Семинар 7

1. Вычислить кривизну плоскости Лобачевского в модели верхней полуплоскости Пуанкаре.

2. Как изменится кривизна, если метрику увеличить в 10 раз?

3. Евклидов тор T получен факторизацией аффинного евклидова пространства E^2 по действию группы параллельных переносов на векторы решетки $L = \mathbb{Z}e_1 + \mathbb{Z}e_2$, e_1, e_2 – линейно независимые векторы. Рассмотрим отображение факторизации $E^2 \to T$. Доказать, что прообразом геодезической на торе при этом отображении служит прямая на плоскости.

4. Найти кривизну евклидова тора из задачи 3.

5. На евклидовой плоскости рассмотрим окружность единичного радиуса с центром в начале декартовой системы координат. К точке $m = (3/5, 4/5)$ на окружности приложен касательный вектор $(-4/5, 3/5)$. Найти образ этого вектора при экспоненциальном отображении Exp_m.

6. На единичной сфере в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ возьмем точку $m = (0, 0, 1)$, а в касательном пространстве в этой точке – вектор $v = (3, 4, 0)$. Вычислить $\mathrm{Exp}_m(v)$.

7*. Привести в соответствие определение кривизны на абстрактном римановом многообразии с определением кривизны на поверхности в E^3 с помощью оператора формы (или отношения первой и второй квадратичных форм).

Формальные свойства оператора (тензора) кривизны

8. Доказать, что оператор кривизны удовлетворяет следующим тождествам: $R(X, Y) = -R(Y, X)$, $(R(W, X)Y, Z) = -(R(W, X)Z, Y)$, $(R(W, X)Y, Z) = (R(Y, Z)W, X)$, для любых векторных полей X, Y, Z, W на римановом многообразии M.

9. Доказать, что функция $R(W, X, Y, Z) = (R(W, X)Y, Z)$ является $(0, 4)$-тензором на M.