# Теория функций комплексного переменного 2023
## Листок 13

Пусть задан параметр $\tau \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Im}\tau > 0$; определим эллиптическую кривую $E_\tau = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z})$ и тэта-функцию с характеристиками $a, b$ рядом

$$\theta_{a,b}(u) = \theta_{a,b}(u,\tau) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} q^{(k+a)^2} e^{2\pi i(k+a)(u+b)}, \quad q = e^{i\pi\tau},$$

а также введем тэта-функции Якоби

$$\theta_1(u) = -\theta_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(u), \quad \theta_2(u) = \theta_{\frac{1}{2},0}(u), \quad \theta_3(u) = \theta_{0,0}(u), \quad \theta_4(u) = \theta_{0,\frac{1}{2}}(u).$$

**1.** Докажите, что ряд абсолютно сходится на $\mathbb{C}$, и тэта-функции являются целыми функциями, причем $\theta_1$ – нечетная, а $\theta_2$, $\theta_3$, $\theta_4$ – четные функции.

**2.** Докажите, что $\theta_2(u) = \theta_1(u + \frac{1}{2})$, $\theta_3(u) = e^{\pi i(u+\tau/4)}\theta_1(u + \frac{\tau+1}{2})$, $\theta_4(u) = -ie^{\pi i(u+\tau/4)}\theta_1(u + \frac{\tau}{2})$.

**3.** Докажите следующие свойства тэта-функции при сдвигах на векторы решетки 1, $\tau$:

$$\begin{cases} \theta_1(u+1) = -\theta_1(u) \\ \theta_1(u+\tau) = -q^{-1}e^{-2\pi i u}\theta_1(u). \end{cases}$$

**4.** Найдите нули функций $\theta_1(u)$, $\theta_2(u)$, $\theta_3(u)$, $\theta_4(u)$ и покажите, что они простые.

**5.** Докажите, что тэта-функции удовлетворяют “уравнению теплопроводности” $4\pi i\partial_\tau\theta = \partial_u^2\theta$.

**6.** Покажите, что если для набора $\alpha_i \in \mathbb{C}$ выполняется $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$, то при любых $a_i \in E_\tau$

$$f(u) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial_u\theta_1(u-a_i)}{\theta_1(u-a_i)}$$

является эллиптической (т.е. двоякопериодической) функцией на $\mathbb{C}$ с периодами 1, $\tau$.

**7.** Покажите, что $P(u) = \partial_u^2 \log\theta_1(u)$ является эллиптической функцией на $\mathbb{C}$ с периодами 1, $\tau$ и найдите ее полюса.

**8.** Докажите тождество

$$\theta_1(a+b)\theta_1(a-b)\theta_1(u+c)\theta_1(u-c) + \theta_1(b+c)\theta_1(b-c)\theta_1(u+a)\theta_1(u-a)$$
$$+\theta_1(c+a)\theta_1(c-a)\theta_1(u+b)\theta_1(u-b) = 0.$$

**9.** Докажите тождество

$$P(v) - P(u) = (\theta_1'(0))^2 \, \frac{\theta_1(u-v)\theta_1(v+u)}{\theta_1^2(u)\,\theta_1^2(v)}.$$

**10.** Докажите следующие представления тэта-функций в виде бесконечных произведений:

$$\theta_1(u) = 2q^{\frac{1}{4}} \sin(\pi u) \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n})(1-q^{2n}e^{2\pi i u})(1-q^{2n}e^{-2\pi i u}),$$

$$\theta_2(u) = 2q^{\frac{1}{4}} \cos(\pi u) \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n})(1+q^{2n}e^{2\pi i u})(1+q^{2n}e^{-2\pi i u}),$$

$$\theta_3(u) = \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n})(1+q^{2n-1}e^{2\pi i u})(1+q^{2n-1}e^{-2\pi i u}),$$

$$\theta_4(u) = \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n})(1-q^{2n-1}e^{2\pi i u})(1-q^{2n-1}e^{-2\pi i u}).$$

**11.** Докажите тождество $\theta_1'(0) = \pi\theta_2(0)\theta_3(0)\theta_4(0)$.

**12.** Докажите формулы модулярного преобразования $\tau \to -1/\tau$:

$$\theta_1(u/\tau, -1/\tau) = -i\sqrt{-i\tau}e^{\pi i u^2/\tau}\theta_1(u,\tau),$$

$$\theta_2(u/\tau, -1/\tau) = \sqrt{-i\tau}e^{\pi i u^2/\tau}\theta_4(u,\tau),$$

$$\theta_3(u/\tau, -1/\tau) = \sqrt{-i\tau}e^{\pi i u^2/\tau}\theta_3(u,\tau),$$

$$\theta_4(u/\tau, -1/\tau) = \sqrt{-i\tau}e^{\pi i u^2/\tau}\theta_2(u,\tau).$$