

## Семинар 4

1. Объясните, как по векторному полю на римановом многообразии построить дифференциальную 1-форму.
2. Найти ковариантную производную  $\nabla_X Y$  для векторных полей  $X = x \frac{\partial}{\partial x} + y^2 \frac{\partial}{\partial y}$ ,  $Y = z \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial z}$  в  $R^3$ .
3. Пусть  $\nabla$  ковариантная производная Леви-Чивита на двумерной сфере единичного радиуса в  $E^3$ . Вычислить  $\nabla_{\frac{\partial}{\partial \theta}} \frac{\partial}{\partial \phi}$ , где  $\theta, \phi$  сферические координаты.
4. Доказать, что  $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$  в  $R^3$ .
5. Доказать, что утверждение задачи 4 остается верным, если  $X, Y$  – это векторные поля на гладкой поверхности в  $R^3$  (обратите внимание, что ковариантные производные слева не обязательно касаются поверхности).
6. Найти оператор формы для эллипсоида  $X^2 + 2Y^2 + 3Z^2 = 1$ , вычислить главные кривизны и указать главные направления. Найти кривизну эллипсоида.
7. Найти кривизну параболоида  $Z = X^2 + Y^2$ .
8. Вычислить кривизну параболоида  $Z = X^2 - Y^2$  и удивиться.
- 9\*. Вычислить на верхней полуплоскости Пуанкаре ковариантную производную Леви-Чивита  $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial y}$ .
- 10\*. Найти все конформные диффеоморфизмы евклидовой плоскости.