

Обыкновенные дифференциальные уравнения

А. И. Буфетов, Н. Б. Гончарук, Ю. С. Ильяшенко

31 августа 2023 г.

Оглавление

1	Введение	11
1.1	Введение	12
1.1.1	Первые примеры	12
1.1.2	Дифференциальные уравнения в механике	21
1.1.3	Закон сохранения полной механической энергии	24
1.1.4	(*) Задача о равномерном спуске	25
1.2	Задачи к Введению	27
2	Основные понятия теории дифференциальных уравнений	31
2.1	Напоминание: кривые и отображения в \mathbb{R}^n	32
2.2	Одномерные дифференциальные уравнения; геометрический смысл	37
2.2.1	Определения	37
2.2.2	Поля направлений и их интегральные кривые	38
2.2.3	Связь между дифференциальными уравнениями и полями направлений	40
2.3	Многомерные дифференциальные уравнения; геометрический смысл	42
2.3.1	Определения. Поля направлений в многомерном случае	43
2.3.2	Уравнения высших порядков	45
2.3.3	Автономные уравнения и фазовые портреты	46
2.4	Формулировки основных теорем	49
2.4.1	Локальные теоремы о существовании, единственности, непрерывности, гладкости решений	49
2.4.2	Неравенство Гронуолла и теорема единственности	53
2.4.3	Области определения решений и продолжимость решений	58
2.4.4	Фазовые потоки. Глобальные теоремы о непрерывности и гладкости фазового потока	60
2.5	Задачи к главе 2	67
3	Элементарные методы решения дифференциальных уравнений	71
3.1	Приближенные методы	72
3.1.1	Метод разложения в ряд	72
3.1.2	Метод Эйлера	73
3.1.3	(*) Скорость сходимости метода Эйлера и неравенство Гронуолла	75
3.1.4	Метод Пикара	78
3.2	Автономные уравнения на прямой	80
3.2.1	Качественное исследование	80
3.2.2	Метод разделения переменных	81

3.2.3	Критерий единственности решений	84
3.2.4	Достаточное условие единственности решений	88
3.2.5	Ход лучей (*)	91
3.3	Метод разделения переменных в общем случае	100
3.3.1	Описание метода	100
3.3.2	О связи фазовых и интегральных кривых и понижении размерности в автономных уравнениях	100
3.3.3	Обоснование метода разделения переменных	103
3.4	Линейные уравнения на прямой	106
3.4.1	Линейные однородные одномерные уравнения	106
3.4.2	Линейные неоднородные одномерные уравнения	107
3.4.3	Метод вариации постоянной	109
3.4.4	Преобразования потока линейных уравнений на прямой	110
3.4.5	Линейные уравнения с периодическими коэффициентами	111
3.5	Задачи к главе 3	115
4	Симметрии и законы сохранения	123
4.1	Симметрии уравнений и замена переменной	124
4.1.1	Однородные уравнения	124
4.1.2	Замена переменной	125
4.1.3	Замена переменной для векторных полей	129
4.1.4	(*) Векторные поля на поверхностях и другой подход к замене переменной для векторных полей	130
4.1.5	Симметрии: общий случай	132
4.2	Дифференциальные формы	137
4.2.1	Определения	137
4.2.2	Пфаффовы дифференциальные уравнения	141
4.2.3	Еще одно обоснование метода разделения переменных	143
4.2.4	Уравнения в полных дифференциалах	144
4.2.5	Условие точности дифференциальной формы: лемма Пуанкаре	146
4.2.6	Замкнутая, но не точная дифференциальная форма	148
4.2.7	Решение пфаффовых уравнений и интегрирующий множитель	148
4.3	Первые интегралы	154
4.3.1	Критерий первого интеграла	154
4.3.2	Уравнения Гамильтона	156
4.3.3	Уравнения Ньютона на прямой	157
4.3.4	Уравнения Ньютона для движения в потенциальном поле сил	158
4.3.5	Пружинный маятник	159
4.3.6	Математический маятник	162
4.3.7	Малые колебания для уравнения Ньютона на прямой	164
4.4	Законы Кеплера	168
4.4.1	Движение планеты вокруг Солнца. Центральное поле сил	168
4.4.2	Законы сохранения	169
4.4.3	Второй закон Кеплера.	170

4.4.4	Первый закон Кеплера	172
4.4.5	Третий закон Кеплера	180
4.4.6	Задача трёх тел и пример Ситникова	181
4.5	Симметрии и первые интегралы дифференциальных уравнений классической механики	184
4.5.1	Теорема Нётер для уравнений Ньютона	184
4.5.2	(*)Лагранжев формализм. Теорема Нётер	186
4.5.3	(*)Гамильтонов формализм. Теорема Лиувилля	190
4.6	Задачи к главе 4	192
4.6.1	Ответы к некоторым задачам	198
5	Линейные уравнения и системы	199
5.1	Системы линейных уравнений: общий случай	200
5.1.1	Определения	200
5.1.2	Глобальная теорема существования решения линейной системы	201
5.1.3	Фундаментальная система решений	202
5.1.4	Определитель Вронского и формула Лиувилля – Остроградского	205
5.1.5	Линейные неоднородные системы. Метод вариации постоянных	207
5.2	Линейные уравнения высших порядков	208
5.2.1	Сведение к системе уравнений	208
5.2.2	Определитель Вронского и формула Лиувилля-Остроградского	210
5.2.3	Линейные неоднородные уравнения. Метод вариации постоянных	211
5.2.4	Решение линейных уравнений высших порядков с постоянными коэффициентами	212
5.2.5	Линейные уравнения высших порядков со специальной правой частью	218
5.2.6	Метод комплексных амплитуд	221
5.2.7	(*)Рекуррентные последовательности	223
5.2.8	(*) Уравнения Эйлера в задачах	226
5.3	Линейные системы с постоянными коэффициентами	228
5.3.1	Экспонента линейного оператора как решение линейного дифференциального уравнения	228
5.3.2	Линейные системы в \mathbb{C}^n . Комплексификация и о веществе	236
5.3.3	Линейные системы на плоскости	239
5.3.4	(*)Другое определение экспоненты оператора	243
5.3.5	Вычисление экспоненты оператора в общем случае	247
5.3.6	Линейные системы со специальной правой частью	253
5.4	Малые колебания и фигуры Лиссажу	258
5.4.1	Пример: шарик в чашке	258
5.4.2	Уравнение малых колебаний и фигуры Лиссажу	259
5.4.3	Переход на тор	261
5.4.4	Обмотки тора	262
5.5	Задачи к главе 5	266

6	Уравнения в частных производных и теоремы Штурма	275
6.1	Метод Фурье для уравнений в частных производных	276
6.1.1	Уравнения в частных производных как обыкновенные дифференциальные уравнения в функциональных пространствах . . .	276
6.1.2	Метод Фурье для уравнений вида $u_t = Au$	277
6.1.3	Уравнение теплопроводности на окружности	278
6.1.4	Симметричность оператора D^2	283
6.1.5	Колебания струны	284
6.1.6	Оператор Лапласа и его симметричность	287
6.1.7	Колебания квадратной мембраны	291
6.1.8	Колебания круглой мембраны и функции Бесселя	293
6.2	Теоремы Штурма.	302
6.2.1	Приведение к стандартному виду	302
6.2.2	Теоремы Штурма о сравнении	303
6.2.3	Нули функции Бесселя	306
6.2.4	Задача Штурма–Лиувилля	306
6.3	Ортогональные многочлены и функции Бесселя	309
6.3.1	Многочлены Лежандра	310
6.3.2	Теорема Мелера-Гейне для многочленов Лежандра.	311
6.3.3	Многочлены Якоби	316
6.3.4	Добавление: формула Родрига, рекуррентное соотношение и производящая функция для многочленов Лежандра	321
7	Основные теоремы и их применения	331
7.1	Теорема существования и единственности	332
7.1.1	Метод Пикара	332
7.1.2	Полные метрические пространства и принцип сжимающих отображений	333
7.1.3	Доказательство теоремы существования и единственности с помощью принципа сжимающих отображений	336
7.1.4	Другое доказательство теоремы существования и единственности	339
7.1.5	Теорема о непрерывной зависимости решения от начальных условий	341
7.1.6	Теоремы о выходе на границу компакта. Область определения решения уравнения	342
7.1.7	Ломаные Эйлера и теорема Пеано о существовании решения . .	343
7.1.8	Точность метода Эйлера: оценка через показатель сжатия оператора Пикара	347
7.2	Теоремы о гладкости и уравнение в вариациях	350
7.2.1	Формулировка теоремы о C^1 -гладкости	350
7.2.2	Уравнение в вариациях	350
7.2.3	Расширенная система	352
7.2.4	Пикаровские приближения	352
7.2.5	Теорема о C^r -гладкости (теорема 2.4.6)	354

7.2.6	Производная решения уравнения по параметру	354
7.2.7	Теорема об искажении фазового объема	356
7.3	Теорема о выпрямлении	357
7.4	Уравнения в частных производных первого порядка	361
7.4.1	Независимые системы первых интегралов	361
7.4.2	Линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка	362
7.4.3	Задача Коши для линейного однородного уравнения в частных производных	363
7.4.4	Неоднородные линейные уравнения в частных производных первого порядка	365
7.4.5	Квазилинейные уравнения в частных производных первого порядка	366
7.5	Задачи к главе 7	377
8	Элементы нелинейной теории	385
8.1	Устойчивость по Ляпунову положений равновесия уравнений и отображений	386
8.1.1	Определение устойчивости для векторных полей	386
8.1.2	Определение устойчивости для отображений	388
8.1.3	Функции Ляпунова	389
8.1.4	Теоремы Ляпунова об устойчивости	391
8.1.5	Доказательство условия устойчивости для отображений	392
8.1.6	Доказательство условия устойчивости для векторных полей	394
8.1.7	Доказательство условий неустойчивости	395
8.2	Предельные циклы на плоскости. Теорема Флоке	400
8.2.1	Циклы и отображение Пуанкаре	400
8.2.2	Теорема Флоке	403
8.3	Особые точки	405
8.3.1	Окрестности особых точек	405
8.3.2	Окрестности циклов	412
8.3.3	Разрешение особенностей	417
8.3.4	Вырожденные особые точки	427
8.3.5	Доказательство теоремы Гробмана-Хартмана для отображений	428
8.3.6	Доказательство теоремы Гробмана-Хартмана для векторных полей.	438
8.4	Введение в теорию Фробениуса	442
8.4.1	Интегральные поверхности полей плоскостей	442
8.4.2	Коммутатор векторных полей и коммутирующие фазовые потоки	444
8.4.3	Коммутатор векторных полей	445
8.4.4	Критерий интегрируемости.	446
8.4.5	Критерий интегрируемости для полей плоскостей произвольной размерности	448

9	Окно в теорию динамических систем	453
9.1	Структурная устойчивость	454
9.1.1	Определение структурной устойчивости	454
9.1.2	Критерий Андронова-Понтрягина	454
9.1.3	Три эпохи	455
9.1.4	Векторные поля на сфере	456
9.1.5	Необходимость гиперболичности в критерии Андронова-Понтрягина	457
9.1.6	Предельное поведение траекторий. Теорема Пуанкаре-Бендиксона	464
9.1.7	Типичность структурно устойчивых полей	473
9.1.8	О достаточности в критерии Андронова-Понтрягина	486
9.1.9	Несколько слов о теории бифуркаций	490
9.1.10	Теория динамических систем: взгляд с птичьего полета	492
9.2	Хаос: подкова Смейла	495
9.2.1	Олимпиадная задача о целых частях	495
9.2.2	Понятия символической динамики	496
9.2.3	Отображение подковы	496
9.2.4	Точки с предписанным будущим	498
9.2.5	Точки с предписанным прошлым. Доказательство теоремы 9.2.3	500
9.2.6	Вычисление координат точки по её судьбе	501
9.2.7	Сдвиг Бернулли	501
9.2.8	Следствия	502
9.2.9	Динамика и философия: детерминизм и хаос	503
9.2.10	Подкова	505

Предисловие

“Все течет, все изменяется”. Течет время и повсеместно происходят эволюционные процессы в окружающем нас мире. Многие из них (а в начале XIX века было мнение, что все они) описываются дифференциальными уравнениями. Лаплас писал:

“Мы можем рассматривать настоящее состояние Вселенной как следствие его прошлого и причину его будущего. Ум, которому были бы известны для какого-либо данного момента все силы, одушевляющие природу, и относительное расположение ее составных частей, если бы вдобавок он оказался достаточно обширным, чтобы подчинить эти данные анализу, обнял бы в одной формуле движение величайших тел Вселенной наравне с движениями мельчайших атомов: не осталось бы ничего, что было бы для него недостоверно, но будущее, также как и прошедшее, представило бы перед его взором” (Essai philosophique sur les probabilités – Опыт философии теории вероятности, 1814)

Математическая основа этого предсказания — теорема существования и единственности решений обыкновенных дифференциальных уравнений, которая в то время была на переднем крае науки. Сейчас эта теорема — один из центральных результатов студенческого курса обыкновенных дифференциальных уравнений.

Открытия XX века показали, что несмотря на то, что решения дифференциальных уравнений однозначно определяются своими начальными условиями, бывает невозможно на основе этого делать точные предсказания. Существуют дифференциальные уравнения, “чувствительные к изменению начальных условий”. Ничтожное, неуловимое никакими приборами, изменение начального условия может привести к тому, что за короткое время решение изменится до неузнаваемости. Этот эффект относится к теории “детерминированного хаоса”, бурно развивающейся, начиная с середины XX века. Одна из основных конструкций этой теории — подкова Смейла — изложена в последней главе настоящей книги.

Наш учебник следует традиции, заложенной в книгах Арнольда [?] и Хирша – Смейла – Деване [?]. Часть материала почерпнута также из замечательного учебника И.Г.Петровского [?]. Мы придерживаемся бескоординатного изложения и описываем явления в инвариантных терминах. Центральным объектом линейной теории является экспонента линейного оператора. Теорема существования доказывается с помощью принципа сжимающих отображений.

В то же время в этой книге есть ряд новшеств по сравнению с этими классическими учебниками. Подробно описан ход лучей на плоскости с переменным показателем преломления, данный в учебнике Арнольда лишь намеком. Доказательство первого закона Кеплера изложено элементарно с помощью приема, предложенного Фейнманом. В главе о симметриях дифференциальных уравнений приведена теорема Нетер о первых интегралах. Метод Фурье для уравнений с частными производными излагается как приложение теории линейных автономных систем. Это естественно приводит к уравнениям Бесселя, описанным в главе 6. Теорема существования и единственности доказана многими различными способами. В теории устойчивости исследуются положения равновесия не только для дифференциальных уравнений, но и для отображений. Несмотря на добавление материала, это упрощает изложе-

ние. Наряду с достаточным условием устойчивости в теореме Ляпунова доказано (с помощью функции Четаева) достаточное условие неустойчивости. Дана полная топологическая классификация гиперболических положений равновесия для дифференциальных уравнений и отображений; в частности, доказана теорема Гробмана – Хартмана. Изложены основы теории Фробениуса. Подкова Смейла описана на языке, доступном для старшеклассников. Книга снабжена набором задач, более обильным, чем в традиционных учебниках.

Несколько слов об истории написания этой книги. В ней подитожен 50-летний опыт третьего автора, который с 1968 года вел упражнения, а с 1993 года читал курс обыкновенных дифференциальных уравнений на мехмате МГУ. С 1997 по 2016 год Ю.С. Ильяшенко работал полгода в году профессором Корнельского университета, США, и преподавал на мехмате только в весеннем семестре. Поэтому он делил годовой курс с лекторами напарниками: А.С.Городецким, В.А.Кондратьевым, И.В. Асташовой, А.И.Буфетовым, которые читали первую половину курса в осеннем семестре. Этот же курс, в несколько сокращенном виде, читали в разные годы Ю.С. Ильяшенко и Н.Б.Гончарук в Корнельском университете; Ю.С. Ильяшенко читал его также в Независимом университете, Москва.

Именно Асташовой и Буфетову принадлежит идея написания этой книги. Буфетову также принадлежит еще одна идея: попросить Н.Б.Гончарук, тогда студентку, написать эту книгу на основе (прекрасных!) конспектов, записанных слушателями курса. Первые четыре главы были написаны Гончарук, когда она училась в университете (Ломоносовском и Независимом). При этом был выработан стиль, сохранившийся во всей книге. Так что эта книга в своем роде уникальна: это учебник, написанный студентом для студентов. Впрочем, все три автора написали ряд разделов сверх того, что было прочтено Буфетовым и Ильяшенко.

Мы благодарим наших коллег, оказавших неоценимую помощь на разных этапах работы над книгой: И.В.Асташову, А.С.Городецкому, В.А.Кондратьева, В.А.Клепцына, А.В.Клименко, С.И. Минкова, А. Эстерова. Отдельная благодарность издательству Американо-Математического Общества, которое любезно разрешило публикацию (с минимальными изменениями) разделов про теорию Фробениуса и подкову Смейла, заимствованных из книги [?]. Мы благодарны студентам, передавшим нам свои конспекты, и всем слушателям наших лекций, чей интерес был для нас вдохновляющей поддержкой.

Авторы

1 Введение

1.1 Введение

1.1.1 Первые примеры

В этом разделе мы, не давая пока строгих определений, решим несколько дифференциальных уравнений.

Напомним, что положение тела в пространстве задается его координатами $x = (x_1, x_2, x_3)$. Если в момент времени t тело находится в точке $x(t)$, то скорость тела равна $\frac{dx}{dt}$, а ускорение — $\frac{d^2x}{dt^2}$. Мы также будем использовать обозначения $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$; точкой мы обозначаем производные по времени.

Падение тела с постоянным ускорением

Пусть тело вертикально падает на поверхность Земли с небольшой высоты и в момент времени t находится на высоте $x(t)$; мы будем пренебрегать сопротивлением воздуха. Как известно, на поверхности Земли ускорение свободного падения направлено к центру Земли и равно $g \approx 9.8$ м/с². Поэтому

$$\ddot{x} = -g.$$

Это равенство — *дифференциальное уравнение* на функцию x .

Проинтегрируем обе части равенства, чтобы найти скорость тела:

$$v(t) = \dot{x} = -gt + v_0.$$

Здесь $v(0) = v_0$ — начальная скорость тела. Теперь снова проинтегрируем это равенство, чтобы найти $x(t)$:

$$x(t) = -\frac{gt^2}{2} + v_0t + x_0, \quad (1.1)$$

где $x_0 = x(0)$ — начальное положение тела.

Итак, мы решили дифференциальное уравнение и выяснили, как движется тело, если нам известно его начальное положение x_0 и начальная скорость v_0 . Эти значения называются *начальными условиями* дифференциального уравнения.

Формула (1.1) показывает, что если уронить тело с нулевой начальной скоростью $v_0 = 0$, то расстояние, пройденное падающим телом, возрастает как квадрат времени. Этот закон впервые сформулировал Галилей¹ в 1609 г. в книге²; он объяснил его постоянным действием силы тяжести и экспериментально проверил для движения тел по наклонным плоскостям. Утверждение о равномерном увеличении скорости падающего тела ранее встречается у Доминго де Сото, 1545.

¹Галилео Галилей (1564 – 1642) — физик, механик, астроном, философ, математик. Основатель экспериментальной физики. Широко известны астрономические открытия Галилея — в частности, открытие четырех спутников Юпитера.

²Галилео Галилей. Математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки, относящихся к механике и местному движению. DISCORSI DIMOSTRAZIONI MATEMATICHE, intorno a due piúe fiienette Attenenti alia Mecanica i Movimenti Logah, del Signor GALILEO GALILEI LINCEO, Filosofo Matematico primario del Serenissimo Grand Ducadi Toscana.

Задача де Бона

В 1637 году Декарт опубликовал свой труд “Геометрия”, положивший начало аналитической геометрии. Он содержал, в частности, метод проведения касательных к алгебраическим кривым. Последователь и ученик Декарта, юрист и математик Флоримонд де Бон в письме к Декарту (1638) предложил обратную задачу: восстановить кривую по определенному свойству её касательной. Декарт свел эту задачу к задаче о нахождении кривой, субтангенс которой постоянен, и дал способ приближенного построения такой кривой в 1639 г. *Субтангенс* — это длина проекции на ось абсцисс отрезка касательной, заключенного между кривой и осью абсцисс (см. рис. 1.1 слева).

Пусть искомая кривая — график функции $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. В силу определения, субтангенс равен отношению x/x' . Мы получаем уравнение $x/x' = const$, или

$$x' = kx. \quad (1.2)$$

Сама задача де Бона и её сведение к задаче о кривой с постоянным субтангенсом приведены в упражнении 4 в конце этого раздела. Здесь мы сосредоточимся на уравнении (1.2).

Итак, мы должны найти функцию $x(t)$, производная которой пропорциональна самой этой функции. Её несложно угадать: это экспонента, точнее, $x(t) = ce^{kt}$ для любого c . Решение задачи о кривой с постоянным субтангенсом было найдено Лейбницем³ в 1676 году в форме $t = \frac{1}{k} \ln(x/c)$.

Мы отложим до раздела 2.4.2 вопрос, почему у уравнения $x' = kx$ не может быть других решений.

На рис. 1.1 справа изображены графики решений уравнения $x' = kx$, $k = 1$. Графики решений дифференциального уравнения называются *интегральными кривыми*.

Упражнение 1. Докажите, что кривые $x = ce^{kt}$ при разных (ненулевых) значениях c отличаются только сдвигом или симметрией относительно оси Ot .

Это упражнение показывает, что с геометрической точки зрения у задачи де Бона только одно решение.

Упражнение 2. В предыдущем разделе мы, решая дифференциальное уравнение, просто проинтегрировали обе его части дважды. Что будет, если проинтегрировать обе части уравнения $x' = kx$? Приводит ли этот путь к решению?

Уравнение вида $\dot{x} = kx$ возникает во многих практических задачах. Оно означает, что скорость изменения некоторой величины пропорциональна этой величине. Так, скорость распада радиоактивного вещества пропорциональна его количеству, поэтому при $k < 0$ уравнение $\dot{x} = kx$ называют *уравнением радиоактивного распада*. Если размножение животных ничем не ограничено, то скорость размножения

³Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646–1716) — философ, математик, натурфилософ. Независимо от Ньютона заложил основы современного математического анализа; известен своим вкладом в математическую логику.

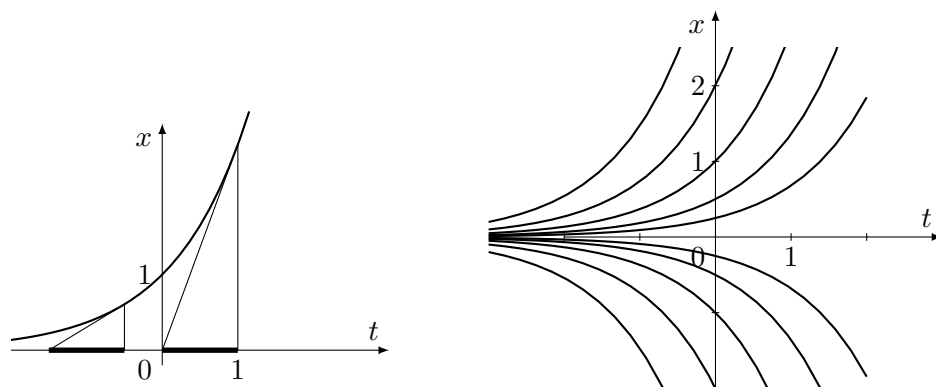


Рис. 1.1: Слева: кривая с постоянным субтангенсом; длины отрезков, отмеченных жирным, равны субтангенсу. Справа: интегральные кривые уравнения $x' = x$.

пропорциональна количеству животных. Поэтому для $k > 0$ уравнение $\dot{x} = kx$ называется *уравнением нормального (или: свободного) размножения*⁴. Мы уже знаем, что решения такого уравнения имеют вид $x(t) = ce^{kt}$, то есть популяция растет экспоненциально. Константа c равна начальному размеру популяции: $c = x(0)$.

