Дополнительные главы теории дифференциальных уравнений, весна 2023г.

Семинары 12-13

Повторение уравнения малых колебаний

1. Решите задачу 39d на стр. 273, нарисуйте соответствующую кривую Лиссажу и сравните с рисунком 5.6 на стр. 260.

Раздутие

2. Раздуйте 1) нелинейный фокус, 2) особую точку уравнения $\dot{z} = z^2$, 3) седлоузел.

3. При помощи раздутия докажите, что для нелинейного центра (все фазовые кривые, начинающиеся вблизи особой точки, замкнуты) предел периода периодических решений при стремлении начального учловия к особой точке равен периоду (он общий) решений для линеаризации поля в нашей особой точке. (См. раздел 1.2.Г в «Доп. главах ...» В.И. Арнольда).

4. Прочитайте про алгебраическое раздутие (σ-процесс) в разделе 1.2.А в «Доп. главах ...» В.И. Арнольда и проведите σ-процесс для уравнения $\dot{z} = z^2$.

Коммутатор векторных полей

5. Опишите все векторные поля, с которыми коммутирует поле $v(x, y) = (x, y)$.

6. 1) Пусть $[v, w] = 0$. Найдите $[fv, gw]$, где $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

2) Пусть векторные поля v, w находятся в инволюции, а X, Y – их линейно независимые в каждой точке линейные комбинации. Верно ли, что X, Y находятся в инволюции?

7. Векторные поля можно интерпретировать как операторы дифференцирования гладких функций. Вычислите коммутатор этих операторов для $v(x) = \sum\limits_j v_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}$ и $w(x) = \sum\limits_j w_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}$ (и сравните с коммутатором векторных полей).

8. Придумайте пример k-мерного распределения, которое нельзя глобально задать k линейно независимыми векторными полями.

9. Форма $\omega = dz - xdy$ задает в $\mathbb{R}^3$ распределение двумерных плоскостей (в каждой точке берем ядро соответствующего линейного функционала). Интегрируемо ли это распределение? (На семинаре без доказательства обсуждался критерий интегрируемости $d\omega \wedge \omega = 0$, геометрическое доказательство и доказательсвто через прямое вычисление коммутатора задающих распределение векторных полей.)