

Теорема Пуанкаре-Бендиксона и лемма Сарда

1. Докажите, что любое ω -предельное множество векторного поля на сфере непусто, замкнуто, состоит из целых траекторий и связно.
2. Приведите пример несвязного ω -предельного множества для векторного поля на плоскости.
3. Приведите пример полицикла (для векторного поля на сфере), который не может быть ω -предельным множеством ни для какой траектории. Является ли построенный полицикл подмножеством какого-нибудь ω -предельного множества? (Самый простой пример такого рода – полицикл «сердце», образованный двумя сепаратрисными связками двух гиперболических седел, — связки должны быть устроены так, чтобы никакая траектория не могла наматываться на полицикл.)
4. Пусть v — векторное поле на сфере с конечным числом особых точек и для него $y \in \omega(x)$, $z \in \omega(y)$. Докажите, что тогда $\omega(z) = \omega(y)$.
5. 1) Докажите, что для гладкого векторного поля на сфере точки пересечения траектории с трансверсальной полю дугой образуют на этой дуге монотонную последовательность.
2) Докажите, что для гладкого векторного поля на сфере лежащая в некотором ω -предельном множестве траектория пересекает любую трансверсальную полю дугу не более чем в одной точке.
6. Пусть u (C^1 -гладкого) векторного поля v на сфере (или на плоскости) есть сепаратрисная связка между гиперболическими седлами p_1, p_2 . Докажите, что сколь угодно близко к v можно взять векторное поле \hat{v} , для которого продолжения¹ седел p_1 и p_2 не имеют седловой связки.²
7. Опишите структурно устойчивые (C^1 -гладкие) векторные поля на окружности и докажите, что они образуют плотное (и очевидно открытое) подмножество в пространстве всех C^1 -полей.

¹Эти продолжения существуют по задаче 11.2.

²Обратите внимание на то, что, когда Вы размыкаете связку локально, не очевидно, что не образуется новой связки.