Упражнение 3. *Размер небольшой колонии бактерий удваивается каждый час. Чему равна константа k для этой колонии?*

Следующая задача — небольшое исследование, посвященное решению задачи де Бона. Читатель, интересующийся историей математики, может обратиться к статьям^{5 6} или к письмам Декарта, Лейбница и Ньютона, ссылки на которые можно найти в этих статьях.

Упражнение 4. *Задача, предложенная де Боном, имела следующий вид.*

Проведем горизонтальную прямую l_1 и прямую l_2 по углом 45° к ней. Требуется построить кривую, обладающую следующим свойством. В любой точке X на кривой проведем отрезок касательной к кривой XZ до пересечения с l_1 , а также отрезок вертикальной прямой XU до пересечения с l_1 . Пусть XU и l_2 пересекаются в точке I . Требуется, чтобы отношение XU/ZU было обратно пропорционально XI .

⁴Уравнение $\dot{x} = kx$ также называют законом Мальтуса. Эту модель роста популяции предложил в книге “An Essay on the Principle of Population” Томас Роберт Мальтус (1766–1834) — священник и ученый, известный своими трудами в области политической экономии и демографии

⁵T.Lenoir, “Descartes and the geometrization of thought: the methodological background of Descartes’ Geometrie”, *Historia Mathematica* 6 (1979), 355-379.

⁶Christoph J. Scriba, “The inverse method of tangents: A dialogue between Leibniz and Newton (1675–1677)”, *Archive for History of Exact Sciences* volume 2, pages 113–137 (1963).

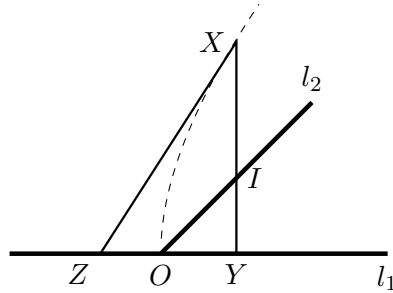


Рис. 1.2: Задача де Бона: пунктиром отмечена искомая кривая, заданная условием $XY/ZY = c/XI$.

Декарт предложил геометрический способ свести эту задачу к задаче о постоянном субтангенсе, эквивалентной уравнению $x' = kx$. Мы предлагаем читателю сделать это аналитически.

(а) Введите на плоскости координаты (u, v) так, что ось u направлена по горизонтали, а ось v — по вертикали. Начало координат поместите в точку O пересечения прямых l_1 и l_2 . Пусть искомая кривая — график функции $v(u)$. Покажите, что задача де Бона приводит к дифференциальному уравнению $\frac{dv}{du} = \frac{c}{v-u}$.

(b) Теперь рассмотрите ту же кривую как график функции $u(v)$. Можно представлять себе, что v играет роль оси абсцисс, а u — оси ординат. Покажите, что функция $u(v)$ удовлетворяет уравнению $\frac{du}{dv} = \frac{v-u}{c}$.

(с) Покажите, что если начало координат сместить в точку $O' = (-c, 0)$, а в качестве координатных векторов выбрать $(1, 0)$ и $(1, 1)$, то координаты точки (u, v) в новой системе координат будут иметь вид $(t, x) = (v, u - v + c)$.

(d) Перейдя в новую систему координат $t = v, x = u - v + c$, сведите уравнение $\frac{du}{dv} = \frac{v-u}{c}$ к уравнению $x' = -\frac{x}{c}$.

Указание: если $\frac{du}{dv} = \frac{v-u}{c}$, то чему равна производная по v выражения $x = (v - u - c)$?

(е) Решите задачу де Бона — найдите зависимость $u(v)$. Проверьте, что искомая кривая имеет асимптоту $v = u + c$.

Отметим, что новое начало координат $O' = (-c, 0)$ Декарт нашел из геометрических соображений: он доказал, что искомая кривая должна иметь асимптоту, и расположил начало координат в точке пересечения асимптоты с прямой l_1 .

Маятники

Математический маятник

Рассмотрим грузик, подвешенный на длинной нитке или стержне, и будем считать, что он раскачивается в одной плоскости (см.рис. 1.3 слева). Такая система называется математическим маятником. Можно, например, представлять себе качели,

1 Введение

которые могут двигаться только в плоскости, перпендикулярной перекладине качелей.

Как мы покажем в разделе 1.1.2, угол отклонения нитки от вертикали подчиняется уравнению

$$\ddot{x} = -\frac{g}{l} \sin x, \quad (1.3)$$

где l — длина нити, g — ускорение свободного падения. При $x \approx 0$, то есть когда нитка почти вертикальна, мы можем написать $\sin x \approx x$ и заменить уравнение на

$$\ddot{x} = -\frac{g}{l} x. \quad (1.4)$$

Аккуратное объяснение того, почему такая замена возможна, совсем не просто; мы приведем его в разделе 4.3.7.

Прежде чем подбирать решение этого уравнения, приведем еще одну механическую задачу, которая к нему приводит.

Пружинный маятник

Рассмотрим грузик, подвешенный на пружинке — пружинный маятник (см. рис. 1.3 справа). Введем систему координат таким образом, чтобы ось Ox была направлена вертикально и начало координат совпадало с положением равновесия грузика. Если растянуть пружинку и отпустить её, грузик начнет колебаться.

В разделе 1.1.2 мы покажем, что малые колебания грузика подчиняются закону

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m} x$$

где m — масса грузика, а константа k зависит от пружинки и называется коэффициентом жесткости пружинки.

Итак, для обоих маятников уравнение малых колебаний имеют вид $\ddot{x} = -\alpha x$, $\alpha > 0$. Теперь подберем решения этого уравнения. Начнем со случая $\alpha = 1$.

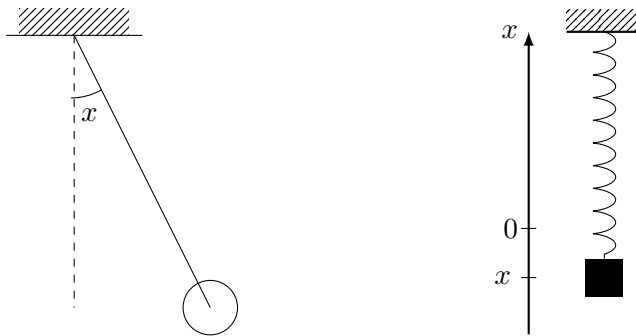


Рис. 1.3: Математический маятник (слева) и пружинный маятник с растянутой пружиной (справа).

Решения уравнения $\ddot{x} = -x$

Нам нужно подобрать функцию, вторая производная которой равна этой функции с обратным знаком. Легко угадать две таких функции: $x(t) = \cos t$ и $x(t) = \sin t$. Но этих решений нам недостаточно. Ведь нам нужно выяснить, как будет двигаться маятник из любого начального положения и при любой начальной скорости, то есть найти решения со всевозможными начальными условиями $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = v_0$.

На помощь приходит следующее соображение: любая линейная комбинация функций $\cos t$ и $\sin t$ с постоянными коэффициентами тоже является решением.

Упражнение 5. а) Проверьте, что $x(t) = a \cos t + b \sin t$ — решение уравнения $\ddot{x} = -x$ для любых констант a, b .

б) Проверьте, что если функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — решения уравнения $\ddot{x} = -x$, то любая их линейная комбинация — тоже решение уравнения.

Свойство из пункта (б) называется линейностью уравнения. В этой книге линейным уравнениям посвящена целая глава.

Осталось составить из синуса и косинуса линейную комбинацию, удовлетворяющую начальному условию $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = v_0$:

$$x(t) = x_0 \cos t + v_0 \sin t. \quad (1.5)$$

Замечание 1.1.1. На самом деле, у нашего уравнения нет других решений. Это следует из теоремы единственности решения дифференциального уравнения, см. раздел 2.4.

На рис. 1.4 слева приведен график одного из решений уравнения $\ddot{x} = -x$, а также график скорости $v(t)$. Видно, что пружинный маятник колеблется периодически с периодом 2π .

Упражнение 6. По приведенным графикам определите, в какой точке находится грузик, колеблющийся на пружинке, когда его скорость максимальна. Докажите полученный результат, пользуясь только уравнением $\ddot{x} = -x$.

Указание: в точке максимума производная скорости нулевая.

Пользуясь формулой для косинуса разности, решение (1.5) можно записать так:

$$x(t) = A \cos(t - \varphi),$$

где $x_0 = A \cos \varphi, v_0 = A \sin \varphi$.

Поэтому любое решение отличается от решения $x(t) = \cos t$ только умножением на постоянную A и сдвигом по времени на φ . Величина A называется *амплитудой* колебаний, а φ — сдвигом по фазе.

Упражнение 7. Вычислите амплитуду колебаний маятника, заданных уравнением $\ddot{x} = -x$, если известно начальное положение и начальная скорость маятника.

1 Введение

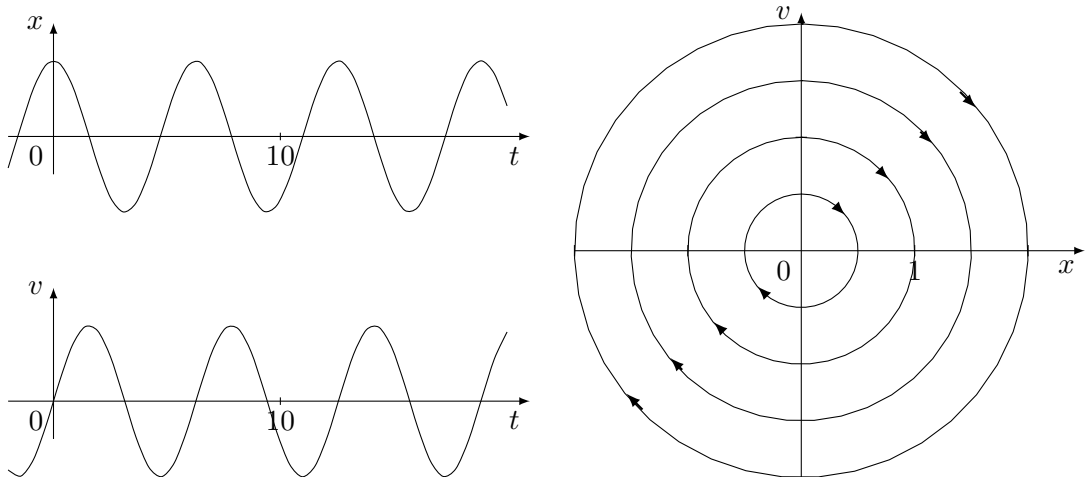


Рис. 1.4: График положения и скорости для малых колебаний маятника, заданного уравнением $\ddot{x} = -x$ (слева) и фазовый портрет для этого уравнения (справа).

Движение маятника, как и решения многих других уравнений вида $\ddot{x} = \dots$, удобно рисовать на фазовой плоскости — плоскости Oxv . Чтобы получить такой рисунок, выпишем уравнения для положения и скорости маятника:

$$x(t) = A \cos(t - \varphi), \quad v(t) = -A \sin(t - \varphi). \quad (1.6)$$

и нарисуем *фазовую кривую* — кривую $(x(t), v(t))$ в плоскости Oxv . Эта кривая — окружность с центром $(0, 0)$ и радиусом A , см. рис. 1.4 справа. Стрелками показаны направления движения вдоль фазовых кривых. Стрелки на всех окружностях направлены по часовой стрелке. Это можно объяснить без использования формул (1.6): ведь когда скорость груза положительна (то есть точка $(x(t), v(t))$ находится в верхней полуплоскости), грузик движется вверх и $x(t)$ растет.

Фазовая кривая $x(t) \equiv 0, v(t) \equiv 0$, которая представляет собой точку $(0, 0)$, играет особую роль: она соответствует положению равновесия груза. По рисунку видно, что решения уравнения — периодические функции, так как фазовые кривые замкнуты.

Решение уравнения для произвольного α . Период колебаний.

В общем случае уравнение имеет вид $\ddot{x} = -\alpha x$. Его решения имеют вид $x(t) = a \cos \beta t + b \sin \beta t$ для правильно выбранного β . Подставив $x(t)$ в уравнение, получаем $\beta = \sqrt{\alpha}$.

Упражнение 8. *Прodelайте эту выкладку.*

Упражнение 9. *Нарисуйте фазовые кривые $(x(t), v(t))$ на плоскости Oxv для уравнения $\ddot{x} = -4x$.*

Упражнение 10. *Вычислите амплитуду колебаний маятника по его начальному положению и скорости для $\alpha = 4$.*

Мы получили, что решения уравнения $\ddot{x} = -\alpha x$ имеют вид

$$x(t) = a \cos \sqrt{\alpha}t + b \sin \sqrt{\alpha}t$$

Значит, малые колебания маятника имеют период $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha}}$. Для пружинного маятника получаем $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$, а для математического маятника — $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. Напомним, что l — длина нити.

Впервые зависимость периода колебаний маятника от длины нити экспериментально установил Галилей. Особенно важным было то, что период малых колебаний маятника не зависит от амплитуды. Это позволило ученому и изобретателю Гюйгенсу⁷ в 1656 году создать маятниковые часы (механизм часов изготовил часовой мастер Саломон Костер). Позже Гюйгенс обосновал формулу $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ для периода малых колебаний маятника.

У ранних маятниковых часов колебания маятника были довольно велики, поэтому переход от уравнения (1.3) к уравнению (1.4) вносил заметную погрешность; период колебаний маятника в таких часах сильно зависел от амплитуды, что уменьшало точность хода. В 1673 году Гюйгенс доказал⁸, что если грузик маятника движется по циклоиде, а не по дуге окружности (этого можно добиться, если добавить в конструкцию специальные ограничители), период колебаний маятника не будет зависеть от амплитуды. Его колебания будут управляться уравнением (1.4) не только для малых, но и для любых колебаний. Такой маятник с ограничителями назывался циклоидальным.

Другой способ создания точных часов — уменьшить амплитуду колебаний маятника, чтобы уравнение (1.3) было ближе к уравнению (1.4). Около 1657 года Гук⁹ изобрел анкерную вилку, которая позволила уменьшить амплитуду колебаний маятника до нескольких градусов. Анкерная вилка использовалась в маятниковых часах до конца XIX века.

Маятник с трением

В предыдущем примере мы получили, что маятник будет двигаться периодически и никогда не остановится. Из-за трения такое движение маятника невозможно. Добавим в уравнение слагаемое $(-\mu\dot{x})$, которое соответствует трению:

$$\ddot{x} = -\alpha x - \mu\dot{x}.$$

⁷Христиан Гюйгенс (1629 – 1695) — физик, математик и астроном, один из основателей теоретической физики. Первым описал кольца Сатурна и открыл спутник Сатурна — Титан. В теории вероятностей предложил использовать математическое ожидание.

⁸Huygens, *Horologium oscillatorium*, 1673.

⁹Роберт Гук (1635 – 1703) — английский физик, изобретатель и архитектор, один из родоначальников физики. В том числе, он первым сформулировал закон всемирного тяготения и закон Гука, который мы сформулируем ниже. К Гуку восходит и важнейшее открытие в биологии — открытие живой клетки.

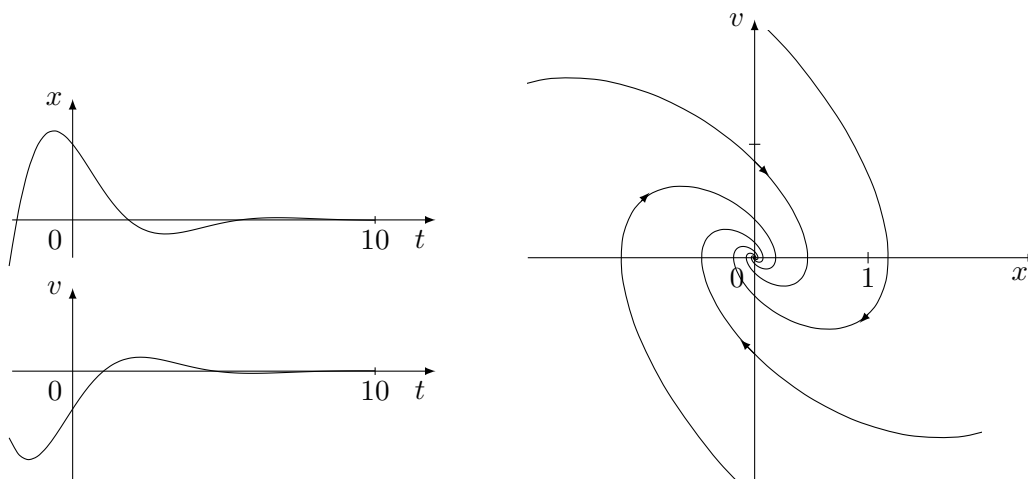


Рис. 1.5: График решения $x(t)$ и скорости $v(t)$, а также фазовый портрет для маятника с трением

В разделе 1.1.2 мы объясним, откуда берется это уравнение. Задачу о движении маятника с трением рассматривал Ньютон в некотором более сложном случае¹⁰, но не решал уравнение, а только определял, зависит ли период колебаний от амплитуды. Эта задача имела большой практический смысл: следовало выяснить, начинает ли зависеть период колебаний маятника от амплитуды, если учесть трение о воздух, а значит — влияет ли трение на точность хода часов.

Для простоты все константы примем равными единице:

$$\ddot{x} = -x - \dot{x}.$$

Читателю предлагается самостоятельно подобрать решение этого уравнения.

Упражнение 11. Подберите функции вида $e^{at} \cos bt$, $e^{at} \sin bt$, которые являются решениями уравнения $\ddot{x} = -x - \dot{x}$.

Теперь, как и в предыдущем примере, достаточно выписать линейную комбинацию этих функций, которая удовлетворяет начальному условию.

На рис. 1.5 слева показан график функции $e^{at} \cos bt$ и её производной. Заметим, что значение a в решении упражнения 11 будет отрицательным. Поэтому оба этих решения (и все их линейные комбинации) стремятся к нулю — грузик приближается к положению равновесия $x = 0$. При этом знак x все время меняется, то есть грузик колеблется относительно положения равновесия. Говорят, что колебания маятника затухают.

Для наглядности мы и для этой задачи нарисуем фазовые кривые — кривые $(x(t), v(t))$ в плоскости Oxv , см. рис. 1.5 справа. Они оказываются спиралями.

¹⁰Для циклоидального маятника, см. Исаак Ньютон, Математические начала натуральной философии, 1687, Отдел VI.

1.1.2. Дифференциальные уравнения в механике

Упражнение 12. *Сколько оборотов вокруг нуля делает каждая фазовая кривая? За какое время она делает один оборот? За какое время она приходит в положение равновесия $(0, 0)$?*

Сформулируйте ответы на предыдущие вопросы в терминах движения маятника с трением.

1.1.2 Дифференциальные уравнения в механике

Напомним три основных закона механики — законы Ньютона¹¹:

1. Существуют *инерциальные* системы отсчёта, относительно которых любая материальная точка, на которую не действуют никакие силы (или материальная точка, равнодействующая всех сил для которой равна нулю), находится в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения.
2. В инерциальной системе отсчёта ускорение материальной точки с постоянной массой прямо пропорционально равнодействующей всех приложенных к ней сил и обратно пропорционально её массе: $a = \frac{f}{m}$.
3. Силы возникают из взаимодействия материальных точек; силы, которые порождены взаимодействием, направлены вдоль прямой, соединяющей эти точки, равны по модулю и противоположны по направлению.

Замечание 1.1.2. *Три закона механики сформулированы в труде Ньютона¹².*

Первый закон — закон инерции — восходит к Галилею. Ньютон формулирует первый закон по-другому, поскольку он работает в одной выделенной системе отсчёта (абсолютное пространство) и считает её инерциальной.

Галилей, исследуя свободное падение тела, опирался на второй закон в частном случае, когда сила, действующая на тело, постоянна. Формулировка второго закона у Ньютона отличается от современной: Изменение количества движения пропорционально приложенной движущей силе и происходит по направлению той прямой, по которой эта сила действует. Здесь количество движения — это величина mv . Ньютон применял этот закон как для приращения количества движения за бесконечно малое время, так и для изменения момента mv при столкновениях тел. Современную формулировку закона дал Эйлер.

Третий закон предложен Ньютоном.

Допустим, нам известна зависимость силы от времени, положения и скорости материальной точки: $f = f(t, x, v)$, и эта зависимость непрерывна. Тогда второй закон

¹¹Исаак Ньютон (1642 – 1727) — физик, математик и астроном. Его труд «Математические начала натуральной философии», в котором изложены три закона механики и закон всемирного тяготения, является основой классической механики. Одновременно с Лейбницем разработал дифференциальное и интегральное исчисление. Известны также работы Ньютона по оптике и теории цвета.

¹²Исаак Ньютон, Математические начала натуральной философии, 1687.

1 Введение

Ньютона превращается в уравнение вида

$$m\ddot{x} = f(t, x, \dot{x}) \quad (1.7)$$

на неизвестную вектор-функцию $t \mapsto x(t)$. В уравнение входит сама вектор-функция x и её производные первого и второго порядка — скорость и ускорение.

Уравнение (1.7) является обыкновенным дифференциальным уравнением. Таким образом, законы механики напрямую приводят к дифференциальным уравнениям.

Чтобы показать, как получать дифференциальные уравнения из законов механики, мы выведем уравнения для свободного падения тел и движения маятников, используя второй закон Ньютона и формулы для сил, известные из курса физики.

Падение тела на поверхность Земли

Сила тяжести, действующая на тело со стороны Земли, равна $\vec{F} = m\vec{g}$, где \vec{g} — ускорение свободного падения. Если тело падает на поверхность Земли с небольшой высоты, \vec{g} можно считать постоянным; $\vec{g} = 9.8\text{ м}^2/\text{с}$. Второй закон Ньютона даёт $m\ddot{x} = m\vec{g}$. Спроецировав обе части равенства на вертикальную ось, получаем, что высота, на которой находится тело, удовлетворяет уравнению $\ddot{x} = -g$.

Пружинный маятник

Нам понадобится закон Гука. В 1660 году Роберт Гук установил, что если к пружине подвесить груз и дать системе прийти в равновесие, растяжение пружины будет пропорционально весу груза. Сила упругости пружины при этом равна весу груза, так как он висит неподвижно — значит, *сила упругости пружины пропорциональна величине её растяжения*.

На груз, подвешенный на пружине, действует сила тяжести и сила упругости пружины. По закону Гука, величина силы упругости $f_{\text{уп}}$ пропорциональна растяжению пружины: $f_{\text{уп}} = -k(x - a)$, где a — положение нерастянутой пружины (то есть пружины без груза). Из второго закона Ньютона мы получаем уравнение

$$m\ddot{x} = -mg - k(x - a) = -kx + (ka - mg).$$

Но так как начало координат мы поместили в положение равновесия пружины с грузом, при $x = 0$ силы должны быть уравновешены, то есть $ka - mg = 0$.

Окончательно получаем $m\ddot{x} = -kx$.

Математический маятник

Рассмотрим грузик массы m , закрепленный на конце нерастяжимого и невесомого стержня длины l (см. рис. 1.6). Второй конец стержня закреплен неподвижно в точке O таким образом, что грузик может двигаться только в одной плоскости.

В качестве координаты x возьмём угол между направлением стержня и вертикалью. На грузик действует сила тяжести $m\vec{g}$ и сила упругости \vec{N} со стороны стержня; по второму закону Ньютона,

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}.$$

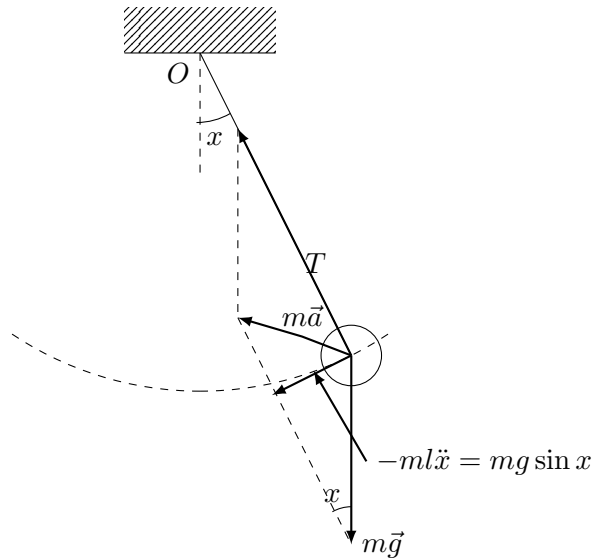


Рис. 1.6: Математический маятник

Спроецируем обе части равенства на касательную к окружности с центром O и радиусом l . Тогда длина проекции правой части равна $mg \sin x$. С другой стороны, ускорение точки, движущейся по окружности, состоит из двух компонент: направленной к центру окружности и направленной по касательной.

