H)$ ~~[illegible]~~ идентичны $\Longrightarrow$ $\varphi$ есть каноническое преобразование