

1. Рассмотрим аналитическое продолжение функции $f(z) = \sqrt{z^2 + 9}$, заданной в окрестности точки $z = 4$ условием $f(4) = 5$, вдоль а) полуокружности $|z| = 4$, $\operatorname{Im} z \geq 0$, б) полуокружности $|z| = 4$, $\operatorname{Im} z < 0$, в) отрезка $[-4, 4]$. Чему равно $f(-4)$ во всех этих случаях?

2. Фиксируем какую-либо ветвь функции $f(z) = \sqrt{z^2 - 9}$ в окрестности точки $z = 5$ и рассмотрим два способа ее аналитического продолжения из точки $z = 5$ в точку $x \in [-3, 3]$: вдоль дуги полуокружности в верхней полуплоскости и вдоль дуги полуокружности в нижней полуплоскости. Результаты обозначим $f(x + i0)$ и $f(x - i0)$ соответственно. Как связаны между собой $f(x + i0)$ и $f(x - i0)$?

3. Пусть D – вся комплексная плоскость с разрезами по отрезкам $[-1, i]$ и $[-i, 1]$, а $h(z)$ – регулярная ветвь функции $\sqrt{1 - z^4}$, положительная на интервале $(-1, 1)$. Найдите значения $h(\sqrt{5/3})$, $h(i\sqrt{5/3})$.

4. Пусть $h(z)$ – регулярная ветвь функции $\sqrt[3]{1 - z^2}$ в области D , удовлетворяющая условию $h(0) = 1$. Найдите значение $h(-3)$ в случаях, когда область D а) вся комплексная плоскость с разрезами по лучам $[1, +\infty]$ и $[-1, -1 + i\infty]$, б) вся комплексная плоскость с разрезами по лучам $[1, 1 - i\infty]$ и $[-1, -1 - i\infty]$.

5. Пусть $h(z)$ – регулярная ветвь многозначной функции $\log \frac{1 - z}{1 + z}$ в области $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$, такая, что $h(0 + i0) = 0$. Найдите значения $h(0 - i0)$, $h(i)$, $h(\infty)$. Разложите функцию $h(z)$ в ряд Лорана по степеням z в окрестности ∞ .

6. Пусть D – вся комплексная плоскость с разрезами по лучам $[-\infty, -1]$ и $[1, +\infty]$, а $h(z)$ – регулярная ветвь многозначной функции $\log(1 - z^2)$ в области D , удовлетворяющая условию $h(0) = 0$. Найдите $h(i)$, $h(-i)$, $h(2 + i0)$, $h(2 - i0)$.

7. Исследуйте поведение каждой из однозначных ветвей заданных аналитических функций в окрестности указанных точек и определите тип особенностей (если они есть):

- а) $\frac{z}{1 + \sqrt{z - 3}}$, $z = 4$, б) $z + \sqrt{z^2 - 1}$, $z = \infty$, в) $\frac{2z + 3}{1 + z - 2\sqrt{z}}$, $z = 1$,
г) $\cos \frac{1}{1 + \sqrt{z}}$, $z = 1$, д) $\sin \frac{1}{1 + \sqrt{z/(z - 1)}}$, $z = \infty$.

8. Найдите вычеты $\operatorname{res}_{z=1}(f(z)dz)$ для каждой из однозначных ветвей функции а) $f(z) = \frac{1}{\sqrt{2 - z + 1}}$, б) $f(z) = \exp\left(\frac{1}{1 + \sqrt{z}}\right)$.