Упражнение 13. Докажите, что для точки, движущейся по окружности, касательная компонента ускорения равна радиусу окружности, умноженному на угловое ускорение.

Итак, проекция левой части равенства на касательную — касательная компонента ускорения — равна $l\ddot{x}$. Мы получаем

$$ml\ddot{x} = -mg \sin x.$$

Пружинный маятник с трением

Мы получим уравнение движения для следующей механической системы. Пусть к пружинному маятнику прикреплен демпфер — поршень, погруженный в сосуд, заполненный жидкостью, см. рис. 1.7. В поршне есть отверстия, которые позволяют жидкости двигаться сквозь него. Именно таким образом устроены некоторые автомобильные подвески. Тогда, кроме силы тяжести и силы упругости пружины, на грузик действует сила жидкостного трения, пропорциональная скорости движения грузика и направленная в противоположную сторону: $f_{\text{тр}} = -\lambda\dot{x}$. Получаем

$$m\ddot{x} = -kx - \lambda\dot{x}.$$

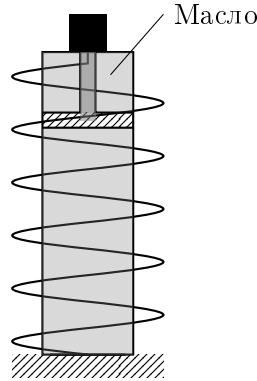


Рис. 1.7: Пружинный маятник с демпфером

1.1.3 Закон сохранения полной механической энергии

В этом разделе мы покажем в некотором частном случае, что закон сохранения полной механической энергии следует из дифференциального уравнения, которому подчиняется система.

Пусть материальная точка движется по прямой Ox под действием силы f , зависящей только от положения точки на прямой. Пусть $x(t) \in \mathbb{R}$ — положение точки в момент времени t .

В силу второго закона Ньютона,

$$m\ddot{x}(t) = f(x(t)). \quad (1.8)$$

Для краткости мы будем писать x вместо $x(t)$. Домножим обе части равенства на скорость материальной точки \dot{x} :

$$m\dot{x}\ddot{x} = f(x)\dot{x} \quad (1.9)$$

Выражение в левой части равенства (1.9) — производная по времени от *кинетической энергии* материальной точки $\frac{m\dot{x}^2}{2}$.

Потенциальной энергией материальной точки называется функция $U(x)$, для которой $\frac{dU}{dx} = -f(x)$. Потенциальная энергия определена этим равенством с точностью до прибавления константы. По формуле для производной сложной функции,

$$f(x)\dot{x} = -\frac{dU}{dx} \frac{dx}{dt} = -\frac{d}{dt}U(x(t)),$$

то есть правую часть равенства (1.9) мы тоже представили в виде производной по времени. Итак,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m\dot{x}^2}{2} \right) = -\frac{d}{dt}U(x), \text{ или } \frac{d}{dt} \left(\frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) \right) = 0.$$

1.1.4. (*) Задача о равномерном спуске

Поэтому сумма кинетической и потенциальной энергии постоянна:

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) = E = \text{const}. \quad (1.10)$$

Величина E называется *полной энергией* материальной точки, а последнее соотношение есть не что иное, как закон сохранения энергии.

В частности, для тела, падающего на поверхность Земли с небольшой высоты, потенциальная энергия равна $U(x) = mgx$, где x — высота, на которой находится камень.

Упражнение 14. Если камень подбросили вертикально вверх с небольшой начальной скоростью v , на какую максимальную высоту он поднимется? Какая у него будет скорость в тот момент, когда он упадет обратно? Сопротивлением воздуха пренебречь.

В этой задаче не нужно находить закон движения камня, достаточно закона сохранения энергии.

Для пружинного маятника из уравнения $m\ddot{x} = -kx$ получаем, что потенциальная энергия пружины равна $U(x) = \frac{mx^2}{2}$. Из закона сохранения энергии следует, что $\frac{mx^2}{2} + \frac{kv^2}{2} = \text{const}$. Это уравнение задаёт эллипсы на плоскости Oxv . Итак, фазовые кривые уравнения — эллипсы. В частности, для $m = k$ фазовые кривые — окружности, см. рис. 1.4.

Уравнение для маятника с трением не имеет вида $m\ddot{x} = f(x)$: в выражении для силы участвует производная \dot{x} . Полная механическая энергия не будет постоянна.

Упражнение 15. Домножив уравнение $\ddot{x} = -x - \dot{x}$ на \dot{x} , покажите, что полная механическая энергия $E(x, v) = x^2 + v^2$ для пружинного маятника с трением убывает с ростом t .

Выведите отсюда, что фазовые кривые соответствующего уравнения приближаются к нулю; ср. с рис. 1.5.

Упражнение 16. Рассмотрим вертикальное падение материальной точки массы m на поверхность Земли с большой высоты под действием силы тяжести $|F| = G\frac{mM}{r^2}$. Выпишите уравнение для положения материальной точки. Найдите потенциальную энергию.

Если, стоя на поверхности Земли, камень запустили вертикально вверх с большой начальной скоростью v , на какую высоту он поднимется? Какая у него будет скорость в тот момент, когда он упадет обратно? С какой скоростью надо запустить камень вверх, чтобы он никогда не упал обратно (вторая космическая скорость)? Сопротивлением воздуха пренебречь.

1.1.4 (*) Задача о равномерном спуске

В 1687 году Готфрид Вильгельм Лейбниц поставил следующую задачу.

Рис. 1.8: Материальная точка равномерно спускается по кривой. На рисунке $\alpha < 0$.

Задача. Найти такую кривую, что тяжёлая точка под действием силы тяжести равномерно опускается по этой кривой (вертикальная компонента скорости постоянна).

Задача Лейбница была решена Яковом Бернулли¹³ в 1690 г. Статья Бернулли¹⁴ с решением задачи Лейбница — исторически первая работа, в которой было решено обыкновенное дифференциальное уравнение. Она замечательна также тем, что в ней впервые появился термин “интеграл” в современном его значении. В конце статьи была сформулирована знаменитая задача о цепной линии.

Условие задачи предполагает, что точка движется по кривой, расположенной в некоторой вертикальной плоскости; введём в этой плоскости систему координат, в которой ось абсцисс направлена горизонтально, а ось ординат — вертикально вверх. Пусть $x(t), y(t)$ — координаты точки в момент времени t , а $(u(t), v(t)) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$ — двумерный вектор её скорости.

Точка должна опускаться равномерно, то есть вертикальная компонента её скорости должна быть постоянна: $v(t) \equiv v$. Значит, вертикальная компонента ускорения равна нулю: $\vec{a} = (\dot{u}, \dot{v}) = (\dot{u}, 0)$.

На точку действует сила тяжести $m\vec{g}$, направленная вниз, и сила нормальной реакции опоры \vec{N} , направленная по нормали к кривой (см. рис. 1.8). Запишем второй закон Ньютона $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}$ для горизонтальной и вертикальной компонент ускорения:

$$\begin{cases} m\dot{u} = -N \sin \alpha \\ 0 = N \cos \alpha - mg. \end{cases}$$

Здесь $N = |\vec{N}|$ — величина силы нормальной реакции опоры, а угол $\alpha, \alpha < 0$ — угол наклона касательной к кривой: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{v}{u}$. Исключим N :

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{m\dot{u}}{mg}$$

¹³Яков Бернулли (1655 – 1705) — математик, известный своим вкладом в теорию вероятностей, анализ и вариационное исчисление.

¹⁴Analysis problematis ante hac propositi, de inventione linea descensus a copore gravi percurrendae uniformiter, sic ut temporibus aequales altitudines emetiatur: alterius cujusdam problematis propositio, Acta Eruditorum (1690) pp. 217-219.

Сравнивая это равенство с равенством $\operatorname{tg} \alpha = \frac{v}{u}$, получим следующее уравнение на функцию $u(t)$:

$$\dot{u} = \frac{K}{u}. \quad (1.11)$$

Здесь $K = -gv$ — постоянный (положительный) коэффициент.

Умножим обе части равенства (1.11) на u . Получим $u\dot{u} = K$, то есть

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{u^2}{2} \right) = K.$$

Итак, производная функции $\frac{u^2}{2}$ постоянна, то есть эта функция линейна: $u^2(t) = 2Kt + C$, где C — некоторая константа.

Решим задачу Лейбница в предположении, что $u(0) = 0$, то есть в начальной точке касательная к кривой вертикальна. Тогда $u^2(t) = 2Kt$, и

$$u(t) = \sqrt{2K} \sqrt{t}.$$

Упражнение 17. Как выглядит формула в общем случае, если не предполагать, что $u(0) = 0$?

Теперь найдем кривую, по которой движется материальная точка. Выберем начало отсчета так, чтобы кривая начиналась в начале координат: $x(0) = y(0) = 0$. Функцию $x(t)$ можно найти, проинтегрировав найденную функцию $u(t) = \dot{x}(t)$:

$$x(t) = \int_0^t u(\tau) d\tau = K_1 t^{\frac{3}{2}};$$

здесь $K_1 = \frac{2}{3} \sqrt{2K}$.

Так как точка опускается по кривой равномерно, то $y(t) = vt$; поэтому уравнение кривой имеет вид

$$x = K_2 (-y)^{\frac{3}{2}};$$

здесь $K_2 = \frac{2}{3} \sqrt{2K} (-v)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3} \frac{\sqrt{2g}}{v}$.

Таким образом, тяжелая точка будет опускаться равномерно по полукубической параболе $x^2 = Cy^3$, $C = -K_2^2 < 0$.

Упражнение 18. По какой кривой материальная точка будет спускаться с вертикальным ускорением $\frac{g}{2}$? С ускорением $0.99g$? С ускорением g ?

1.2 Задачи к Введению

1. Подберите решения с заданным начальным условием $x(0) = c$ для следующих дифференциальных уравнений: $\dot{x} = -x$; $\ddot{x} = -4x$; $\dot{x} = x + 1$; $\dot{x} = 2x + 1$. Какие из этих уравнений имеют постоянное решение?

1 Введение

2. Алиса упала в тоннель, который идет вдоль диаметра земного шара, с нулевой начальной скоростью. В этом тоннеле на расстоянии r от центра Земли сила тяжести пропорциональна¹⁵ r . Выясните, за какое время Алиса пролетит всю Землю насквозь и какова будет её максимальная скорость. Радиус Земли — 6.3×10^3 км. Сопротивлением воздуха пренебречь.
3. Выпишите дифференциальные уравнения, которые соответствуют каждому из следующих процессов. Покажите, что во всех случаях искомая величина экспоненциально убывает. Пользуясь этим, решите задачи.
 - a) Количество радиоактивного вещества, которое распадается за единицу времени, пропорционально исходному количеству этого вещества.

В течение года из каждого грамма радия распадается 0,44 мг. Найдите период полураспада радия.

Может ли все вещество распасться за конечное время?
 - b) Количество света, поглощаемого слоем воды, пропорционально количеству падающего света.

Слой воды толщиной 35 см поглощает половину падающего на него света. Какую часть падающего света поглотит слой толщины 2 м?
 - c) Скорость изменения температуры тела пропорциональна разности температур тела и окружающей среды. Пусть температура окружающей среды постоянна. Покажите, что температура тела стремится к температуре окружающей среды экспоненциально по времени.

Стакан чая остыл от 100 до 60 градусов за 10 минут. Температура воздуха равна 20 градусов. За какое время чай остынет до 25 градусов?
 - d) Лодка замедляет свое движение под действием сопротивления воды, которое пропорционально скорости лодки. Пусть лодка замедлилась с 4 км/ч до 2 км/ч за 10 секунд. Когда её скорость будет равна 1 км/ч?

Остановится ли лодка за конечное время? Пройдет ли она конечный путь до остановки¹⁶?
 - e) Гвоздь тонет в воде; на него, кроме силы тяжести, действует сила сопротивления воды, которая пропорциональна скорости гвоздя (силой Архимеда пренебречь). Докажите, что скорость гвоздя стремится к предельному значению экспоненциально по времени, и найдите это предельное значение.

¹⁵ Коэффициент пропорциональности вы можете легко вычислить: в начале тоннеля сила тяжести такая же, как и везде на поверхности Земли.

¹⁶ На пристанях всегда прикрепляют швартовые кранцы (или подвешивают автомобильные шины), о которые ударяется подошедший катер. Почему он не может подойти к пристани с нулевой конечной скоростью, как это делает, например, автобус? Ответ содержится в задаче d): катеру пришлось бы подходить к пристани бесконечно долго.

- f) Согласно закону Бойля-Мариотта, давление воздуха при постоянной температуре пропорционально его плотности. Пренебрегая изменением температуры воздуха с высотой, найдите атмосферное давление на высоте h как функцию от h . Чему равно давление на высоте Эльбруса (5650 м)? А Эвереста (8850 м)?

Справка: Атмосферное давление на уровне моря равно 10 Н/см^2 : на каждый квадратный сантиметр поверхности давит 1 кг воздуха. Давление на 1 квадратный сантиметр поверхности (на любой высоте) равно весу столба воздуха, который расположен над этим участком поверхности. Плотность воздуха равна $0,0012 \text{ г/см}^3$.

Указание: если атмосферное давление на высоте h равно $p(h)$, то по закону Бойля-Мариотта плотность воздуха на этой высоте равно $\rho(h) = cp(h)$. Константу c легко найти, зная плотность и давление воздуха на уровне моря. Рассмотрим столб воздуха, который представляет собой цилиндр с площадью основания S . Выделим его близкие сечения — площадки на высоте h и $h + \delta$. Разница в давлении на такие площадки $(p(h + \delta) - p(h))S$ равна весу воздуха между сечениями, то есть

$$S(p(h + \delta) - p(h)) = -\delta S \rho(h) + o(\delta) = -\delta S c p(h) + o(\delta).$$

Слагаемое $o(\delta)$ в правой части возникает оттого, что давление воздуха между сечениями непостоянно и отличается от $p(h)$ на величину порядка $o(1)$. Разделив это равенство на S и δ и устремив δ к нулю, мы получим дифференциальное уравнение на $p(h)$.

4. (*)

- а) Для остановки речных судов у пристани с них бросают канат, который наматывают на круглый столб. Канат сделал три витка вокруг столба, рабочий тянет за его свободный конец с силой 100 Н; коэффициент трения каната о столб равен $1/3$, и канат проскальзывает. Какая сила тормозит судно¹⁷?
- б) Та же задача, если столб не круглый, а гладкий строго выпуклый прямой цилиндр.

Указание: нужно выяснить, как меняется натяжение вдоль каната. Рассмотрите небольшой участок каната, прилегающий к столбу, и нарисуйте действующие на него силы: силы натяжения в концах каната, силу трения и силу нормальной реакции опоры. Сумма таких четырёх векторов равна нулю. Коэффициент трения связывает величину силы трения и величину силы нормальной реакции опоры и позволяет понять, как направлена равнодействующая этих сил. Этого достаточно, чтобы найти соотношение между силами натяжения

¹⁷ Ответ к этой задаче обсуждается в гл. “Жюльверновский силач” замечательной книги Я.И.Перельмана “Занимательная физика”.

1 Введение

на концах маленького участка каната. Превратите полученное соотношение в дифференциальное уравнение и решите его.

Решение (а): величина натяжения каната в разных его точках различна. На свободном конце каната она равна 100 Н, потому что именно такое усилие прилагает рабочий. На другом конце каната она равна силе, которая тормозит судно и которую надо найти. Поэтому следует выяснить, как растет сила натяжения вдоль куска каната, который намотан на столб. Пусть $F(\varphi)$ — натяжение каната в точке, которая соответствует углу φ ; будем считать, что $\varphi \in [0, 6\pi]$, так как канат сделал три витка вокруг столба. Положим $f(\varphi) = |F(\varphi)|$. Мы знаем, что $f(0) = 100$ Н, и хотим найти $f(6\pi)$.

Рассмотрим небольшой участок каната $(\varphi, \varphi + \delta)$, прилегающий к столбу. Натяжения каната на концах этого участка равны по модулю $F(x)$ и $F(x + \delta)$ и направлены по касательным к столбу. Мы должны учесть, что столб круглый, поэтому не можем пренебречь тем, что эти силы направлены по-разному. Угол между ними равен δ .

Силы натяжения уравновешиваются силой нормальной реакции опоры (столба) и трением. Трение равно по модулю $F_{\text{тр}} = \frac{1}{3}|N|$, так как коэффициент трения равен $\frac{1}{3}$. Так как трение направлено по касательной к столбу, а сила нормальной реакции опоры — по нормали, равнодействующая этих сил реакции в каждой точке каната направлена под углом α , $\text{tg } \alpha = 3$, к касательной. На малом участке каната направление равнодействующей сил реакции почти одинаково. Проведем касательную к столбу в точке φ и будем считать, что равнодействующая сил реакции направлена под углом α , $\text{tg } \alpha = 3$, к этой касательной. (Что поменяется в рассуждении, если мы не будем делать такое предположение? Убедитесь, что произойдут изменения порядка $o(\delta)$).

Мы считаем, что канат проскальзывает равномерно, то есть силы, упомянутые выше, находятся в равновесии. Поэтому три вектора — силы натяжения и равнодействующая сил реакции — составляют треугольник; его углы равны δ , α и $2\pi - \delta - \alpha$. Стороны этого треугольника, соответствующие силам натяжения, относятся как $f(\varphi + \delta) : f(\varphi) \approx \sin(2\pi - \delta - \alpha) : \sin \alpha = \sin(\alpha + \delta) : \sin \alpha$. Поэтому

$$(f(\varphi + \delta) - f(\varphi)) : f(\varphi) \approx \delta \sin'(\alpha) : \sin \alpha = \delta \cos \alpha : \sin \alpha = \delta / \text{tg } \alpha = \frac{1}{3} \delta.$$

Равенство верно с точностью $o(\delta)$. Значит, $f'(\varphi) = \frac{1}{3}f(\varphi)$, то есть $f(\varphi) = Ce^{\frac{1}{3}\varphi}$: натяжение каната растет экспоненциально. Так как $f(0) = 100$ Н, получаем $f(6\pi) = e^{2\pi} \cdot 100$ Н ≈ 53400 Н.

Итак, усилие рабочего в 100 Н (что соответствует всего 10 кг) превращается в 53400 Н (что соответствует 5.3 тонн).

Мы нигде не использовали, что столб круглый, поэтому решение годится и для пункта (b).

2 Основные понятия теории дифференциальных уравнений

2.1 Напоминание: кривые и отображения в \mathbb{R}^n

В этом разделе собраны необходимые сведения и понятия из многомерного математического анализа: дифференциал, теоремы о производной сложной функции и об обратном отображении, гладкая кривая, касательный вектор, а также определены классы гладкости C^r , C^∞ , C^ω .

Мы подчеркиваем геометрическую природу таких понятий, как дифференциал и касательный вектор, однако приводим и их координатные представления. Кроме того, мы обращаем внимание на различие между параметризованной кривой и кривой как подмножеством в \mathbb{R}^n , обсуждаем замену параметра на кривой и зависимость касательного вектора от параметризации. В дополнительном разделе “Векторы и точки. Аффинные и векторные пространства” объясняется отличие аффинного пространства от векторного; понятие аффинного пространства понадобится нам в разделе 3.4.

Читатель, знакомый с перечисленными понятиями и утверждениями, может пропустить раздел 2.1.

Пространство \mathbb{R}^n

В курсе линейной алгебры даётся определение векторного пространства над \mathbb{R} . Элементы векторного пространства — *векторы* — можно складывать и умножать на вещественные числа. Естественные отображения для векторных пространств — линейные операторы — сохраняют эти две операции. Векторное пространство \mathbb{R}^n — это векторное пространство над \mathbb{R} размерности n .

Пространство \mathbb{R}^n также имеет структуру аффинного пространства. Аффинное пространство отличается от векторного тем, что в нем нет выделенного нуля. Когда мы имеем дело с аффинным пространством \mathbb{R}^n , мы говорим о его элементах как о точках (аффинного пространства), а не как о векторах.

Дифференциал

Пусть $|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ — стандартная евклидова¹ норма вектора $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Вектор, приложенный к точке p в \mathbb{R}^n — это пара (p, v) , где p — точка пространства \mathbb{R}^n и $v \in \mathbb{R}^n$. Обычно рисуют вектор, равный v , начало которого помещают в точку p .

Касательное пространство $T_p\Omega$ к открытому множеству $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ в точке $p \in \Omega$ — это множество векторов, приложенных к точке p . Как векторное пространство оно изоморфно \mathbb{R}^n .

Дифференциал отображения (вектор-функции) $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ в точке p — это линейное отображение $df|_p: T_p\Omega \rightarrow T_{f(p)}\mathbb{R}^m$, для которого

$$f(x) = f(p) + df|_p(x - p) + o(|x - p|).$$

¹Эвклид (около 300 года до н. э.) — древнегреческий математик. Автор “Начал” — знаменитого труда по геометрии, арифметике и теории чисел, одной из вершин античной математики.

2.1 Напоминание: кривые и отображения в \mathbb{R}^n

Дифференциал можно рассматривать как линейное отображение из \mathbb{R}^n в \mathbb{R}^m , так как $T_p\Omega$ изоморфно \mathbb{R}^n , а $T_{f(p)}\mathbb{R}^m$ изоморфно \mathbb{R}^m . Если отображение имеет дифференциал в точке p , оно называется *дифференцируемым* в точке p . Если дифференциал непрерывно зависит от точки p , отображение называется **непрерывно дифференцируемым**.

Матрица Якоби² отображения $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ в точке $p \in \mathbb{R}^n$ — матрица линейного оператора $df|_p$. Эта матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix},$$

где все производные вычисляются в точке p . Матрица Якоби зависит от выбора системы координат в $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$.

Якобиан отображения $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ в точке $p \in \mathbb{R}^n$ — определитель (квадратной) матрицы Якоби отображения f в точке p . Он не зависит от выбора системы координат в \mathbb{R}^n .

Теорема 2.1.1 (Теорема о производной сложной функции). *Если отображение $f: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ дифференцируемо в точке p , а отображение $g: \Omega_2 \rightarrow \Omega_3$ дифференцируемо в точке $f(p)$, то их композиция $g \circ f$ дифференцируема в точке p , и её дифференциал равен*

$$d(g \circ f)|_p = dg|_{f(p)} \cdot df|_p.$$

Теорема 2.1.2 (Теорема об обратном отображении). *Если отображение $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ непрерывно дифференцируемо в окрестности точки p и его дифференциал невырожден в точке p (якобиан не обращается в ноль), то обратное отображение f^{-1} определено и непрерывно дифференцируемо в окрестности точки $f(p)$, и его дифференциал равен*

$$d(f^{-1})|_{f(p)} = (df|_p)^{-1}.$$

Пусть $I, J \subset \mathbb{R}$ — интервалы, отрезки или лучи вещественной оси, или совпадают с вещественной осью.

Диффеоморфизм (на прямой) — взаимно однозначное непрерывно дифференцируемое отображение $g: I \rightarrow J$, для которого обратное отображение тоже непрерывно дифференцируемо. Говорят, что диффеоморфизм **сохраняет ориентацию**, если функция g монотонно возрастает.

Диффеоморфизм (в общем случае) — взаимно однозначное непрерывно дифференцируемое отображение подмножеств \mathbb{R}^n , для которого обратное отображение тоже непрерывно дифференцируемо.

По теореме об обратном отображении, непрерывно дифференцируемое взаимно однозначное отображение является диффеоморфизмом, если его дифференциал не обращается в ноль.

