

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО – 2023
Листок 12

1. Пусть регулярная ветвь $g(z)$ функции $\sqrt{z^2 - 4}$ определена в области D , представляющей собой комплексную плоскость с разрезом по полуокружности $|z| = 2$, $\text{Im}z \geq 0$, причем главная часть ряда Лорана функции $g(z)$ в окрестности ∞ равна z . Вычислите интеграл

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{g(z) - 3z}.$$

2. Вычислите интеграл

$$\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{(2 + g(z)) \sin z},$$

где $g(z)$ – однозначная ветвь функции $\sqrt{z-1}$ в круге $|z| < \frac{1}{2}$, такая, что $g(0) = i$.

3. Пусть $f(z)$ – регулярная ветвь функции $\sqrt[3]{2z-8}$ в комплексной плоскости с разрезом по лучу $[4, 4 - i\infty]$ такая, что $f(8) = -1 - i\sqrt{3}$. Вычислите интеграл

$$I = \oint_{|z-2|=3/2} \frac{dz}{f(z) - z + 2}.$$

4. Вычислите интегралы с помощью вычетов:

а) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; б) $\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{x}} dx$.

5. Вычислите интеграл с помощью вычетов: $\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{x+1} dx$ ($0 < \alpha < 1$).

6. Вычислите интегралы с помощью вычетов:

а) $\int_0^1 \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha} \frac{dx}{x+1}$ ($-1 < \alpha < 1$); б) $\int_1^2 \sqrt[5]{\frac{(2-x)^3}{(x-1)^3}} dx$;

в) $\int_{-2}^2 \frac{dx}{\sqrt[4]{(2+x)^2(4-x^2)}}$.

7. Вычислите интегралы с помощью вычетов:

$$\text{a) } \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^3+1}; \text{ б) } \int_0^{\infty} \frac{\log x dx}{x^2+a^2} \quad (a > 0); \text{ в) } \int_0^{\infty} \frac{\log x dx}{(x+1)(x+2)^2};$$

$$\text{г) } \int_0^{\infty} \frac{\log x dx}{x^2-1}.$$

8. Вычислите интегралы с помощью вычетов:

$$\text{a) } \int_0^{\infty} \left(\frac{\log x}{x-1}\right)^2 dx; \text{ б) } \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x} \log x dx}{x^2+1}; \text{ в) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log|x^2-1|}{x^2+1} dx;$$

$$\text{г) } \int_0^{\infty} \frac{\log(1+x^2)}{x^2} \frac{dx}{1+x^2}.$$