## Семинар 8
## Разное

1. Доказать, что на плоскости Лобачевского существует правильный 8-угольник с углом $\pi/4$.

2. Используя результат задачи 1, доказать, что на поверхности кренделя можно ввести риманову метрику постоянной отрицательной кривизны $-1$.

3. Рассмотрим две гладкие поверхности в $E^3$, которые трансверсально пересекаются по кривой (это как?). Если кривая их пересечения является геодезической на каждой их них, то она есть прямая. Доказать.

4. Пусть $M$ – полное (связное) риманово многообразие, $G = \mathrm{Isom} M$ – группа его изометрий (дайте определение этой группы). Про элемент этой группы известно, что он оставляет неподвижными точку многобразия $M$ и каждый вектор касательного пространства в этой точке. Докажите, что этот элемент является тождественным преобразованием. Верно ли это утверждение, если отказаться от полноты?

5. На верхней полуплоскости $\{(x, y) \mid y > 0\}$ рассмотрим метрику $\frac{(dx)^2+(dy)^2}{y}$. Будет ли верхняя полуплоскость с такой метрикой полным римановым многообразием? Тот же вопрос, но для метрики $(dx)^2 + (dy)^2/y$.

6*. Риманово многообразие называется однородным, если для любых двух его точек существует изометрия, переводящая одну из точек в другую. Докажите, что такое риманово многообразие является полным.

7. Проверить, что секционная кривизна $\sec(X, Y)$ риманова многообразия в направлении двумерного подпространства не зависит от выбора базиса $(X, Y)$ в этом подпространстве.

8*. По единичному векторному полю $X$ на открытой, связной, ориентированной римановой поверхности строится 1-форма $\omega_X$ (смотри лекцию 2 июня). Доказать, что класс когомологий де Рама такой формы не зависит от поля X.