²Карл Густав Якоб Якоби (1804 – 1851) — математик и механик, внёс большой вклад в комплексный анализ, теорию чисел, вариационное исчисление, линейную алгебру и динамику.

Классы гладкости

Здесь и далее область — это связное открытое множество в \mathbb{R}^n . Пусть Ω — область в \mathbb{R}^n .

Класс C : Функция $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ принадлежит классу $C(\Omega)$, если она непрерывна в Ω .

Класс C^r : Функция $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ называется r раз непрерывно дифференцируемой в области Ω (принадлежит классу $C^r(\Omega)$), если она r раз дифференцируема на Ω и её частные производные порядка r непрерывно зависят от точки.

Класс C^∞ : Функция $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ **бесконечно-дифференцируема** (принадлежит классу $C^\infty(\Omega)$), если имеет частные производные любого порядка в любой точке Ω .

Класс C^ω : Функция $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ **аналитическая** в точке $a \in \Omega$, если её ряд Тейлора³ в точке a сходится к самой функции в некоторой окрестности точки a . Функция аналитическая в области Ω (принадлежит классу $C^\omega(\Omega)$), если она аналитическая в каждой точке области Ω .

Кривые

Пусть $I, J \subset \mathbb{R}$ — интервалы, отрезки или лучи вещественной оси, или совпадают с вещественной осью.

Непрерывная кривая в \mathbb{R}^n — это непрерывное отображение $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^n, s \mapsto \varphi(s) \in \mathbb{R}^n$. В координатах кривую задаёт набор n непрерывных функций $(\varphi_1(s), \dots, \varphi_n(s)) = \varphi(s)$.

Иногда само множество $\varphi(I) \subset \mathbb{R}^n$ называют кривой, а отображение φ — **параметризацией** этой кривой.

Гладкая (или: **C^1 -гладкая**) **кривая** в \mathbb{R}^n — это непрерывно дифференцируемое отображение $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^n, s \mapsto \varphi(s) \in \mathbb{R}^n$, дифференциал которого не обращается в ноль. В координатах гладкую кривую задаёт набор n непрерывно дифференцируемых функций $(\varphi_1(s), \dots, \varphi_n(s)) = \varphi(s)$, производные которых не обращаются в ноль одновременно. Аналогичным образом определяется C^r -гладкая кривая.

Если не накладывать требование, что дифференциал отображения φ ненулевой, соответствующая кривая может иметь изломы. Такова, например, полукубическая парабола — кривая $\varphi(t) = (t^2, t^3)$ на плоскости.

Упражнение 19. Нарисуйте её.

Касательный вектор к кривой φ при $s = s_0$ (в точке $\varphi(s_0) \in \mathbb{R}^n$) — это вектор

$$v = d\varphi|_{s_0} e_1, \quad v \in T_{\varphi(s_0)} \mathbb{R}^n,$$

где e_1 — единичный вектор на прямой \mathbb{R} , приложенный в точке s_0 . В координатах это вектор $v = (\varphi'_1(s_0), \dots, \varphi'_n(s_0))$, приложенный в точке $\varphi(s_0)$.

³Брук Тейлор (1685 – 1731) — математик, наиболее известный благодаря формуле Тейлора. Ввел в рассмотрение уравнения в конечных разностях, изучал колебания струны и законы перспективы.

2.1 Напоминание: кривые и отображения в \mathbb{R}^n

Так как кривую часто интерпретируют как траекторию движения, а переменную на интервале I — как время, то касательный вектор также называют **вектором скорости** кривой.

Если кривая самопересекающаяся, то в точке самопересечения у неё может быть два разных касательных вектора: они соответствуют двум разным значениям параметра, при которых кривая проходит через эту точку.

Касательное пространство $T_p\varphi$ к кривой $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ в точке p — это одномерное пространство, порожденное касательным вектором в этой точке.

Заменить параметр на кривой — для фиксированного диффеоморфизма $g: J \rightarrow I$ (замены параметра) заменить кривую $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ на кривую $\varphi \circ g: J \rightarrow \mathbb{R}^n$. При замене параметра множество точек в \mathbb{R}^n , из которых состоит кривая (то есть кривая как подмножество \mathbb{R}^n), не меняется: $\varphi(g(J)) = \varphi(I)$. Отображение $\varphi \circ g$ называется новой параметризацией кривой.

Лемма 2.1.3 (Касательный вектор при замене параметризации). *При замене параметра на кривой направление касательного вектора в каждой точке кривой или не меняется (если замена параметра сохраняет ориентацию), или меняется на противоположное.*

Доказательство. Пусть кривая $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ проходит через точку $p \in \mathbb{R}^n$, когда параметр принимает значение a : $\varphi(a) = p$. Пусть замена параметра имеет вид $g: J \rightarrow I$, и $g^{-1}(a) = b$. Тогда кривая $\varphi \circ g$ проходит через точку p , когда параметр принимает значение b .

По определению касательного вектора, касательный вектор к кривой $\varphi \circ g: J \rightarrow \mathbb{R}^n$ в точке p равен $d(\varphi \circ g)|_b e_1$. По теореме о производной сложной функции, получаем

$$d(\varphi \circ g)|_b e_1 = d\varphi|_{g(b)} g'(b) e_1 = g'(b) \cdot d\varphi|_a e_1.$$

Здесь мы воспользовались линейностью отображения $d\varphi|_a$. Итак, касательный вектор к кривой $\varphi \circ g$ в точке p пропорционален касательному вектору $d\varphi|_a e_1$ к кривой $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ в точке p . Если $g'(b) > 0$, эти векторы направлены одинаково, а если $g'(b) < 0$, направления этих векторов противоположны. \square

Частный случай кривой — график отображения $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$, то есть множество точек $\{(x, G(x))\} \subset \mathbb{R}^n$. Следующее предложение показывает, в каком случае кривая является графиком.

Предложение 2.1.4. *Если касательный вектор к гладкой кривой в точке s_0 имеет ненулевую проекцию на ось Ox_1 , $\varphi'_1(s_0) \neq 0$, то в окрестности точки s_0 эта кривая является графиком гладкого отображения.*

Доказательство. Действительно, по теореме об обратной функции отображение φ_1 в окрестности точки s_0 — диффеоморфизм. Значит, φ_1^{-1} задаёт замену параметра на этом участке кривой, и новая параметризация имеет вид $\tilde{\varphi}(s) = \varphi \circ \varphi_1^{-1}(s) = (s, \tilde{\varphi}_2(s), \dots, \tilde{\varphi}_n(s))$, где $\tilde{\varphi}_j = \varphi_j \circ \varphi_1^{-1}$. Поэтому кривая является графиком отображения $s \mapsto (\tilde{\varphi}_2(s), \dots, \tilde{\varphi}_n(s))$. \square

(*) Векторы и точки. Аффинные и векторные пространства

На протяжении всей книги мы будем иногда говорить об элементах \mathbb{R}^n как о точках, а иногда — как о векторах. Разница в том, что иногда естественно рассматривать \mathbb{R}^n как векторное пространство, а иногда — как *аффинное* пространство.

Неформально говоря, аффинное пространство — это векторное пространство без выделенной точки 0 . Элементы аффинного пространства — *точки* — нельзя складывать, но можно прибавлять к ним векторы из соответствующего векторного пространства.

Определение 2.1.5. *Аффинное пространство A , ассоциированное с векторным пространством V , — это множество, на котором определена операция прибавления любого элемента векторного пространства V . При этом*

- $a + (v + w) = (a + v) + w$, где $v, w \in V, a \in A$;
- для любых двух элементов $a, b \in A$ найдется единственный элемент $v \in V$, для которого $a + v = b$.

Например, на пространстве \mathbb{R}^n определена операция прибавления векторов из \mathbb{R}^n , поэтому это пространство имеет структуру аффинного пространства. Другой пример аффинного пространства — плоскость в \mathbb{R}^3 , не проходящая через 0 : на ней есть естественная операция прибавления векторов из некоторого двумерного подпространства \mathbb{R}^3 , но нет естественной операции сложения элементов.

Определение 2.1.6. *Отображение аффинных пространств $f: (A_1, V_1) \rightarrow (A_2, V_2)$ называется аффинным, если оно сохраняет структуру аффинного пространства: $f(a + v) = f(a) + l(v)$, где l — линейное отображение $l: V_1 \rightarrow V_2$.*

В частности, аффинные отображения \mathbb{R}^n — это композиции линейных отображений и сдвигов.

Упражнение 20. *Докажите, что любую точку аффинного пространства можно аффинным отображением перевести в любую другую.*

Задача 21. *Докажите, что любой треугольник на плоскости переводится аффинным отображением в любой другой треугольник.*

Аффинное пространство можно отобразить в соответствующее векторное пространство. Для этого какой-нибудь элемент $a \in A$ нужно отобразить в 0 , а каждый элемент вида $a + v$ отобразить в v . Такое отображение будет взаимно однозначным (докажите это!). Итак, если какой-нибудь элемент аффинного пространства “назвать” нулём, оно превратится в векторное пространство. Поэтому говорят, что аффинное пространство — это векторное пространство без фиксированного нуля.

1. Карусель крутится с постоянной угловой скоростью ω . На расстоянии r от центра карусели закреплена деревянная лошадка. Найдите координаты лошадки (в неподвижной системе координат) в момент времени t как функцию от t . Найдите ускорение лошадки. Как направлен вектор ускорения?

2. Пусть теперь карусель крутится с переменной угловой скоростью $\omega(t)$. Найдите положение лошадки на карусели в момент времени t , считая, что функция $\omega(t)$ и начальное положение лошадки вам известны. Верно ли, что вектор ускорения лошадки направлен так же, как в предыдущей задаче? Как направлено ускорение лошадки в тот момент, когда карусель начинает движение?
3. Докажите, что если функция аналитическая в точке a , то она аналитическая и в любой близкой точке.
4. Два множества называются диффеоморфными, если между ними можно построить диффеоморфизм. Докажите, что следующие пары множеств диффеоморфны: (а) $(0, 1)$ и \mathbb{R} ; (б) $(0, 1) \times (0, 1)$ (единичный квадрат без границы) и \mathbb{R}^2 ; $\{x^2 + y^2 < 1\}$ (единичный круг без границы) и \mathbb{R}^2 .
В частности, квадрат без границы диффеоморфен кругу без границы.
5. Докажите, что если аналитическая функция, определенная на отрезке, равна нулю на некотором подынтервале этого отрезка, то она тождественно равна нулю. Покажите, что для C^∞ -гладкой функции это не всегда так.

2.2 Одномерные дифференциальные уравнения; геометрический смысл

2.2.1 Определения

Рассмотрим плоскость \mathbb{R}^2 с координатами t, x . Переменную t мы будем называть *временем*, x — *пространственной переменной*. Пусть Ω — область на плоскости, то есть открытое связное множество. Пусть функция $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна.

Определение 2.2.1. Одномерное дифференциальное уравнение (порядка 1)⁴ — это запись вида

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x). \quad (2.1)$$

Вещественно-значная функция φ , определённая на некотором интервале (t_1, t_2) , содержащем t_0 , называется **решением** уравнения (2.1) с **начальным условием**

$$x(t_0) = x_0 \quad (2.2)$$

(или **решением задачи Коши**⁵ (2.1), (2.2)), если $\varphi(t_0) = x_0$ и

$$\dot{\varphi}(t) \equiv f(t, \varphi(t))$$

⁴ Дифференциальные уравнения порядка 1 — это уравнения, в которых встречаются только производные первого порядка.

⁵ Огюстен Луи Коши (1789 – 1857) — математик и механик, разработавший фундамент математического анализа. Создатель комплексного анализа. Известен также работами по механике сплошных сред.

2 Основные понятия теории дифференциальных уравнений

при всех $t \in (t_1, t_2)$. Мы допускаем случаи $t_1 = -\infty$ и $t_2 = +\infty$; тогда область определения решения — луч или прямая.

Решения задачи Коши мы будем считать одинаковыми, если они совпадают там, где они оба определены.

Решить дифференциальное уравнение в некоторой окрестности точки (t_0, x_0) — значит найти все его решения с начальными условиями из этой окрестности и доказать, что других решений нет.

Максимальным решением задачи Коши мы будем называть решение, определенное на наибольшем возможном интервале (конечном или бесконечном). Говоря о решениях без уточнения области определения, мы всегда будем подразумевать максимальные решения дифференциальных уравнений.

Замечание 2.2.2. Производную по переменной t (по времени) мы часто будем обозначать точкой: $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$.

Замечание 2.2.3. В большинстве случаев решение уравнения (2.1) мы будем обозначать $x(t)$, а не $\varphi(t)$, как выше. Подчеркнем, что при таком обозначении символ x имеет два разных смысла: x — переменная, координата на прямой, и $t \mapsto x(t)$ — решение дифференциального уравнения.

Упражнение 22. По определению, решения задачи Коши одинаковы, если они совпадают там, где они оба определены. Докажите, что если решения x_1 и x_2 одинаковы, а также решения x_2 и x_3 одинаковы, то решения x_1 и x_3 одинаковы.

Пример 2.2.4. Рассмотрим задачу Коши $\dot{x} = -x^2$, $x(0) = 1$. Легко проверить, что функция $x(t) = \frac{1}{t+1}$ удовлетворяет уравнению $\dot{x} = -x^2$. Но её область определения — два луча $(-\infty, -1)$ и $(-1, +\infty)$, поэтому она определяет два разных решения уравнения: $x_1(t) = \frac{1}{t+1}$, $t < -1$ и $x_2(t) = \frac{1}{t+1}$, $t > -1$. При этом только x_2 удовлетворяет начальному условию. Итак, максимальное решение этой задачи Коши — функция $x_2(t) = \frac{1}{t+1}$, $t > -1$.

Функция $x_3(t) = \frac{1}{t+1}$, $-0.5 < t < 2$, тоже является решением нашей задачи Коши; она не является максимальным решением. Мы считаем решения x_2 и x_3 одинаковыми.

Заметим, что функция $x_2(t) = \frac{1}{t+1}$, $t > -1$ решает и другие задачи Коши для того же уравнения, например, $\dot{x} = -x^2$, $x(1) = \frac{1}{2}$.

2.2.2 Поля направлений и их интегральные кривые

В этом разделе мы обсудим геометрическую интерпретацию понятия дифференциального уравнения — поле направлений.

Определение 2.2.5. **Направление** в точке плоскости (t, x) — это прямая на плоскости, проходящая через точку (t, x) . Если в каждой точке (t, x) области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ задано направление $l(t, x)$, говорят, что в области Ω задано **поле направлений**.

2.2.2. Поля направлений и их интегральные кривые

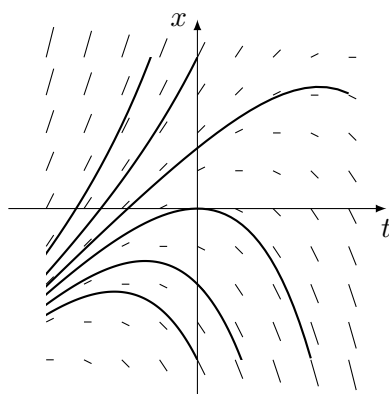


Рис. 2.1: Поле направлений, соответствующее уравнению $\dot{x} = x - t$, и его интегральные кривые

Поле направлений полностью определяется функцией $\alpha(t, x)$, значение которой равно углу наклона прямой $l(t, x)$. Величина $\alpha(t, x)$ определена с точностью до прибавления углов, кратных π . Мы всегда будем считать, что функция $\alpha(t, x)$ непрерывна по t, x как величина, определенная с точностью до прибавления π (если же рассматривать её как функцию $\alpha: \Omega \rightarrow [-\pi/2, \pi/2)$, она может иметь разрывы — скачки на π).

В дифференциальной геометрии в определение объекта всегда включают описание того, как меняется объект при отображениях и заменах координат. Для полей направлений и для дифференциальных уравнений мы рассмотрим этот вопрос в разделе 4.1.2.

Поле направлений можно изобразить на схематическом рисунке. Для этого через некоторые из точек (t, x) надо провести отрезки прямых $l(t, x)$ (см., например, рис. 4.3).

В следующем разделе мы увидим, что дифференциальные уравнения — (почти) то же самое, что поля направлений. Решениям уравнений соответствуют *интегральные кривые* поля направлений.

Неформальное определение. Интегральная кривая поля направлений — это линия, которая в каждой своей точке касается направления, заданного в этой точке.

Дадим формальное определение:

Определение 2.2.6. Интегральная кривая поля направлений — это C^1 -гладкая кривая на плоскости Otx ,

$$\tau \mapsto (\varphi(\tau), \psi(\tau)), \quad \tau \in (a, b),$$

касательный вектор к которой $(\varphi'(\tau), \psi'(\tau))$ в каждой её точке $(t, x) := (\varphi(\tau), \psi(\tau))$ содержится в прямой поля направлений в этой точке:

$$\frac{\psi'(\tau)}{\varphi'(\tau)} = \operatorname{tg} \alpha(t, x).$$

2 Основные понятия теории дифференциальных уравнений

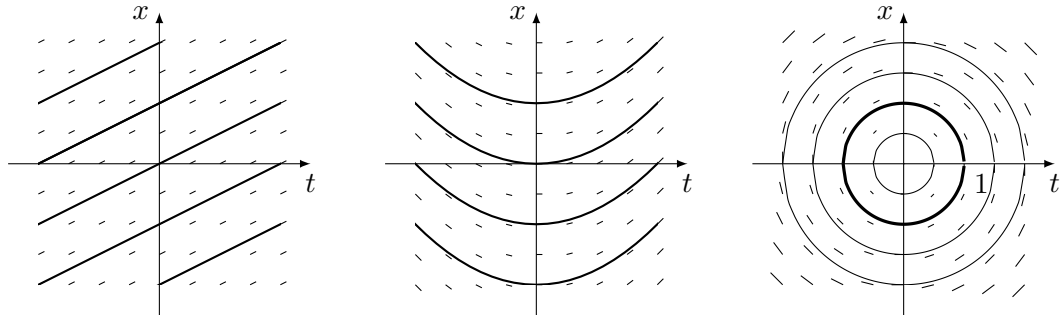


Рис. 2.2: Поля направлений и интегральные кривые уравнений $\dot{x} = 0.5$, $\dot{x} = 0.5t$, $\dot{x} = -t/x$.

Если $\varphi'(\tau) = 0$ и $\alpha(t, x) = \pm\pi/2$, мы считаем, что равенство выполняется.

Заметим, что направление касательного вектора не меняется при замене параметра на кривой (лемма 2.1.3), поэтому интегральная кривая остаётся интегральной кривой при любой параметризации.

2.2.3 Связь между дифференциальными уравнениями и полями направлений

Установим соответствие между дифференциальными уравнениями (и их решениями) с одной стороны и полями направлений (и их интегральными кривыми) с другой стороны.

Дифференциальное уравнение (2.1) задает в области Ω поле направлений, угол наклона которого в точке (t, x) равен $\alpha(t, x)$, где

$$\operatorname{tg} \alpha(t, x) = f(t, x). \quad (2.3)$$

Предложение 2.2.7. *Интегральные кривые поля направлений (2.3) — это в точности графики решений дифференциального уравнения (2.1).*

Набросок доказательства Заметим, что тангенс угла наклона касательной к графику функции равен производной функции в этой точке. Поэтому если график функции $x(t)$ касается поля направлений (2.3), то производная $\dot{x}(t)$ равна $\operatorname{tg} \alpha(t, x) = f(t, x(t))$. Обратное тоже верно.

Теперь дадим формальное доказательство.

Доказательство. Пусть $x(t)$ — решение дифференциального уравнения (2.1). Кривая $(\varphi(\tau), \psi(\tau)) := (\tau, x(\tau))$ на плоскости Otx совпадает с графиком функции $x(t)$ и является C^1 -гладкой. Действительно, функция $\psi(\tau) = x(\tau)$ непрерывно дифференцируема в силу дифференциального уравнения, и $\varphi'(\tau) \equiv 1$, так что производные компонент кривой не обращаются в ноль одновременно. Значит, $(\tau, x(\tau))$ — гладкая кривая.

2.2.3. Связь между дифференциальными уравнениями и полями направлений

Касательный вектор к кривой $(\tau, x(\tau))$ в точке $(\tau_0, x(\tau_0))$ равен $(1, \dot{x}(\tau_0))$, поэтому его направление совпадает с прямой поля направлений (2.3) в этой точке:

$$\frac{\psi'(\tau_0)}{\varphi'(\tau_0)} = \frac{\dot{x}(\tau_0)}{1} = f(\tau_0, x(\tau_0)) = \operatorname{tg} \alpha(\tau_0, x(\tau_0)).$$

Значит, график решения уравнения — интегральная кривая поля направлений.

Наоборот, пусть

$$\tau \mapsto (\varphi(\tau), \psi(\tau)) \quad (2.4)$$

— интегральная кривая поля направлений (2.3). Мы хотим доказать, что кривая (2.4) является графиком решения дифференциального уравнения (2.1). Для этого надо представить её в виде графика некоторой функции $x(t)$, то есть параметризовать её параметром t . Из равенства $\frac{\psi'(\tau)}{\varphi'(\tau)} = f(\varphi(\tau), \psi(\tau))$ следует, что $\varphi'(\tau) \neq 0$, поэтому такая параметризация существует по предложению 2.1.4 в окрестности каждой точки τ , а значит, и на всей области определения функций $\varphi(\tau), \psi(\tau)$. Итак, существует отображение $x(t)$, график которого $(t, x(t))$ отличается от кривой (2.4) только заменой параметра. При замене параметра направление касательного вектора кривой не меняется или меняется на противоположное (см. предложение 2.1.3), поэтому вектор $(1, \dot{x}(t))$, приложенный в точке $(t, x(t))$, тоже касается прямой поля направлений. Отсюда

$$\dot{x}(t) = \operatorname{tg} \alpha(t, x(t)) = f(t, x(t)).$$

поэтому функция x является решением дифференциального уравнения. \square

Итак, каждому дифференциальному уравнению мы сопоставили поле направлений с помощью формулы (2.3). Любому *невертикальному* полю направлений с помощью (2.3) можно сопоставить дифференциальное уравнение. Мы обобщим понятие дифференциального уравнения таким образом, чтобы соответствие между полями направлений и дифференциальными уравнениями было взаимно однозначным. А именно, мы введем в рассмотрение дифференциальные уравнения, правая часть которых в некоторых точках равна ∞ ; соответствующее поле направлений в этих точках будет вертикально.

Определение 2.2.8. Говоря о дифференциальном уравнении, мы, кроме уравнения

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad (2.5)$$

будем также рассматривать обратное к нему уравнение

$$\frac{dt}{dx} = \tilde{f}(t, x), \quad (2.6)$$

где

- в каждой точке области Ω определена хотя бы одна из двух функций f и \tilde{f} ;
- если в точке $(t, x) \in \Omega$ определены обе функции, то $f(t, x) = \frac{1}{\tilde{f}(t, x)}$;

2 Основные понятия теории дифференциальных уравнений

- функции f и \tilde{f} непрерывны по совокупности переменных.

Дифференциальному уравнению в смысле определения 2.2.8 соответствует поле направлений, заданное формулой

$$\operatorname{tg} \alpha(t, x) := f(t, x), \quad (2.7)$$

если функция f определена в точке (t, x) , и

$$\operatorname{ctg} \alpha(t, x) := \tilde{f}(t, x), \quad (2.8)$$

если функция \tilde{f} определена в точке (t, x) . Легко проверить, что формулы (2.7) и (2.8) не противоречат друг другу в тех точках, где определены обе функции f и \tilde{f} .

Пример 2.2.9. Уравнение $\dot{x} = -\frac{t}{x}$ (см. рис. 2.2 справа) не определено на прямой $x = 0$. Но если его рассматривать в смысле определения 2.2.8, оно будет определено во всей плоскости, кроме точки $(0, 0)$. На прямой $x = 0$ соответствующее поле направлений вертикально.

Определение 2.2.10. Решение дифференциального уравнения в смысле определения 2.2.8 — это набор функций $x_l(t), t_j(x)$, причём

- Функции $x_l(t)$ удовлетворяют уравнению $\dot{x} = f(t, x)$ на своих областях определения, а функции $t_j(x)$ — уравнению $\frac{dt}{dx} = \tilde{f}(t, x)$ на своих областях определения.
- Графики функций $x_l(t)$ и $t_j(x)$ на плоскости Otx вместе составляют одну кривую.

Строго говоря, существует такая гладкая кривая $\gamma: J \rightarrow \mathbb{R}^2$ на плоскости Otx и такой набор открытых интервалов $J_k, \bigcup J_k = J$, что каждая из перекрывающихся дуг $\gamma(J_k)$ совпадает с графиком одной из функций t_j или x_l с точностью до замены параметра.

Объединение графиков функций $x_l(t)$ и $t_j(x)$ на плоскости Otx является интегральной кривой соответствующего поля направлений. Действительно, в окрестности тех точек, где функция f определена, это следует из предложения 2.2.7. В окрестности тех точек, где функция \tilde{f} определена, это следует из предложения 2.2.7, примененного к обратному дифференциальному уравнению $\frac{dt}{dx} = \tilde{f}(t, x)$.

Упражнение 23. Для уравнения $\dot{x} = -\frac{t}{x}$ (см. рис. 2.2) выясните, в каких точках определена функция f , а в каких точках — функция \tilde{f} . Для интегральной кривой, которая выделена жирным, найдите функции x_l, t_j и укажите их области определения.

2.3 Многомерные дифференциальные уравнения; геометрический смысл

В этом параграфе мы дадим определение многомерного дифференциального уравнения и некоторых понятий, связанных с ним.

2.3.1 Определения. Поля направлений в многомерном случае

Как мы знаем, одномерное дифференциальное уравнение — то же, что поле направлений на плоскости Otx , а график решения дифференциального уравнения — интегральная кривая этого поля направлений. Поэтому естественно определить многомерное дифференциальное уравнение как поле направлений в многомерном пространстве (t, x_1, \dots, x_n) . Определение дословно переносится из одномерного случая. Везде далее $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — область, то есть открытое связное множество, в \mathbb{R}^{n+1} .

Определение 2.3.1. Направление в точке $(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}$ — это прямая в \mathbb{R}^{n+1} , проходящая через точку (t, x) .

Если в каждой точке (t, x) области $\Omega \in \mathbb{R}^{n+1}$ задано направление $l(t, x)$, говорят, что в области Ω задано **поле направлений**. Мы будем считать, что направление непрерывно зависит от точки (t, x) .

Интегральная кривая поля направлений — это C^1 -гладкая кривая

$$\varphi(\tau) = (\varphi_0(\tau), \varphi_1(\tau) \dots \varphi_n(\tau)),$$

касательный вектор к которой $(\varphi'_0(\tau), \dots, \varphi'_n(\tau))$ в каждой её точке содержится в прямой поля направлений $l(\varphi(\tau))$ в этой точке.

Можно считать, что дифференциальное уравнение — это и есть поле направлений в некоторой области пространства \mathbb{R}^{n+1} . Решение дифференциального уравнения — это вектор-функция $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, график которой $(t, x_1(t), x_2(t) \dots x_n(t))$ является интегральной кривой поля направлений.

Дадим, кроме этого геометрического определения, еще и аналитическое.

Определение 2.3.2. Многомерное дифференциальное уравнение (первого порядка) в области $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — это уравнение вида

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{2.9}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$. Функцию $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ мы всегда будем считать непрерывной. Начальные условия в многомерном случае выглядят так:

$$x(t_0) = x_0, \quad (t_0, x_0) \in \Omega. \tag{2.10}$$

Решением уравнения (2.9) с начальным условием (2.10) (решением задачи Коши (2.9), (2.10)) будем называть вектор-функцию $x: (t_1, t_2) \mapsto \mathbb{R}^n$, определённую на некотором интервале (t_1, t_2) , содержащем t_0 , и удовлетворяющую условиям $x(t_0) = x_0$ и

$$\dot{x}(t) \equiv f(t, x(t))$$

для всех $t \in (t_1, t_2)$. Как и ранее, мы допускаем $t_1 = -\infty, t_2 = +\infty$.

Задачу Коши (2.9), (2.10) можно расписать и по координатам: если $f(t, x)$ — вектор с координатами $f_i(t, x)$, а x_0 — вектор с координатами x_0^i , из одного уравнения в \mathbb{R}^n

2 Основные понятия теории дифференциальных уравнений

мы получаем систему n дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dot{x}_2 = f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots \\ \dot{x}_n = f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases} \quad (2.11)$$

с начальным условием

$$x_1(t_0) = x_0^1, x_2(t_0) = x_0^2, \dots, x_n(t_0) = x_0^n. \quad (2.12)$$

Решение такой задачи Коши – набор из n функций x_1, \dots, x_n , определенных на некотором интервале (t_1, t_2) , содержащем t_0 , удовлетворяющих начальному условию и уравнению

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \\ \dot{x}_2(t) = f_2(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \\ \dots \\ \dot{x}_n(t) = f_n(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \end{cases}$$

на всей области определения. Понятно, что функция $t \mapsto x(t)$, $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ является решением задачи Коши (2.9), (2.10) если и только если её компоненты $x_i(t)$ дают решение задачи Коши (2.11), (2.12).

Как и ранее, два решения задачи Коши мы считаем одинаковыми, если они совпадают там, где они оба определены.

Упражнение 24. Каждому дифференциальному уравнению соответствует поле направлений: направление $l(t, x)$ в точке (t, x) идет вдоль вектора $(1, f_1, \dots, f_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Докажите, что интегральная кривая такого многомерного поля направлений – это в точности график решения дифференциального уравнения.

Указание: достаточно повторить рассуждение, которое уже проведено для случая $n = 1$.

Упражнение 25. Попробуйте представить себе, как выглядит поле направлений и интегральные кривые в трёхмерном пространстве для уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = y \end{cases} \\ \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases} \\ \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - y \end{cases}$$

Указание: последние два уравнения стоит сравнить с уравнениями из раздела 1.1.2.

2.3.2 Уравнения высших порядков

Уравнения из раздела 1.1.2, которые получаются из второго закона Ньютона, не удовлетворяют определению 2.2.8, так как в них присутствует вторая производная от неизвестной функции. Мы дадим более общее определение *уравнений порядка n* , в которых присутствуют производные неизвестной функции до n -го порядка.

Определение 2.3.3. Дифференциальным уравнением порядка n называется уравнение вида

$$x^{(n)} = f(t, x, x', x^{(2)}, \dots, x^{(n-1)}), \quad (2.13)$$

где функция $f: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна. Решением такого дифференциального уравнения с начальными условиями

$$x(t_0) = x_0^1, x'(t_0) = x_0^2, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x_0^n \quad (2.14)$$

(решением задачи Коши (2.13), (2.14)) называется n раз дифференцируемая функция $x(t)$, определённая на некотором интервале (t_1, t_2) , содержащем t_0 , удовлетворяющая начальному условию (2.14) и условию

$$x^{(n)}(t) = f(t, x(t), x'(t), x^{(2)}(t), \dots, x^{(n-1)}(t)) \quad (2.15)$$

при всех $t \in (t_1, t_2)$.

На первый взгляд, уравнения порядка $n > 1$ гораздо сложнее, чем уравнения порядка 1. Но оказывается, что уравнение порядка n можно свести к n -мерному дифференциальному уравнению порядка 1 введением новых переменных.

Действительно, пусть $x(t)$ — решение уравнения (2.13). Рассмотрим функции $y_1(t) = x(t), y_2(t) = x'(t), \dots, y_n(t) = x^{(n-1)}(t)$. Они удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = y_3 \\ \dots \\ \dot{y}_n = f(t, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}) \end{cases} \quad (2.16)$$

с начальным условием

$$y_1(t_0) = x_0^1, \dots, y_n(t_0) = x_0^n. \quad (2.17)$$

И наоборот, если функции $y_1(t) \dots y_n(t)$ удовлетворяют системе уравнений (2.16) с начальными условиями (2.17), то функция $x(t) = y_1(t)$ удовлетворяет уравнению (2.13) с начальными условиями (2.14). Итак, мы перешли от уравнения порядка n к уравнению в n -мерном пространстве. Теперь понятно, почему начальные условия для уравнений высших порядков — это условия на все производные, а не только на $x(t_0)$.

Кроме уравнений высших порядков, рассматривают и *системы* уравнений высших порядков: они имеют вид (2.13), где переменная x многомерна. Системы уравнений высших порядков тоже сводятся к системам уравнений первого порядка описанным образом.

Упражнение 26. От системы уравнений

$$\begin{cases} x^{(3)} = y^{(2)} - x \\ y^{(3)} = x^{(2)}y + xy^{(2)} \end{cases}$$

перейдите к системе уравнений первого порядка.

2.3.3 Автономные уравнения и фазовые портреты

Пусть $\tilde{\Omega}$ — область в пространстве \mathbb{R}^n .

Определение 2.3.4. Автономным называется дифференциальное уравнение вида

$$\dot{x} = v(x), \text{ где } x \in \tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^n.$$

Правая часть уравнения не зависит от времени t . Вектор-функцию v мы будем считать непрерывной в области $\tilde{\Omega}$.

Область $\tilde{\Omega}$ называется **фазовым пространством** автономного уравнения, а область $\Omega = \mathbb{R} \times \tilde{\Omega}$ в пространстве \mathbb{R}^{n+1} называется **расширенным фазовым пространством** этого уравнения.

В разделе 2.2.2 мы нашли связь между решениями дифференциальных уравнений и интегральными кривыми полей направлений. В этом разделе появится еще одна удобная геометрическая конструкция для *автономных* дифференциальных уравнений — фазовый портрет. Фазовые портреты уравнений движения маятника мы уже рисовали в разделе 1.1.2.

Автономное дифференциальное уравнение в каждой точке фазового пространства задаёт вектор $v(x)$ — скорость движения в этой точке.

Определение 2.3.5. Векторное поле в области $\tilde{\Omega}$ — это отображение $v: \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$, которое в каждой точке $x \in \tilde{\Omega}$ задаёт n -мерный вектор $v(x)$.

В дифференциальной геометрии определение объекта считается законченным только тогда, когда описано, как этот объект меняется при отображениях и заменах координат. Для векторного поля и автономного уравнения мы изучим этот вопрос в разделе 4.1.2. Мы увидим, что автономное дифференциальное уравнение $\dot{x} = v(x)$ — *то же самое*, что векторное поле v : они задаются одной и той же функцией v и одинаково меняются при заменах координат. Поэтому эти два термина мы будем считать синонимами.

Оказывается, что решения дифференциального уравнения соответствуют *фазовым кривым*, или *траекториям*, векторного поля.

Определение 2.3.6. Пусть $\gamma: (t_1, t_2) \rightarrow \tilde{\Omega}$ — параметризованная кривая в фазовом пространстве $\tilde{\Omega}$, вектор скорости которой в каждой точке равен вектору векторного поля, приложенному в этой точке:

$$\dot{\gamma}(t) = v(\gamma(t)). \quad (2.18)$$

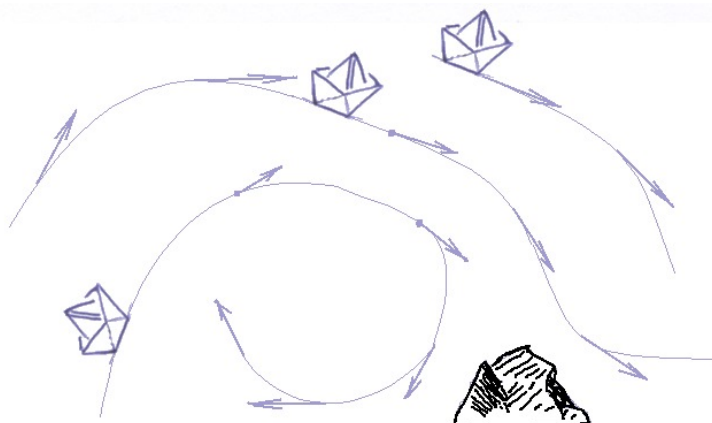


Рис. 2.3: Векторное поле скоростей течения и его фазовые кривые — траектории кораблика

Множество $\gamma((t_1, t_2)) \subset \tilde{\Omega}$ называется **фазовой кривой** векторного поля v (и соответствующего автономного дифференциального уравнения $\dot{x} = v(x)$). Фазовую кривую векторного поля также называют его **траекторией**.

Направление роста t мы будем отмечать стрелкой на фазовой кривой.

Фазовый портрет дифференциального уравнения $\dot{x} = v(x)$ — это разбиение области $\tilde{\Omega}$ на фазовые кривые.

Равенство (2.18) означает, что функция $t \mapsto \gamma(t)$ является решением автономного дифференциального уравнения $\dot{x} = v(x)$. По умолчанию, мы всегда будем рассматривать фазовые кривые, соответствующие максимальным решениям.

Ниже (теорема 2.4.12) мы увидим, что в некоторых предположениях на поле v фазовые кривые заполняют всю область определения поля и не пересекаются. Эта теорема оправдывает слово “разбиение” в определении фазового портрета.

Фазовые кривые можно представлять себе следующим образом. На поверхности ручья в каждой точке представим себе вектор, равный скорости течения в этой точке. Получится векторное поле скоростей течения; предположим, что оно не меняется со временем. Если пустить в ручей бумажный кораблик, то он поплывет по фазовой кривой векторного поля скоростей течения (см. рис. 2.3), потому что его скорость в каждой точке траектории будет равна скорости течения в этой точке ручья.

В отличие от интегральных кривых, одной и той же фазовой кривой соответствует много разных решений автономного уравнения.

Предложение 2.3.7. Если функция $x(t)$, $t \in (a, b)$, является решением автономного уравнения, то функция $t \mapsto x(t + C)$, $t \in (a - C, b - C)$ тоже является его решением. Соответствующие фазовые кривые совпадают как подмножества \mathbb{R}^n и отличаются только сдвигом параметра на кривой.

Доказательство. Если $x(t)$ — решение уравнения $\dot{x} = v(x)$, то $\dot{x}(t) = v(x(t))$, поэтому $\dot{x}(t + C) = v(x(t + C))$. Значит, функция $t \mapsto x(t + C)$ является решением нашего

2 Основные понятия теории дифференциальных уравнений

уравнения. Две функции $x(t)$, $t \in (a, b)$, и $t \mapsto x(t + C)$, $t \in (a - C, b - C)$, — это две разные параметризации одной и той же фазовой кривой. Они отличаются только сдвигом $t \mapsto t + C$. \square

Пример 2.3.8. Уравнение $\dot{x} = x$ имеет решения $x_1(t) = e^t$ и $x_2(t) = e^{t+1}$. Они соответствуют фазовой кривой $\{x > 0, x \in \mathbb{R}\}$ — лучу на вещественной прямой.

Пример 2.3.9. Уравнение колебаний пружинного маятника $\ddot{x} = -x$ сводится к системе автономных уравнений первого порядка $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -x$. Рассмотрим два решения системы: $x_1(t) = \cos t$, $y_1(t) = -\sin t$ и $x_2(t) = \sin t$, $y_2(t) = \cos t$. Эти решения отличаются сдвигом $t \mapsto t - \pi/2$. Они соответствуют одной и той же фазовой кривой — окружности $x^2 + y^2 = 1$.

При умножении правой части дифференциального уравнения $v(x) \in \mathbb{R}^n$ на произвольное число (или даже на функцию $g(x) \neq 0$, зависящую от x) фазовый портрет не изменится. Мы докажем это утверждение позже (см. следствие 3.3.3), а пока приведем простой пример:

Пример 2.3.10. У уравнений $\dot{x} = x$ и $\dot{x} = x^3$, $x \in \mathbb{R}^1$, одинаковые фазовые кривые, но разные решения.

Упражнение 27. Проверьте это.

Особую роль при исследовании автономных уравнений играют точки, в которых приложены нулевые векторы векторного поля. Они соответствуют положениям равновесия системы.

Определение 2.3.11. Точка, в которой векторное поле v обращается в ноль, называется *особой точкой* векторного поля.

Предложение 2.3.12. Точка a является особой точкой векторного поля v тогда и только тогда, когда тождественная функция $x(t) \equiv a$ является решением автономного уравнения $\dot{x} = v(x)$.

Доказательство. Действительно, тождественная функция $x(t) \equiv a$ является решением уравнения $\dot{x} = v(x)$, если и только если $\dot{x}(t) = v(x(t))$, то есть $0 = v(a)$. \square

Фазовая кривая, которая соответствует такому решению, состоит только из точки a .

Пример 2.3.13. Для уравнения колебаний пружинного маятника ($\dot{x} = y$, $\dot{y} = -x$) и пружинного маятника с вязким трением ($\dot{x} = y$, $\dot{y} = -x + \varepsilon v$) точка $(0, 0)$ — особая точка векторного поля; она соответствует положению равновесия для маятника.

Фазовый портрет пружинного маятника называется *центром*, пружинного маятника с малым трением — *фокусом*. Мы рисовали эти фазовые портреты в разделе 1.1.2; на рис. 2.4 они приведены еще раз.

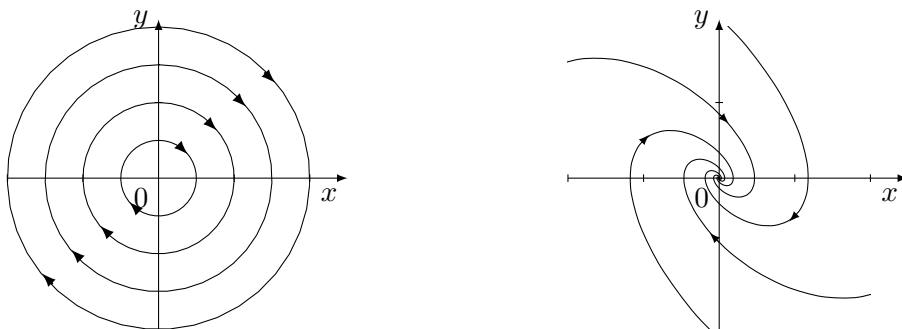


Рис. 2.4: Центр и фокус

Для автономных дифференциальных уравнений, как и для уравнений общего вида, можно рассматривать поля направлений и интегральные кривые. Интегральная кривая будет лежать в расширенном фазовом пространстве — в области $\Omega = \mathbb{R} \times \tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Из определений сразу следует такое наблюдение:

Предложение 2.3.14. Если интегральные кривые уравнения $\dot{x} = v(x)$ (кривые в области $\mathbb{R} \times \tilde{\Omega}$) спроектировать на область $\tilde{\Omega}$, получатся фазовые кривые уравнения $\dot{x} = v(x)$.

Указание: После этого наблюдения вернитесь к упражнению 25 и решите его.

2.4 Формулировки основных теорем

Доказательства теорем из этого раздела или приведены здесь, или содержатся в разделах 7.1 и 7.2.

2.4.1 Локальные теоремы о существовании, единственности, непрерывности, гладкости решений

Пусть $t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$. Рассмотрим уравнение в области $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$:

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (2.19)$$

где f — отображение $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Следующие теоремы показывают, что в некоторых предположениях задача Коши для этого уравнения “корректна”: имеет единственное решение в малой окрестности начального момента времени. Для существования решения достаточно непрерывности отображения f .

Теорема 2.4.1 (Теорема Пеано⁶: существование решения). Пусть отображение f непрерывно на Ω . Тогда для любой точки $(t_0, x_0) \in \Omega$ уравнение (2.19) с начальным

⁶ Джузеппе Пеано (1858 – 1932) — математик, один из создателей современной математической логики. Известен также его пример непрерывной кривой, которая проходит через каждую точку квадрата (кривая Пеано).

2 Основные понятия теории дифференциальных уравнений

условием $x(t_0) = x_0$ имеет решение, определенное в некоторой окрестности точки t_0 .

Эту теорему мы докажем в разделе 7.1.7 только в одномерном случае, $n = 1$.

Для единственности решения нужно наложить более сильные условия на отображение f : липшицевость по переменной x .

Определение 2.4.2. Отображение $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ называется липшицевым с константой Липшица⁷ L (или L -липшицевым), если $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ для любых x, y из его области определения.

Здесь и далее $|x|$ — длина вектора x .

Теорема 2.4.3 (Локальная теорема существования и единственности). Пусть отображение f непрерывно на Ω . Пусть для некоторой константы L при любом фиксированном значении t это отображение L -липшицево по x :

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|.$$

Тогда для любой точки $(t_0, x_0) \in \Omega$ существует окрестность $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ точки t_0 , для которой уравнение (2.19) с начальным условием $x(t_0) = x_0$ имеет решение, определенное в окрестности $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$.

Решение задачи Коши $\dot{x} = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$ в этой окрестности единственно.

Напомним, что мы считаем решения задачи Коши одинаковыми, если они совпадают там, где оба определены. Единственность решения в теореме 2.4.3 мы докажем в разделе 2.4.2, а доказательство существования отложим до раздела 7.1.

Следующая лемма показывает, что теорема существования и единственности применима к любому C^1 -гладкому отображению f в окрестности любой точки.

Лемма 2.4.4. 1. Любая C^1 -гладкая функция $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ на замкнутом шаре $B \subset \mathbb{R}^n$ — липшицева.

2. Любое C^1 -гладкое отображение $F: B \rightarrow \mathbb{R}^m$ на замкнутом шаре $B \subset \mathbb{R}^n$ — липшицево.

Доказательство. 1. Применим теорему Лагранжа⁸ о конечных приращениях к ограничению $f|_{[x,y]}$, то есть к функции одного переменного $t \mapsto f((1-t)x + ty)$ на отрезке $t \in [0, 1]$. Мы получим

$$\frac{f(y) - f(x)}{1 - 0} = \frac{d}{dt}\Big|_{t=\xi} f((1-t)x + ty) = df|_{\nu}(y - x), \quad (2.20)$$

⁷Рудольф Отто Сигизмунд Липшиц (1832 – 1903) — математик, известный своим вкладом в математический анализ, дифференциальную геометрию, теорию чисел, алгебру и классическую механику.

⁸Жозеф Луи Лагранж (1736 – 1813) — математик, астроном и механик; внес большой вклад в математический анализ, теорию дифференциальных уравнений, механику, теорию чисел, теорию вероятностей, численные методы; один из создателей вариационного исчисления.

2.4.1. Локальные теоремы о существовании, единственности, непрерывности, гладкости решений

где $\nu \in [x, y] \subset B$. Это — аналог теоремы Лагранжа для функции на многомерном шаре. Оператор df непрерывно зависит от точки; любая непрерывная функция на компакте ограничена по теореме Вейерштрасса⁹, поэтому все элементы матрицы оператора df (размера $1 \times n$) — матрицы Якоби — ограничены сверху некоторой константой M на шаре B . Из равенства (2.20) мы получаем, что

$$|f(y) - f(x)| = |df|_{\nu}(y - x)| \leq |df|_{\nu} \cdot |y - x| \leq M\sqrt{n}|y - x|,$$

то есть отображение f липшицево с константой Липшица $L = M\sqrt{n}$.

2. Пусть $F = (f_1, \dots, f_m)$, где f_i — функции $f_i: B \rightarrow \mathbb{R}$. В силу первого утверждения леммы, все эти функции L -липшицевы для некоторого L . Значит, и отображение F липшицево:

$$|F(x) - F(y)| = \sqrt{\sum_{i=1}^m (f_i(x) - f_i(y))^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^m L^2|x - y|^2} = L\sqrt{m}|x - y|.$$

□

Утверждение остается верным (и доказывается так же), если заменить шар на любое выпуклое замкнутое множество.

Упражнение 28. *Обобщите утверждение предыдущей леммы, заменив шар на любое множество K со следующим свойством: любые две точки $x, y \in K$ можно соединить ломаной, которая идет внутри множества K и длина которой превышает расстояние $|x - y|$ не более чем в фиксированное число раз.*

Но утверждение предыдущей леммы верно не на любой области, как показывает следующее упражнение.

Упражнение 29. *Проверьте, что функция, заданная в полярных координатах формулой $f(r, \varphi) = (r - 1)\varphi$ и определенная на кольце с вырезом $1 \leq r \leq 2, \varphi \in [(r - 1)^2, 2\pi - (r - 1)^2]$ (см. рис. 2.5), — не липшицева.*

Заметим также, что аналог теоремы Лагранжа о конечных приращениях неверен для отображений $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $m > 1$: вообще говоря, неверно, что $F(x) - F(y) = dF|_{\xi}(x - y)$. Например, для отображения $F(x) = (\cos x, \sin x, x)$, параметризующего винтовую линию (см. рис. 2.5), $F(2\pi) - F(0) = (0, 0, 2\pi)$, но касательный вектор к винтовой линии нигде не параллелен направлению $(0, 0, 1)$.

Следующие теоремы позволяют установить, насколько регулярно зависит решение задачи Коши от начального условия. Мы начнем с теоремы о непрерывной зависимости решения от начального условия, которая имеет следующий смысл.

⁹Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс (1815 – 1897) — математик, который первым дал строгое определение непрерывной функции и строго доказал многие теоремы, лежащие в основе современного математического анализа. Известен также своими работами по анализу и вариационному исчислению.

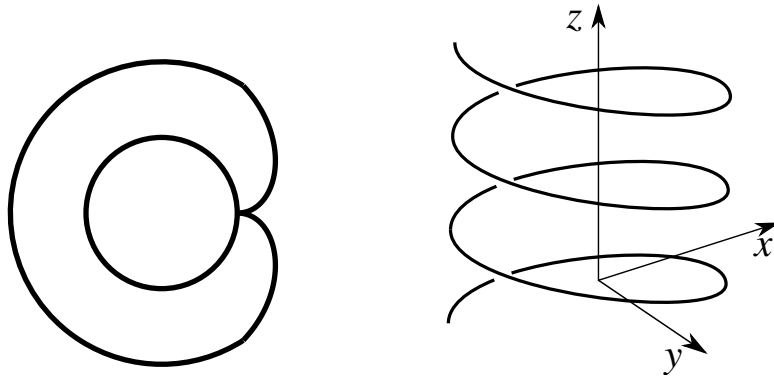


Рис. 2.5: Кольцо для задачи 29 (слева) и винтовая линия $(\cos x, \sin x, x)$ (справа).

Допустим, некоторое дифференциальное уравнение описывает какой-нибудь процесс в природе — например, изменение температуры воздуха. Что если начальное условие известно нам неточно (с точностью до 0.001 градуса Цельсия)? Насколько сильно мы можем ошибиться в прогнозе температуры?

Частичный ответ на этот вопрос дает теорема о непрерывной зависимости от начальных условий. Она утверждает, что если достаточно точно померить начальное условие, то можно добиться любой наперед заданной точности прогноза¹⁰.

Фиксируем t_0 . Для каждой точки $(t_0, x_0) \in \Omega$ пусть функция $t \mapsto \varphi(t, x_0)$ является решением уравнения (2.19) с начальным условием $x(t_0) = x_0$. В условиях теоремы 2.4.3 это определение корректно в малой окрестности t_0 , так как из теоремы 2.4.3 следует, что решение единственно.

Теорема 2.4.5 (Локальная теорема о непрерывности решения по начальным условиям). *В условиях теоремы 2.4.3 решение уравнения $\dot{x} = f(t, x)$ непрерывно зависит от начального условия и времени.*

Более точно, для любой точки $(t_0, x_0) \in \Omega$ существует её окрестность $U \subset \Omega$, такая что отображение $(t, x) \mapsto \varphi(t, x)$ определено на U и непрерывно по совокупности переменных в U .

В более сильных предположениях на правую часть решение гладко зависит от начального условия.

Теорема 2.4.6 (Теорема о гладкости решения по начальным условиям). *В условиях теоремы 2.4.3, если $f \in C^r(\Omega)$, $r \geq 2$, то решение уравнения $\dot{x} = f(t, x)$ C^{r-1} -гладко зависит от начального условия и времени.*

Более точно, для любой точки $(t_0, x_0) \in \Omega$ существует её окрестность $U \subset \Omega$, такая что отображение $(t, x) \mapsto \varphi(t, x)$ является C^{r-1} -гладким на U .

В учебнике В.И. Арнольда «Обыкновенные дифференциальные уравнения» можно найти доказательство более сильного варианта теоремы о гладкости.

¹⁰Мы считаем, что наше уравнение абсолютно точно описывает процесс, и что решение уравнения вычисляется абсолютно точно. В действительности так, конечно, не бывает.

2.4.2. Неравенство Гронуолла и теорема единственности

Теорема 2.4.7 (Усиление теоремы о гладкости). *В теореме 2.4.6 решение уравнения $\dot{x} = f(t, x)$ C^r -гладко зависит от начального условия и времени.*

2.4.2 Неравенство Гронуолла и теорема единственности

Утверждение о единственности решения задачи Коши мы докажем с помощью неравенства Гронуолла¹¹, которое позволяет оценить рост решений дифференциального уравнения и скорость расхождения решений с разными начальными условиями.

Теорема 2.4.8 (Неравенство Гронуолла). *Пусть $x(t)$ и $y(t)$ — два решения дифференциального уравнения $\dot{x} = f(t, x)$ и функция f липшицева по переменной x , $|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|$. Тогда $|x(t) - y(t)| \leq e^{Lt}|x(0) - y(0)|$ везде, где обе функции $x(t)$ и $y(t)$ определены.*

Доказательство. Мы докажем следующую оценку, которую также иногда называют неравенством Гронуолла.

Лемма 2.4.9. *Пусть вектор-функция $x: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ определена на (конечном или бесконечном) интервале I , дифференцируема и удовлетворяет неравенству $|\dot{x}(t)| \leq l|x(t)|$ для некоторого $l > 0$. Тогда $|x(t)| \leq e^{lt}|x(0)|$.*

Доказательство. Пусть сначала $t > 0$. Рассмотрим вектор-функцию $y(t) = x(t)e^{-lt}$. Покажем, что $|y(t)|$ убывает. Действительно, $\dot{y} = \dot{x}e^{-lt} - ly$, поэтому

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (y, y) = (\dot{y}, y) = (\dot{x}e^{-lt}, y) - l(y, y) \leq l|y|^2 - l|y|^2 = 0.$$

Значит, $|y(t)| \leq |y(0)|$, то есть $|x(t)| \leq e^{lt}|x(0)|$. Мы доказали неравенство Гронуолла для $t > 0$.

Теперь докажем это неравенство для отрицательных значений времени, то есть докажем, что $|x(-t)| \leq e^{lt}|x(0)|$ для $t > 0$. Заменой времени мы сведем этот случай к предыдущему. А именно, положим $z(t) = x(-t)$. Тогда

$$|\dot{z}(t)| = |-\dot{x}(-t)| \leq l|x(-t)| = l|z(t)|.$$

Поэтому к функции $z(t)$ мы можем применить неравенство Гронуолла для $t > 0$ и получить, что $|z(t)| \leq e^{lt}|z(0)|$ при $t > 0$, то есть $|x(-t)| \leq e^{lt}|x(0)|$. \square

В условиях теоремы 2.4.8, $|\dot{x}(t) - \dot{y}(t)| = |f(t, x(t)) - f(t, y(t))| \leq L|x(t) - y(t)|$, поэтому к функции $z(t) = x(t) - y(t)$ можно применить лемму. Итак, $|x(t) - y(t)| \leq e^{Lt}|x(0) - y(0)|$, что и требовалось. \square

Из неравенства Гронуолла сразу следует единственность решения в условиях теоремы 2.4.3.

¹¹Томас Хакон Гронуолл (1877 – 1932) — математик, занимавшийся анализом, аналитической теорией чисел, комплексным анализом, дифференциальной геометрией, математической физикой, атомной физикой и физической химией.

Теорема 2.4.10 (Теорема единственности). Пусть отображение f непрерывно на области $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Пусть для некоторой константы L при любом фиксированном значении t это отображение L -липшицево по x :

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|.$$

Тогда для любой точки $(t_0, x_0) \in \Omega$ решение с начальным условием (t_0, x_0) единственно (если оно существует): любые два решения такой задачи Коши совпадают там, где они оба определены.

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что $t_0 = 0$. Пусть два решения $x(t)$, $y(t)$ имеют одно и то же начальное условие: $x(0) = y(0) = x_0$. Тогда по неравенству Гронуолла $|x(t) - y(t)| \leq |x(0) - y(0)|e^{L|t|} = 0$, то есть $x(t) = y(t)$ везде, где оба решения определены. \square

Геометрические переформулировки теоремы о существовании и единственности

Теорема 2.4.11. Пусть в области $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ уравнение $\dot{x} = f(t, x)$ удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности (теорема 2.4.3). Тогда интегральные кривые этого уравнения проходят через каждую точку области Ω и не пересекаются: две интегральные кривые, проходящие через одну и ту же точку, являются дугами одной и той же интегральной кривой.

Доказательство. В силу теоремы 2.4.3, для любой точки $(t_0, x_0) \in \Omega$ существует решение с начальным условием $x(t_0) = x_0$. Его график является интегральной кривой, проходящей через точку (t_0, x_0) . Поэтому интегральные кривые проходят через любую точку области Ω .

Пусть две интегральные кривые — графики решений x_1 и x_2 — пересекаются в точке (t_0, x_0) . Тогда оба этих решения удовлетворяют начальному условию $x(t_0) = x_0$. Значит, по теореме 2.4.10, они совпадают там, где оба определены. Поэтому соответствующие интегральные кривые являются дугами одной и той же интегральной кривой. \square

Теорема 2.4.12. Пусть в области $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ автономное уравнение $\dot{x} = v(x)$ удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности. Тогда фазовые кривые проходят через каждую точку области $\tilde{\Omega}$ и не пересекаются: две фазовые кривые, проходящие через одну и ту же точку, являются дугами одной и той же фазовой кривой.

Доказательство. Фазовые кривые являются проекциями интегральных кривых в $\Omega = \mathbb{R} \times \tilde{\Omega}$ на область $\tilde{\Omega}$. Поэтому в силу предыдущей теоремы через каждую точку области $\tilde{\Omega}$ проходит фазовая кривая.

Пусть две фазовые кривые, соответствующие решениям $t \mapsto x_1(t)$ и $t \mapsto x_2(t)$ пересекаются в точке x_0 . Пусть $x_1(t_1) = x_2(t_2) = x_0$. Тогда функции $x_1(t+t_1)$ и $x_2(t+t_2)$ отличаются от решений автономного уравнения сдвигами по времени, поэтому

2.4.2. Неравенство Гроуолла и теорема единственности

тоже являются решениями. Однако обе эти функции удовлетворяют начальному условию $x(0) = x_0$. Значит, по теореме 2.4.10, функции совпадают там, где обе определены; положим $x(t) := x_1(t + t_1) = x_2(t + t_2)$.

Мы получили, что отображения $t \mapsto x_1(t)$ и $t \mapsto x_2(t)$ являются параметризациями дуг одной и той же фазовой кривой $x(t)$. □

Примеры

Приведем несколько примеров одномерных дифференциальных уравнений, чтобы проиллюстрировать теоремы, сформулированные выше.

Пример 1: формула Ньютона–Лейбница как теорема существования и единственности. Пусть f – непрерывная функция на интервале, содержащем точку t_0 . Рассмотрим дифференциальное уравнение, правая часть которого зависит только от времени:

$$\dot{x} = f(t) \tag{2.21}$$

с начальным условием $x(t_0) = x_0$ (например, см. рис. 2.6 слева).

Решение уравнения (2.21) – первообразная функции $f(t)$. Первообразную, как известно из курса математического анализа, можно найти по формуле Ньютона–Лейбница. Таким образом, верны следующие два предложения:

Предложение 2.4.13 (Существование первообразной). *Пусть f – непрерывная функция на отрезке $[t_1, t_2]$, содержащем t_0 . Тогда решение уравнения (2.21) с начальным условием $x(t_0) = x_0$ существует, определено на отрезке $[t_1, t_2]$ и даётся формулой*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau. \tag{2.22}$$

Доказательство. Утверждение следует из теоремы о дифференцировании интеграла с переменным верхним пределом. □

Предложение 2.4.14 (Единственность). *Пусть f – непрерывная функция на отрезке $[t_1, t_2]$, содержащем t_0 . Тогда решение уравнения (2.21) с начальным условием $x(t_0) = x_0$ единственно.*

Доказательство. Следует доказать, что любые два решения такой задачи Коши совпадают на общей области определения. Пусть x_1 и x_2 – два решения. Тогда производная их разности равна нулю на пересечении областей определения – на некотором интервале (τ_1, τ_2) , содержащем t_0 . Если производная гладкой функции равна нулю, то эта функция постоянна (чтобы доказать это, достаточно применить теорему Лагранжа о конечных приращениях). Значит, $x_1(t) - x_2(t) = \text{const}$ на интервале (τ_1, τ_2) . Но оба решения удовлетворяют начальному условию: $x_1(t_0) - x_2(t_0) = 0$. Отсюда $x_1(t) = x_2(t)$ на пересечении областей определения этих решений. □

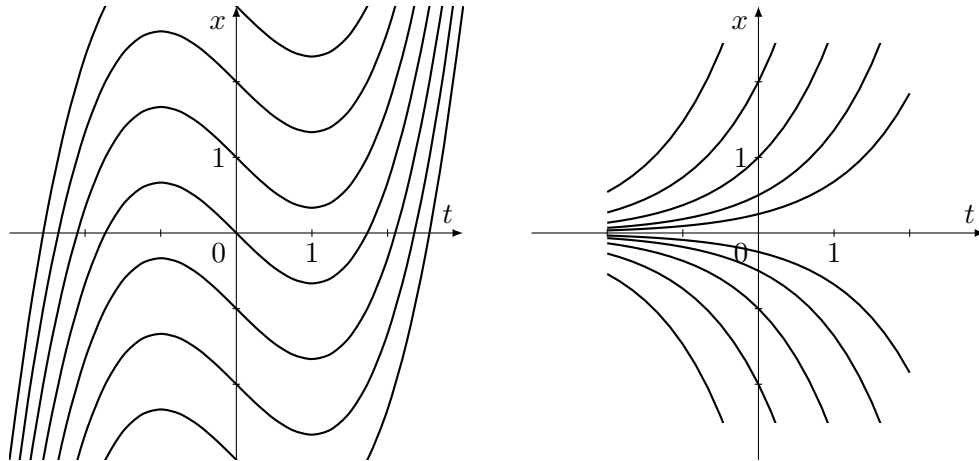


Рис. 2.6: Интегральные кривые уравнения $\dot{x} = t^2 - 1$ (слева) и $\dot{x} = x$ (справа).

Если рассматривать решения, определенные на объединении нескольких интервалов или лучей, то последнее утверждение будет неверным. Например, у функции $f(t) = 1$ на множестве $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ есть две различные первообразные: $F_1(t) = t$ и

$$F_2(t) = \begin{cases} t, & t > 0, \\ t - 1, & t < 0 \end{cases}$$

Поэтому в формальном определении решения дифференциального уравнения мы ограничились функциями, определенными на связных множествах.

Пример 2: уравнение свободного размножения

Рассмотрим уравнение $\dot{x} = x$, см. рис. 2.6 справа. Как мы уже заметили в разделе 1.1.1, его решением является любая функция вида $x(t) = ce^t$. Решением уравнения $\dot{x} = x$ с начальным условием $x(t_0) = x_0$ будет функция $x(t) = ce^t$, где $c = x_0e^{-t_0}$. Итак, решение с любым начальным условием существует.

Сейчас мы докажем, что у уравнения $\dot{x} = x$ нет других решений, кроме $x = ce^t$.

Пусть $x(t)$ — решение этого уравнения, определенное на некотором интервале (a, b) . Положим $y(t) = x(t)e^{-t}$ и докажем, что $y(t)$ — константа. Действительно,

$$\dot{y}(t) = \dot{x}(t)e^{-t} - x(t)e^{-t} = 0.$$

Последнее равенство следует из того, что $\dot{x}(t) = x(t)$. Если производная функции, определенной на интервале, равна нулю, то функция постоянна: $y(t) = c$, что и требовалось доказать.

Пример 3: уравнение без единственности решений

Пусть ведро наполнено водой, а в его днище есть небольшая дырочка. Оказывается, что в первом приближении уравнение на количество воды в ведре x имеет

2.4.2. Неравенство Гроуолла и теорема единственности

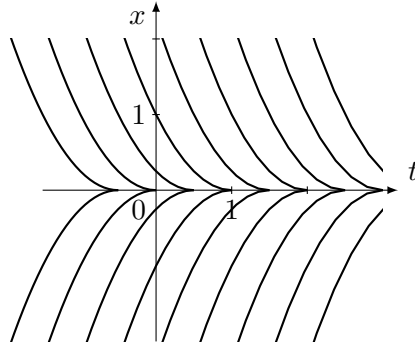


Рис. 2.7: Интегральные кривые уравнения без единственности решений

вид $\dot{x} = -k\sqrt{x}$. Для простоты положим $k = 2$. Итак, мы рассматриваем уравнение $\dot{x} = -2\sqrt{x}$ в области $x \geq 0$. Заметим, что правая часть уравнения не липшицева.

Интегральные кривые уравнения показаны на рис. 2.7.

Как легко убедиться, для любого фиксированного c функция $x(t) = (c - t)^2$ является решением уравнения при $t < c$. В момент времени $t = c$ воды в ведре не остаётся. Понятно, что после этого момента $x(t) = 0$. Окончательно, решения уравнения имеют вид

$$x(t) = \begin{cases} (c - t)^2, & t < c \\ 0, & t \geq c \end{cases} \quad (2.23)$$

Поэтому задача Коши $x(0) = 0$, $\dot{x} = -2\sqrt{x}$ имеет бесконечно много решений: как нулевое решение $x(t) \equiv 0$, так и любое решение вида (2.23) при $c < 0$ удовлетворяет начальному условию $x(0) = 0$; если в ведре нет воды, то невозможно установить, в какой момент она вытекла и была ли в ведре вообще.

Может быть, дело в том, что прямая $x = 0$ находится на границе области определения нашего уравнения? Нет; если симметрично отразить поле направлений относительно $x = 0$ (то есть рассмотреть уравнение

$$\dot{x} = \begin{cases} -2\sqrt{x}, & x \geq 0 \\ 2\sqrt{|x|}, & x < 0 \end{cases}$$

см. рис. 2.7), эффект сохранится. Причина в том, что правая часть уравнения не липшицева по x вблизи нуля.

В этом примере, если мы знаем начальное условие, то будущее поведение системы восстанавливается однозначно; разные решения задачи Коши отличаются только своим прошлым. Следующее упражнение даёт пример системы, в которой разные решения задачи Коши отличаются в будущем.

Упражнение 30. Для уравнения $\dot{x} = 2\sqrt{x}$ нарисуйте поле направлений. Покажите, что задача Коши $\dot{x} = 2\sqrt{x}$, $x(0) = 0$ имеет бесконечно много решений, причем они отличаются при $t > 0$.

Пример 4: распространение света

Задача о преломлении света в среде с переменной оптической плотностью слоёв, равной $\nu(y)$, приводит к уравнению $y' = \pm \frac{1}{k} \sqrt{\nu^2(y) - k^2}$ без свойства единственности решений. Это позволяет объяснить возникновение миражей; см. раздел 3.2.5.

2.4.3 Области определения решений и продолжимость решений

Теоремы о продолжимости

Теорема о существовании и единственности решения уравнения не запрещает ситуацию, при которой решение определено только на некотором интервале (a, b) , а за точку b не продолжается. Следующая теорема показывает, что если график решения на интервале (a, b) не уходит на бесконечность — содержится внутри какого-то компактного множества — то решение обязано продолжаться за точки a и b .

Напомним, что максимальное решение задачи Коши — это решение, определенное на максимальном по включению подмножестве \mathbb{R} .

Теорема 2.4.15 (Теорема о выходе интегральной кривой на границу компакта). *В условиях теоремы существования и единственности (теорема 2.4.3), пусть $K \subset \Omega$ — компактное множество. Пусть $(t_0, x_0) \in K$. Тогда график максимального решения $x(t)$ уравнения (2.19) с начальным условием $x(t_0) = x_0$ (интегральная кривая) выходит на границу K : для некоторого $t_1 > t_0$,*

$$(t_1, x(t_1)) \in \partial K.$$

Разумеется, аналогичное утверждение верно и для некоторого $t_2 < t_0$; чтобы свести это утверждение к теореме 2.4.15, достаточно заменить в уравнении t на $(-t)$.

Следующая теорема работает для автономных уравнений и является простым следствием предыдущей.

Теорема 2.4.16 (Теорема о выходе фазовой кривой на границу компакта). *Пусть автономное дифференциальное уравнение $\dot{x} = v(x)$, $x \in \tilde{\Omega}$, удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности (теорема 2.4.3). Пусть $K \subset \tilde{\Omega}$ — компактное подмножество фазового пространства. Тогда каждая фазовая кривая автономного уравнения либо выходит на границу компакта K , либо соответствующее максимальное решение определено для всех $t \in \mathbb{R}$.*

Доказательство. Применим предыдущую теорему для компакта $[0, C] \times K$, где C — произвольное вещественное число. Получим, что график максимального решения $(t, x(t))$ выходит на границу этого компакта. Значит, либо для некоторого t выполнено $x(t) \in \partial K$, либо $x(t)$ определено при $t = C$.

В первом случае фазовая кривая выходит на границу K . Если для всех C реализуется второй случай, то решение определено для сколь угодно большого t . Значит, оно определено для всех $t > 0$.

То же самое рассуждение работает и для $t < 0$, если в уравнении формально заменить t на $(-t)$. □

2.4.3. Области определения решений и продолжимость решений

Следующее предложение даёт простое достаточное условие того, что решение уравнения определено при любом t .

Предложение 2.4.17. Пусть отображение $f: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ определено при всех $t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$ и удовлетворяет неравенству $|f(t, x)| \leq C(1 + |x|)$. Тогда любое максимальное решение уравнения $\dot{x} = f(t, x)$ определено при любом $t \in \mathbb{R}$.

Неравенство $|f(t, x)| \leq C(1 + |x|)$ означает, что функция f равномерно ограничена по t и растёт при $x \rightarrow \infty$ не быстрее линейной функции по $|x|$.

Доказательство похоже на доказательство неравенства Гронуолла.

Доказательство. Докажем, что максимальное решение уравнения определено для любого положительного t . Чтобы свести случай отрицательного времени к случаю положительного, достаточно заменить в уравнении t на $(-t)$.

Идея заключается в том, чтобы показать, что x растёт не быстрее некоторой экспоненты e^{lt} . Как угадать, для какого l мы должны доказывать оценку? Не будем пока фиксировать l , а положим $y(t) = x(t) \cdot e^{-lt}$, $l > 0$; тогда функция y удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{y} = \dot{x} \cdot e^{-lt} - lx \cdot e^{-lt} = f(t, ye^{lt})e^{-lt} - ly. \quad (2.24)$$

Посмотрим, как меняется $|y|$; наша цель — подобрать l таким образом, чтобы $|y|$ было ограничено. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (y, y) &= (\dot{y}, y) = (f(t, ye^{lt}) \cdot e^{-lt}, y) - l(y, y) \leq C(1 + |ye^{lt}|)e^{-lt}|y| - l|y|^2 \leq \\ &\leq C|y| + C|y|^2 - l|y|^2. \end{aligned}$$

Выберем $l > C$. Тогда это выражение отрицательно при $|y| > N$ для некоторого N . Значит, $|y(t)|$ убывает при $|y(t)| \geq N$. Мы заключаем, что для любого компакта K , который содержит шар радиуса $2N$, и для любой точки $(t_0, y_0) \in K$ решение уравнения (2.24) с начальным условием $y(t_0) = y_0$ не может выйти на границу компакта K . Итак, $y(t)$ (а значит — и $x(t)$) определено при любом положительном t . \square

Уход на бесконечность за конечное время. Пример

Предыдущая теорема показывает, что если уравнение $\dot{x} = f(t, x)$ определено во всем пространстве \mathbb{R}^{n+1} , а максимальное решение определено при $t < C$ и не определено при $t > C$, то вблизи $t = C$ значения максимального решения выходят на границу любого компакта $K \subset \mathbb{R}^n$. Чтобы доказать это, достаточно применить теорему для компактов вида $[C - \varepsilon, C + \varepsilon] \times K$.

В частности, может быть выполнено $\lim_{t \rightarrow C} |x(t)| = \infty$. В таком случае говорят, что решение уходит на бесконечность за конечное время.

Например, рассмотрим автономное уравнение $\dot{x} = x^2$; заметим, что для него не выполнена оценка из предложения 2.4.17. Поле направлений и интегральные кривые

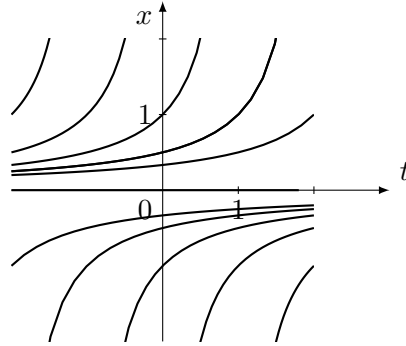


Рис. 2.8: Интегральные кривые уравнения $\dot{x} = x^2$

уравнения показаны на рис. 2.8. Как легко убедиться, функция $x(t) = \frac{1}{c-t}$ удовлетворяет этому уравнению для любого c . По определению, решение дифференциального уравнения должно быть определено на интервале, луче или прямой; поэтому такая формула задаёт два решения уравнения: $x_1(t) = \frac{1}{c-t}, t < c$ и $x_2(t) = \frac{1}{c-t}, t > c$.

Решение уравнения с начальным условием $x(0) = 1$ имеет вид $x(t) = \frac{1}{1-t}$ и определено только при $t < 1$. При $t \rightarrow 1$ это решение стремится к бесконечности. Поэтому его график выходит на границу любого компакта $K \subset \mathbb{R}$.

У уравнения есть и решение $x(t) \equiv 0$, определенное при всех t ; соответствующая фазовая кривая состоит из одной точки, поэтому она не выходит на границу компактных подмножеств \mathbb{R} .

2.4.4 Фазовые потоки. Глобальные теоремы о непрерывности и гладкости фазового потока

Фазовый поток автономного уравнения

Рассмотрим автономное уравнение $\dot{x} = v(x)$ и соответствующее векторное поле v . Если наше векторное поле — поле скоростей течения в реке, то естественно задать два вопроса:

1. **Если бросить в реку (в точку x_0) щепку, по какой траектории она поплывёт?** На этот вопрос отвечает решение дифференциального уравнения с начальным условием x_0 .
2. **Куда за минуту уплывут все точки?** На этот вопрос отвечает *отображение потока* за время 1.

Определение 2.4.18. Пусть поле v определено в области $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$. Пусть для любого начального условия $x_0 \in \tilde{\Omega}$ решение автономного уравнения $\dot{x} = v(x)$ с начальным условием $x(0) = x_0$ единственно.

Фазовый поток дифференциального уравнения за время t — это отображение $g_v^t: \tilde{\Omega} \rightarrow \tilde{\Omega}$, заданное равенством

$$g_v^t(x_0) := x(t),$$

где $x(t)$ — решение дифференциального уравнения с начальным условием $x(0) = x_0$, если такое решение существует и определено в точке t . В противном случае мы считаем, что $g_v^t(x_0)$ не определено.

Отображения потока g_v^t при разных t могут быть определены на разных подмножествах области $\tilde{\Omega}$. Отображение потока за большое время может быть нигде не определено.

Определение 2.4.19. Набор преобразований $\{g_v^t\}_{t \in \mathbb{R}}$, определенных в некоторых подмножествах области $\tilde{\Omega}$, называется **локальным фазовым потоком**. Возможно, для некоторых t отображение g_v^t определено на пустом подмножестве.

Если все отображения g_v^t определены во всей области $\tilde{\Omega}$ (то есть решение уравнения с любым начальным условием определено при любых t), говорят о **(глобальном) фазовом потоке** $\{g_v^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ автономного уравнения.

Упражнение 31. Для каждого t найдите область определения локального отображения потока за время t уравнения $\dot{x} = x^2$.

Из определения ясно, что отображение потока сохраняет особые точки уравнения: если $v(a) = 0$, то $g_v^t(a) = a$.

Пример 2.4.20. Рассмотрим уравнение

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = -y \end{cases}$$

(см. рис. 2.9). Его решения — $x = x_0 e^t$, $y = y_0 e^{-t}$. (Напомним, что решения уравнения $\dot{x} = x$ мы нашли выше. Решения уравнения $\dot{y} = -y$ можно получить аналогичным образом). Поэтому фазовый поток этого уравнения переводит точку (x_0, y_0) в точку $(x_0 e^t, y_0 e^{-t})$:

$$g_v^t(x_0, y_0) = (x_0 e^t, y_0 e^{-t}).$$

Например, фазовый поток за время 1 — отображение g_v^1 — переводит квадрат $x \in [-1, 1]$, $y \in [-1, 1]$ в прямоугольник $x \in [-e, e]$, $y \in [-e^{-1}, e^{-1}]$.

На рисунке 2.10 изображен образ квадрата $x \in [-1, 1]$, $y \in [-1, 1]$ под действием фазового потока g_v^1 для следующих дифференциальных уравнений на плоскости:

1. $\dot{x} = x, \dot{y} = -y$;
2. $\dot{x} = x, \dot{y} = y$;
3. $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$;

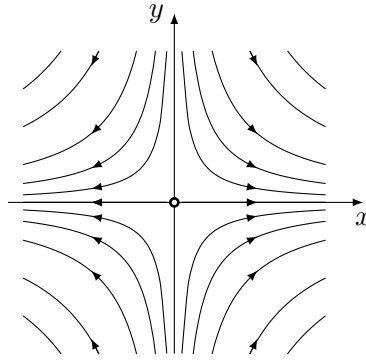


Рис. 2.9: Фазовый портрет уравнения $\dot{x} = x, \dot{y} = -y$

Для наглядности изображен также образ мордочки кота¹², нарисованной в этом квадрате, под действием g_v^1 .

Оказывается, что отображения g_v^t подчиняются формуле, напоминающей формулу для произведения экспонент $e^{t+s} = e^t e^s$:

Предложение 2.4.21. *В условиях теоремы существования и единственности (теорема 2.4.3) для любых $t, s \in \mathbb{R}$ выполнено $g_v^{t+s} = g_v^t \circ g_v^s$ везде, где обе части равенства определены.*

Доказательство. Неформальное доказательство звучит так: если точка движется сперва s минут, а потом t минут вдоль фазовой кривой, то эта точка окажется в том же месте, как если бы она двигалась из начального положения $t + s$ минут. Теперь дадим формальное доказательство.

По локальной теореме существования и единственности, локальный фазовый поток определен. Пусть $y = g_v^s(x)$. Тогда функция $\tau \mapsto x(\tau) := g_v^{\tau+s}(x)$, $\tau \in [0, t]$, является решением дифференциального уравнения $\dot{x} = v(x)$ с начальным условием $x(0) = y$. Действительно, она отличается от решения автономного уравнения $\tau \mapsto g_v^\tau(x)$ только сдвигом по времени, поэтому тоже является решением автономного уравнения. Видно, что она удовлетворяет начальному условию.

С другой стороны, решение нашего дифференциального уравнения с начальным условием $x(0) = y$ единственно по теореме 2.4.3, и мы обозначали его $\tau \mapsto g_v^\tau(y)$. Итак, $g_v^{\tau+s}(x) = g_v^\tau(y) = g_v^\tau(g_v^s(x))$, и для $\tau = t$ получаем требуемое. \square

Следующее предложение показывает, насколько гладким является фазовый поток. Напомним, что гомеоморфизм — это взаимно-однозначное отображение, непрерывное вместе с обратным, а диффеоморфизм — это взаимно-однозначное отображение, C^1 -гладкое вместе с обратным.

¹²Идея иллюстрировать геометрию диффеоморфизмов с помощью их действия на портрет кошки, по-видимому, принадлежит советскому математику Б.Н.Делоне (1890 – 1980).

2.4.4. Фазовые потоки. Глобальные теоремы о непрерывности и гладкости фазового потока

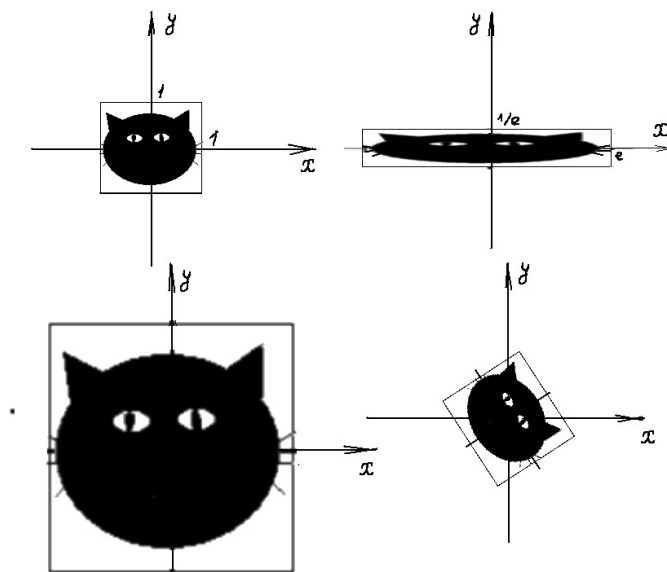


Рис. 2.10: Образ квадрата и мордочки кота под действием фазового потока уравнений (1)–(3).

Теорема 2.4.22 (Глобальная теорема о непрерывности (гладкости) фазового потока). 1. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x} = v(x), \quad x \in \tilde{\Omega},$$

удовлетворяющее условиям теоремы существования и единственности (теорема 2.4.3). Тогда для каждого $t \in \mathbb{R}$ в окрестности каждой точки своей области определения отображение $x \mapsto g_v^t(x)$ определено, непрерывно, и является гомеоморфизмом на свой образ.

2. Если $v \in C^2(\tilde{\Omega})$, то отображение потока за время t в окрестности каждой точки своей области определения является диффеоморфизмом на свой образ.

3. Если $v \in C^r(\tilde{\Omega})$, то отображение потока за время t является C^{r-1} -гладким в окрестности каждой точки области определения вместе с обратным.

Доказательство. Пусть для некоторого x_0 , T отображение g_v^T определено в точке x_0 ; значит, существует решение уравнения $x(t)$ с начальным условием x_0 , которое определено на $[0, T]$.

По теореме о непрерывной зависимости решения от начальных условий 2.4.5, отображение g_v^t будет определено и непрерывно для достаточно малого t в малой окрестности x_0 . Докажем, что оно непрерывно для $t = T$.

Идея состоит в том, чтобы представить g_v^T в виде композиции отображений потока за малые промежутки времени, а затем заключить, что это отображение непрерывно как композиция непрерывных отображений.

А именно, применим теорему о непрерывности по начальному условию для каждой точки $(t_0, x(t_0))$, $[0, T]$. В малой окрестности этой точки все отображения потока непрерывны; пусть δ выбрано достаточно малым, так что участок фазовой кривой $x(t)$, $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \cap [0, T]$ лежит в такой малой окрестности. Заметим, что δ зависит от t_0 , $\delta = \delta(t_0)$.

Из открытых интервалов $(t - \delta(t), t + \delta(t))$ выберем конечное подпокрытие $\bigcup I_k$ отрезка $[0, T]$; будем считать, что отрезки I_k занумерованы так, что отрезки с соседними номерами перекрываются. Возьмём набор точек $\tau_k \in I_k \cap I_{k+1}$, $0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_j < T$. Отображение потока g_v^T является композицией отображений $g_v^{\tau_{k+1} - \tau_k}$ в окрестностях точек $x(\tau_k)$. Каждое из этих отображений непрерывно в силу выбора интервалов I_k . Поэтому их композиция g_v^T тоже непрерывна в некоторой окрестности точки x_0 .

Итак, отображение g_v^T непрерывно в окрестности каждой точки области определения.

Для любого t отображения g_v^t и g_v^{-t} взаимно обратны: $g_v^t g_v^{-t} = g_v^{-t} g_v^t = g_v^0 = id$, поэтому все отображения g_v^t непрерывны вместе с обратными. Значит, они являются гомеоморфизмами.

Аналогичным образом, ссылаясь на теорему о гладкости решения по начальным условиям 2.4.6, можно доказать второе и третье утверждение теоремы. \square

Из этого предложения следует, что если поток векторного поля определен при всех t , то он является *фазовым потоком* в смысле следующего определения.

2.4.4. Фазовые потоки. Глобальные теоремы о непрерывности и гладкости фазового потока

Определение 2.4.23. *Фазовый поток (однопараметрическая группа диффеоморфизмов)* — это семейство диффеоморфизмов $g^t: \tilde{\Omega} \rightarrow \tilde{\Omega}$, $t \in \mathbb{R}$, для которого

- $g^{t+s} = g^t \circ g^s$ (групповое свойство)
- $g^0 = id$ (нулевому значению параметра соответствует тождественное отображение)
- Отображение $(t, x) \mapsto g^t(x)$ является C^1 -гладким по t, x во всей области определения.

Пример 2.4.24. Фазовыми потоками в смысле этого определения являются:

1. $g^t \equiv id$;
2. Сдвиги: $g^t: x \mapsto x + at$;
3. $g^t: x \mapsto e^{At}x$ для любой матрицы A (см. раздел 5.3.1).
4. Повороты: $g^t: z \mapsto e^{it}z$ — поворот комплексной плоскости на угол t .

Теорема 2.4.25. *Рассмотрим уравнение*

$$\dot{x} = v(x), \quad x \in \tilde{\Omega},$$

для которого $v \in C^2(\tilde{\Omega})$. Пусть все его решения определены на \mathbb{R} . Тогда отображения g_v^t образуют однопараметрическое семейство диффеоморфизмов.

Доказательство. Групповое свойство $g_v^{t+s}(x) = g_v^t \circ g_v^s(x)$ доказано в предложении 2.4.21.

Равенство $g_v^0 = id$ непосредственно следует из определения g_v^t .

Тот факт, что отображения g_v^t — диффеоморфизмы, проверен в теореме 2.4.6.

Наконец, отображение $t \mapsto g_v^t(x)$ гладко, так как его производная

$$\left. \frac{d}{dt} g_v^t(x) \right|_{t=t_0} = v(g_v^{t_0}(x))$$

непрерывна. □

Напоследок докажем, что любой фазовый поток является потоком какого-нибудь векторного поля, — имеет генератор.

Определение 2.4.26. *Генератор* фазового потока g^t в области $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ — это такое векторное поле v на области $\tilde{\Omega}$, что для любых x, t_0 выполнено

$$\left. \frac{dg^t(x)}{dt} \right|_{t=t_0} = v(g^{t_0}(x)) \quad (2.25)$$

Другими словами, $g^t(x)$ является решением дифференциального уравнения $\dot{x} = v(x)$ с начальным условием x , то есть $g^t = g_v^t$.

Теорема 2.4.27. *Всякий фазовый поток g^t имеет генератор.*

Доказательство. Положим $v(x) := \frac{d}{dt}g^t(x)|_{t=0}$. По формуле (2.25) для $t = 0$ генератор не может быть ничем другим, если он существует. Проверим формулу (2.25) для произвольного $t = t_0$.

$$\left. \frac{d}{dt}g^t(x) \right|_{t=t_0} = \left. \frac{d}{dt}g^{t+t_0}(x) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt}g^t \circ g^{t_0}(x) \right|_{t=0} = v(g^0(g^{t_0}(x))) = v(g^{t_0}(x)).$$

Отсюда следует, что поле v — генератор потока g^t . □

Задача 32. *Пусть мы знаем отображения потока g_v^t поля v только для целых t . Можно ли по этой информации восстановить поле v ?*

Отображения потока неавтономного уравнения

Решение неавтономного уравнения с начальным условием $x(t_0) = x_0$ можно рассматривать как функцию трёх переменных: t_0, x_0 и t . Эта функция называется фазовым потоком неавтономного уравнения, для неё вводят обозначение $g_f^{t_0,t}(x_0)$. Дадим формальное определение:

Определение 2.4.28. Рассмотрим дифференциальное уравнение в области Ω :

$$\dot{x} = f(t, x). \tag{2.26}$$

Пусть его решение с любым начальным условием $(t_0, x_0) \in \Omega$ единственно. **Отображением потока** этого уравнения называется отображение, заданное равенством

$$g_f^{t_0,t_1}(x_0) = x(t_1),$$

где $x(t)$ — решение уравнения (2.26) с начальным условием $x(t_0) = x_0$, в случае, если правая часть равенства определена. В противном случае считают, что $g_f^{t_0,t_1}(x_0)$ не определено.

Упражнение 33. *Докажите, что для автономного уравнения $\dot{x} = v(x)$ выполнено $g_v^{t_0,t_1} = g_v^{t_1-t_0}$.*

Из определения сразу следует, что для отображения потока выполнено соотношение

$$g_f^{t_0,t_2} = g_f^{t_1,t_2} \circ g_f^{t_0,t_1}$$

в тех точках, где обе части равенства определены. В случае автономных уравнений это равенство превращается в уже известное нам соотношение $g_v^{t+s} = g_v^t \circ g_v^s$.

Приведем аналог теоремы 2.4.22.

Теорема 2.4.29 (Глобальная теорема о непрерывности (гладкости) фазового потока неавтономного уравнения). *1. Рассмотрим уравнение*

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (t, x) \in \Omega,$$

для которого отображение f удовлетворяет условию теоремы существования и единственности (теоремы 2.4.3). Тогда отображения $g_f^{t_1, t_2}$ определены и непрерывны в окрестности каждой точки области определения и являются гомеоморфизмами на свой образ.

2. Если $f \in C^2(\Omega)$, то эти отображения являются диффеоморфизмами на свой образ в окрестности каждой точки области определения.

3. Если $f \in C^r(\Omega)$, то эти отображения C^{r-1} -гладкие в окрестности каждой точки области определения вместе с обратными.

Набросок доказательства. Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.4.22. Представим отображение потока в виде композиции отображений $g_f^{\tau_k, \tau_{k+1}}$ для $t_1 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_j = t_2$. Мы получим, что отображение $g_f^{t_1, t_2}$ определено и непрерывно (соотв. гладко) в малой окрестности любой точки области определения. Так как $(g_f^{t_1, t_2})^{-1} = g_f^{t_2, t_1}$, обратное отображение тоже непрерывно (гладко). □

2.5 Задачи к главе 2

Фазовые и интегральные кривые

1. Не решая уравнений $\dot{x} = f(t, x)$, $x \in \mathbb{R}^1$, нарисуйте их интегральные кривые, если

- | | |
|-------------------------|-----------------------------------|
| (a) $f(t, x) = t$; | (d) $f(t, x) = \sin(x - t)$; |
| (b) $f(t, x) = t^2$; | (e) $f(t, x) = \sin(x - t) + 2$; |
| (c) $f(t, x) = x + t$; | (f) $f(t, x) = tx$. |

2. Не решая уравнений $\dot{x} = v(x)$, $x \in \mathbb{R}^1$, нарисуйте их фазовые и интегральные кривые, если поле $v(x)$ имеет вид:

- | | | |
|--------------------|--|---|
| (a) $v(x) = 0$; | (f) $v(x) = x^2 - 1$; | (k) $v(x) = x^4 - x^2 - 0.1$; |
| (b) $v(x) = 1$; | (g) $v(x) = 1 - x^2$; | (l) $v(x) = \sin x$; |
| (c) $v(x) = x$; | (h) $v(x) = x - x^3$; | (m) $v(x) = \sin^2 x$; |
| (d) $v(x) = -x$; | (i) $v(x) = \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{2}$; | (n) $v(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{при } x \neq 0 \\ 1 & \text{при } x = 0 \end{cases}$ |
| (e) $v(x) = x^2$; | (j) $v(x) = x^2 - x^4$; | |

3. Не решая уравнений $\dot{x} = v(x)$, $x \in \mathbb{R}^2$, нарисуйте их фазовые кривые:

- | | | |
|--|---|---|
| (a) $\begin{cases} \dot{x} = 1 \\ \dot{y} = 2 \end{cases}$ | (b) $\begin{cases} \dot{x} = x + 1 \\ \dot{y} = 2y \end{cases}$ | (c) $\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = -y \end{cases}$ |
|--|---|---|

2 Основные понятия теории дифференциальных уравнений

$$(d) \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x \end{cases} \quad (e) \begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ \dot{y} = -y \end{cases} \quad (f) \begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ \dot{y} = y^2 \end{cases}$$

4. Найдите и нарисуйте кривую на плоскости, которая с радиус-вектором каждой своей точки образует один и тот же угол α . Исследуйте ответ в зависимости от α .

Теорема существования и единственности

5. Какие из следующих задач Коши для уравнения $\dot{x} = \sqrt{t-x}$ имеют решение на указанных отрезках:
- $x(0) = 1, [-0.5, 0.5]$;
 - $x(1) = 0, [0.5, 1.5]$;
 - $x(0) = 0, [-0.5, 0.5]$.

Подсказка: нарисуйте поле направлений. Где оно определено?

6. Правая часть уравнения $\dot{x} = \frac{t}{x^2}$ не определена при $x = 0$. Проверьте, что уравнение имеет решение $x(t) = \sqrt[3]{\frac{3}{2}t^2 + c}$ в смысле определения 2.2.8 при $c \neq 0$. Что происходит с решением при $c = 0$? Как это согласуется с теоремой существования? Нарисуйте поле направлений и интегральные кривые уравнения $\dot{x} = \frac{t}{x^2}$.
7. Докажите, что задача Коши $\dot{x} = \sqrt{x^2 + t^2}, x(t_0) = x_0$ при всех (t_0, x_0) имеет единственное решение в окрестности точки t_0 .

8. Докажите, что задача Коши $\dot{x} = \sqrt{|xt|}, x(t_0) = x_0$ имеет единственное решение в окрестности точки t_0 при $x_0 \neq 0$. Постройте два разных решения этого уравнения, для которых $x(0) = 0$.

Указание: подберите одно из решений в виде $x(t) = at^k$.

9. Докажите, что если фазовая кривая автономного дифференциального уравнения на плоскости $\dot{x} = v(x)$ с липшицевой правой частью — самопересекающаяся, то она соответствует периодическому решению уравнения.

Область определения решений. Неравенство Гронуолла

10. Решениями уравнения $\dot{x} = -x^2$ являются функции $x(t) = \frac{1}{c-t}$.
- Найдите (единственное) решение этого уравнения, которое не задается этой формулой. *Указание: нарисуйте интегральные кривые. По теореме существования и единственности, они должны заполнять всю плоскость. Какая часть плоскости еще не заполнена?*
 - Заметим, что $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{c-t} = 0$. Покажите, тем не менее, что решения уравнения $\dot{x} = -x^2$ с начальными условиями $x(0) > 0$ не имеют предела на бесконечности. Как ведут себя эти решения?

Указание: ср. с примером 2.2.4.

11. Оцените сверху значение решения уравнения $\dot{x} = x + \sin x$ с начальным условием $x(0) = 1$, пользуясь неравенством Гронуолла. Определено ли решение при всех t ?

12. а) Для каких значений a все решения уравнения

$$\dot{x} = (x^2 + 1)^a$$

определены на всей оси?

б) При $a = 0.5$ оцените сверху значение решения этого уравнения с начальным условием $x(0) = 1$, пользуясь оценкой из предложения 2.4.17.

13. Пусть $v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкая функция на прямой и для всех вещественных x выполнено $v(x) > 1$. Докажите, что уравнение $y'' - v(x)y = 0$ не имеет ограниченных (при всех $x \in \mathbb{R}$) ненулевых решений.

14. Верхнее решение задачи Коши $y' = f(x, y)$, $y(0) = x_0$ — это C^1 -гладкая функция $\bar{\omega}$, которая удовлетворяет неравенствам $\bar{\omega}'(x) > f(x, \bar{\omega}(x))$ и $\bar{\omega}(0) > x_0$. Аналогичным образом определяется нижнее решение $\underline{\omega}$.

Докажите теорему Чаплыгина:

Теорема. Пусть функция f непрерывна. Пусть задача Коши $y' = f(x, y)$, $y(0) = x_0$ имеет верхнее и нижнее решение $\underline{\omega}$, $\bar{\omega}$ на отрезке $[a, b]$, $a < 0 < b$.

Тогда решение задачи Коши определено на всем отрезке $[a, b]$ и заключено между $\underline{\omega}$ и $\bar{\omega}$.

Указание: как ведет себя график верхнего и нижнего решения по отношению к полю направлений?

Генераторы групп диффеоморфизмов

15. Найдите генератор однопараметрической группы:

(a) $x \mapsto x + \omega t$, $x \in \mathbb{R}^n$;

(b) $x \mapsto e^t x$, $x \in \mathbb{R}^n$;

(c) $x \mapsto \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} x$, $x \in \mathbb{R}^2$.

16. Проверьте, что $g^t: x \mapsto \frac{x}{1-tx}$ есть однопараметрическая группа диффеоморфизмов проективной прямой. Найдите её генератор.

17. Нарисуйте образ мордочки кота под действием потока векторного поля v за время 1, где (a) $v(x, y) = (1, 2)$; (b) $v(x, y) = (x, 2y)$; (c) $v(x, y) = (x, 0)$; (d) $v(x, y) = (x, 1)$; (e) $v(x, y) = (x + 5, -y)$.

18. Пусть g_1^t и g_2^t — однопараметрические группы диффеоморфизмов с генераторами v_1, v_2 . При каком условии диффеоморфизмы $g^t = g_1^t \circ g_2^t$ тоже образуют однопараметрическую группу? Какой у нее генератор?

3 Элементарные методы решения дифференциальных уравнений

3.1 Приближенные методы решения дифференциальных уравнений

В этом параграфе мы рассмотрим три метода приближенного решения дифференциальных уравнений. Приближенные методы дают последовательности функций, сходящиеся к решению, то есть позволяют найти решение с любой заданной точностью. Они применимы к большинству дифференциальных уравнений.

Во многих случаях можно найти и точное решение дифференциального уравнения, дав ответ в виде формулы. Методы точного решения мы рассмотрим позже. Но для решений большинства дифференциальных уравнений не существует формул (даже содержащих интегралы).

3.1.1 Метод разложения в ряд

Метод разложения в ряд позволяет находить аналитические решения аналитических дифференциальных уравнений в малой окрестности нуля как суммы степенных рядов.

Рассмотрим уравнение $\dot{x} = f(t, x)$ с начальным условием вида $x(0) = x_0$. Будем считать, что функция f аналитическая в области определения. Мы будем искать решение в виде

$$x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n + \dots \quad (3.1)$$

Значение $x(0) = a_0$ нам известно. Разложим правую часть уравнения $f(t, x)$ в ряд Тейлора по t, x , после чего подставим сумму (3.1) вместо $x(t)$ в обе части равенства $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$. Так как степенные ряды по t в левой и правой части равенства должны совпадать, их коэффициенты при одинаковых степенях t должны быть одинаковы. Отсюда мы получаем условия на коэффициенты a_k .

Применим метод разложения в ряд к уравнению $\dot{x} = x$ с начальным условием $x(0) = c$. Пусть

$$x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n + \dots$$

В силу начального условия, $a_0 = c$. Ряд для производной $\dot{x}(t)$ имеет вид

$$\dot{x}(t) = a_1 + 2a_2 t + \dots + n a_n t^{n-1} + \dots$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях t в равенстве $\dot{x} = x$, получаем

$$\begin{aligned} a_1 &= a_0 = c, \\ a_2 &= \frac{1}{2} a_1 = \frac{1}{2} c, \\ &\dots \\ a_n &= \frac{1}{n} a_{n-1} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} a_{n-2} = \dots = \frac{1}{n!} c. \end{aligned}$$

Итак,

$$x(t) = c \left(1 + t + \frac{t^2}{2} + \dots + \frac{t^n}{n!} + \dots \right).$$

Как известно из курса математического анализа, такой ряд сходится на всей числовой оси к функции ce^t .

Из наших выкладок следует, что функция ce^t для любого значения c является решением уравнения $\dot{x} = x$ (что, конечно, легко проверить и непосредственно). Действительно, мы только что проверили, что ряд Тейлора функции ce^t в нуле совпадает с рядом Тейлора функции $(ce^t)'$ в нуле. Так как эти ряды сходятся к функциям ce^t и $(ce^t)'$, мы получили, что $(ce^t)' = ce^t$.

3.1.2 Метод Эйлера

Метод Эйлера¹ позволяет построить кусочно-линейную непрерывную функцию $\varphi(t)$, сколь угодно близкую к точному решению дифференциального уравнения $\dot{x} = f(t, x)$. Мы будем рассматривать одномерные дифференциальные уравнения, но в многомерном случае и формулы, и рассуждения аналогичны.

Будем искать приближенное решение уравнения $\dot{x} = f(t, x)$ с начальным условием $x(0) = x_0$. Фиксируем шаг $\delta > 0$ и рассмотрим точки $t_k = \delta k$. Мы найдем приближенные значения функции x в точках t_k : $x_k \approx x(t_k)$. Значение $x(0) = x_0$ известно точно.

Другими словами, мы найдем кусочно-линейную непрерывную функцию φ , линейную на отрезках $[t_k, t_{k+1}]$ и близкую к точному решению; мы имеем $\varphi(0) = x_0$ и обозначаем $\varphi(t_k) = x_k$.

Мы знаем, что для точного решения $\dot{x}(t_k) = f(t_k, x(t_k))$; с другой стороны, $\dot{x}(t_k) \approx \frac{x(t_{k+1}) - x(t_k)}{\delta}$. Итак,

$$\frac{x(t_{k+1}) - x(t_k)}{\delta} \approx f(t_k, x(t_k)).$$

Будем считать, что для нашего приближенного решения φ последнее равенство превращается в равенство. Говорят, что мы дискретизируем задачу, заменяя производную конечной разностью. Итак,

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{\delta} = f(t_k, x_k) \quad (3.2)$$

или

$$x_{k+1} = x_k + \delta f(t_k, x_k). \quad (3.3)$$

Это и есть формула метода Эйлера. С её помощью, зная начальное условие x_0 , можно последовательно найти x_1, x_2, \dots , а тем самым — кусочно-линейную функцию φ . Ломаная, которая является графиком функции φ , называется *ломаной Эйлера*, см. рис. 3.1 слева.

Так как производная $\varphi'(t_k + 0)$ равна левой части равенства (3.2), это равенство можно также записать в виде

$$\varphi'(t_k + 0) = f(t_k, \varphi(t_k)),$$

¹Леонард Эйлер (1707 – 1783) внес значительный вклад в большое количество областей математики и механики, в том числе в математический анализ, теорию чисел, вариационное исчисление, комплексный анализ, дифференциальную геометрию, численные методы, теорию специальных функций, оптику, классическую и звездную механику.

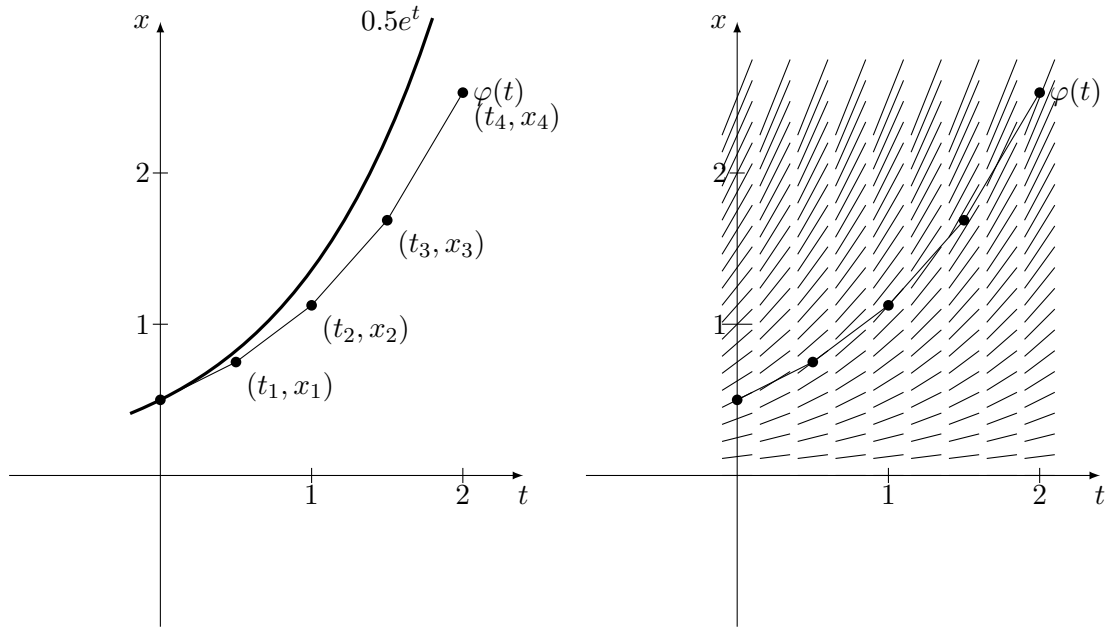


Рис. 3.1: Слева: график решения уравнения $\dot{x} = x$ с начальным условием $x(0) = 0.5$ и приближение Эйлера с шагом 0.5 на отрезке $[0, 2]$. Справа: ломаная Эйлера и поле направлений для того же уравнения.

то есть кусочно-линейная функция φ удовлетворяет дифференциальному уравнению в левом конце каждого отрезка $[t_k, t_{k+1}]$. С геометрической точки зрения это означает, что наклон каждого звена ломаной Эйлера совпадает с наклоном поля направлений в левом конце этого звена ломаной (см. рис. 3.1 справа).

Можно надеяться, что чем мельче будут отрезки, тем ближе будет функция φ к точному решению уравнения.

В качестве примера рассмотрим уравнение $\dot{x} = x$ с начальным условием $x(0) = c$. Пусть шаг равен $\delta = 1/n$. Получаем:

$$\begin{aligned} x_0 &= c \\ x_1 &= x_0 + \frac{1}{n} \cdot x_0 = c \left(1 + \frac{1}{n}\right), \\ x_2 &= x_1 + \frac{1}{n} \cdot x_1 = c \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2, \\ &\dots \end{aligned}$$

Лемма 3.1.1. Пусть φ — приближение Эйлера для уравнения $\dot{x} = x$ с шагом $1/n$, и $x_k = \varphi(t_k)$. Тогда значение $\varphi(t_k) = x_k$ равно $c \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k$.

Доказательство. Это утверждение мы докажем индукцией по k .

3.1.3. (*) Скорость сходимости метода Эйлера и неравенство Гронуолла

Базу ($k = 1$) мы уже проверили.

Шаг индукции: По формуле (3.3),

$$x_k = x_{k-1} + \frac{1}{n}x_{k-1} = x_{k-1} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = c \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{k-1} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = c \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k. \quad (3.4)$$

□

Итак, значение функции φ в точке $T = k/n$ равно $\varphi(k/n) = c \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k = c \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nT}$. В курсе математического анализа было доказано, что при $n \rightarrow \infty$ эта величина стремится к ce^T — значению решения нашего дифференциального уравнения в точке T .

Задача 34. Пусть φ_n — приближение к решению задачи Коши $\dot{x} = x$, $x(0) = c$, с шагом $\delta = 1/n$. Докажите, что при $n \rightarrow \infty$ последовательность функций φ_n стремится к функции ce^t

- поточечно на всей прямой;
- равномерно на любом отрезке $[0, T]$.

Последовательность приближений Эйлера сходится к точному решению для очень широкого класса дифференциальных уравнений. Метод Эйлера используется при доказательстве теоремы Пеано (теорема 2.4.1) о существовании решений дифференциальных уравнений с непрерывной правой частью, см. раздел 7.1.7.

Отметим, что в тех случаях, когда решение дифференциального уравнения не единственно, метод Эйлера может давать только какое-то одно из решений.

Задача 35. Проверьте, что $x(t) = \left(\frac{t}{3}\right)^3$ является решением задачи Коши $\dot{x} = x^{\frac{2}{3}}$, $x(0) = 0$, но метод Эйлера даёт другое решение задачи Коши.

3.1.3 (*) Скорость сходимости метода Эйлера и неравенство Гронуолла

В этом разделе мы оценим расстояние между приближенным решением φ и точным решением x задачи Коши $\dot{x} = f(t, x)$, $x(0) = x_0$, и выясним, с какой скоростью φ сходится к x при $\delta \rightarrow 0$.

Пусть мы решаем дифференциальное уравнение методом Эйлера с шагом δ на отрезке $[0, T]$, где $T = n\delta$. Пусть $t_k = k\delta$ и значения x_k вычислены по формуле (4.1.6), то есть (t_k, x_k) — вершины ломаной Эйлера.

Пусть φ_k — точное решение уравнения с начальным условием $\varphi_k(t_k) = x_k$. На рис. 3.2 показаны графики функций φ_k : это интегральные кривые, которые проходят через вершины ломаной Эйлера.

Тогда $\varphi'_k(t_k) = f(t_k, x_k)$, то есть в точке (t_k, x_k) график функции φ_k касается следующего звена ломаной Эйлера. Поэтому очередное звено ломаной Эйлера довольно точно приближает график функции φ_k , $\varphi_k(t_{k+1}) \approx x_{k+1}$, даже если оно уже плохо приближает график точного решения $x(t)$.

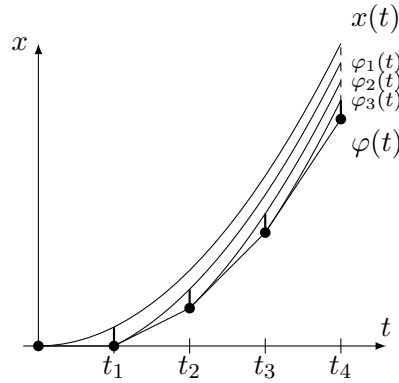


Рис. 3.2: Пошаговая погрешность и глобальная погрешность в методе Эйлера. Длины вертикальных отрезков равны пошаговым погрешностям e_k ; длина отрезка, отмеченного пунктиром, равна глобальной погрешности.

Определение 3.1.2. Пошаговая погрешность на $k + 1$ -м шаге метода Эйлера — это

$$e_{k+1} := |\varphi_k(t_{k+1}) - x_{k+1}|.$$

Сначала мы оценим пошаговую погрешность, а потом — глобальную погрешность $|x(t) - \varphi(t)|$. Пошаговая погрешность пропорциональна квадрату шага δ :

Лемма 3.1.3. Пусть функция f является L -липшицевой по совокупности переменных и $|f| \leq m$ на всей плоскости. Тогда $e_k \leq L\delta^2\sqrt{m^2 + 1}$.

Доказательство. Мы проведем доказательство для первого шага метода Эйлера; доказательство для любого другого шага аналогично. Так как точное решение — непрерывно дифференцируемая функция, то для него выполнено

$$x(\delta) = x(0) + \delta x'(\nu) = x_0 + \delta f(\nu, x(\nu)),$$

где $\nu \in [0, \delta]$. Для первого звена ломаной Эйлера имеем

$$x_1 = x_0 + \delta f(0, x_0).$$

Оценим разность этих выражений, учитывая, что функция f липшицева:

$$e_1 = |x(\delta) - x_1| = \delta |f(\nu, x(\nu)) - f(0, x_0)| \leq \delta L \operatorname{dist}((0, x_0), (\nu, x(\nu))).$$

Осталось заметить, что в силу неравенства $|x'(t)| = |f(t, x(t))| \leq m$ точка $x(\nu)$ находится на расстоянии не более $m\delta$ от точки $x(0) = x_0$, поэтому $\operatorname{dist}((0, x_0), (\nu, x(\nu))) \leq \delta\sqrt{m^2 + 1}$.

□

3.1.3. (*) Скорость сходимости метода Эйлера и неравенство Гронуолла

Может показаться, что пошаговые погрешности надо сложить, чтобы получить общую погрешность за N шагов метода Эйлера. Но это не так. Нарисуем графики всех функций φ_k , то есть выпустим интегральные кривые из всех вершины ломаной Эйлера (см. рис. 3.2); пошаговая погрешность — это расстояние между соседними интегральными кривыми $(t, \varphi_k(t))$ и $(t, \varphi_{k+1}(t))$ у самого их начала, а глобальная погрешность — это сумма расстояний между этими кривыми в правом конце отрезка $[0, T]$. Так как с течением времени интегральные кривые могут расходиться, глобальная погрешность может оказаться гораздо больше, чем сумма пошаговых погрешностей. Следующее упражнение показывает, как это происходит.

Упражнение 36. Для уравнения $\dot{x} = x$ с начальным условием $x(0) = 1$ и шага $\delta = 0.01$ вычислите, чему равна разность $\varphi_1(t) - x(t)$ при $t = 20$.

Ответ: порядка 24000.

Расхождение интегральных кривых мы оценим с помощью неравенства Гронуолла.

Лемма 3.1.4. В предположениях предыдущей леммы погрешность метода Эйлера в точке $T = n\delta$ оценивается следующим образом:

$$|x(T) - \varphi(T)| \leq \delta e^{LT} \sqrt{m^2 + 1}.$$

Доказательство. Запишем погрешность следующим образом (см. рис. 3.2):

$$x(T) - \varphi(T) = (x(T) - \varphi_1(T)) + (\varphi_1(T) - \varphi_2(T)) + \dots + (\varphi_{n-1}(T) - \varphi(T)).$$

Так как $x(t) = \varphi_0(t)$ и $\varphi(T) = \varphi_n(T)$, все слагаемые имеют вид $\varphi_{k-1}(T) - \varphi_k(T)$. Каждая из таких разностей — это разность между точными решениями уравнения, начальные условия которых $\varphi_{k-1}(t_k)$ и $\varphi_k(t_k) = x_k$ отличаются на e_k . Эту разность можно оценить с помощью неравенства Гронуолла:

$$|\varphi_{k-1}(T) - \varphi_k(T)| \leq |\varphi_{k-1}(t_k) - \varphi_k(t_k)| e^{L(T-t_k)} = e_k \cdot e^{L(T-k\delta)}.$$

Осталось сложить эти неравенства, воспользовавшись формулой для суммы геометрической прогрессии и оценкой на e_k из предыдущей леммы. Разности $(T - k\delta)$ принимают значения $0, \delta, \dots, (n-1)\delta$, так как $T = n\delta$. Значит, сумма экспонент равна

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{Lk\delta} = \frac{e^{Ln\delta} - 1}{e^{L\delta} - 1} = \frac{e^{LT} - 1}{e^{L\delta} - 1},$$

откуда

$$|x(T) - \varphi(T)| \leq \delta^2 L \sqrt{m^2 + 1} \frac{e^{LT} - 1}{e^{L\delta} - 1}.$$

Так как $e^{L\delta} > 1 + L\delta$, получаем $|x(T) - \varphi(T)| \leq \delta e^{LT} \sqrt{m^2 + 1}$.

□

Итак, погрешность в методе Эйлера имеет порядок $O(\delta)$, где δ — длина шага, но коэффициент при δ быстро растет с ростом T . Если величина LT намного больше единицы, погрешность может быть очень велика.

Заметим, что при вычислениях на компьютере на каждом шаге происходит еще и ошибка округления, так как каждое из чисел x_k округляется до конечного количества знаков после запятой. Значит, x_k равно $x_{k-1} + \delta f(t, x_{k-1})$ только с некоторой точностью ε . Если учесть ошибку округления, величины e_k увеличатся на ε и оценка примет вид $|x(T) - \varphi(T)| \leq \delta e^{LT} \sqrt{m^2 + 1} + \varepsilon e^{LT} / (L\delta)$. Поэтому нельзя выбирать и слишком маленький шаг: второе слагаемое в этой оценке растет с уменьшением δ .

3.1.4 Метод Пикара

Метод Пикара², как и метод Эйлера, позволяет построить последовательность функций $x_n(t)$, сходящуюся к решению уравнения $\dot{x} = f(t, x)$ с начальным условием $x(0) = x_0$. Но в методе Пикара эти функции получаются гладкими.

В качестве первого приближения возьмем тождественную функцию: $x_0(t) \equiv x_0$. Построим последовательность функций следующим образом. Пусть уже построено приближение x_k . Вообще говоря, $\dot{x}_k(t) \neq f(t, x_k(t))$, так как x_k — не точное решение уравнения. В качестве следующего приближения мы возьмем функцию x_{k+1} , удовлетворяющую начальному условию, для которой $\dot{x}_{k+1}(t) = f(t, x_k(t))$. Значит,

$$x_{k+1}(t) = x_0 + \int_0^t f(\tau, x_k(\tau)) d\tau. \quad (3.5)$$

Допустим, ряд из функций x_n равномерно сходится на некотором отрезке к некоторой функции $t \mapsto x(t)$. Тогда в равенстве (3.5) мы можем перейти к пределу под знаком интеграла и получить

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(\tau, x(\tau)) d\tau. \quad (3.6)$$

Отсюда следует, что $x(0) = x_0$ и $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$, по формуле дифференцирования интеграла с переменным верхним пределом. Значит, $x(t)$ является решением уравнения $\dot{x} = f(t, x)$ с начальным условием $x(0) = x_0$.

Сходимость ряда x_n в общем случае мы докажем в главе 7.1; это — центральная часть доказательства теоремы 2.4.3 о существовании и единственности решения дифференциального уравнения.

²Шарль Эмиль Пикар (1856 – 1941) — математик, известен своими работами в комплексном анализе, теории дифференциальных уравнений, алгебре

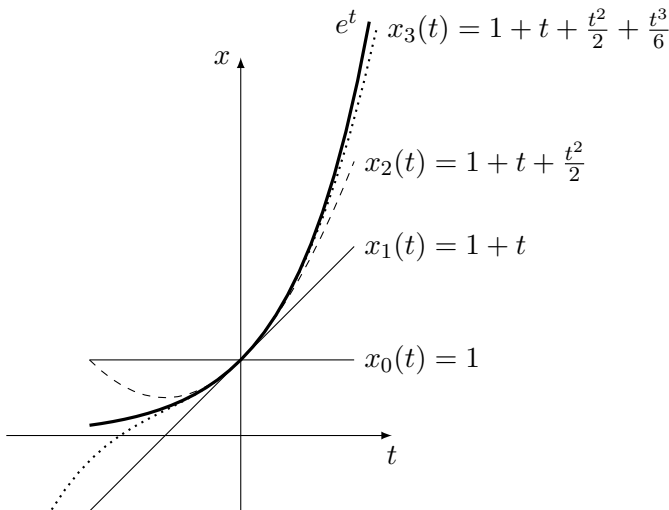


Рис. 3.3: Четыре первых приближения Пикара для решения уравнения $\dot{x} = x$ с начальным условием $x(0) = 1$.

Вычислим функции x_n для уравнения $\dot{x} = x$ с начальным условием $x(0) = c$:

$$\begin{aligned} x_0(t) &\equiv c; \\ x_1(t) &= c + \int_0^t c d\tau = c(1 + t); \\ x_2(t) &= c + \int_0^t c(1 + \tau) d\tau = c\left(1 + t + \frac{t^2}{2}\right); \\ x_3(t) &= c + \int_0^t c\left(1 + \tau + \frac{\tau^2}{2}\right) d\tau = c\left(1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6}\right); \\ &\dots \end{aligned}$$

Упражнение 37. Докажите по индукции, что

$$x_n(t) = c \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!}.$$

Видно, что функции $x_n(t)$ — частные суммы ряда для экспоненты

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots,$$

умноженные на c . Значит, они равномерно сходятся к функции ce^t на любом конечном отрезке, поэтому функция ce^t — решение уравнения $\dot{x} = x$.

3.2 Автономные дифференциальные уравнения на прямой

В этом параграфе мы научимся решать автономные дифференциальные уравнения на прямой $\dot{x} = v(x)$ и изучим вопрос о единственности их решений.

3.2.1 Качественное исследование автономных уравнений на прямой

Рассмотрим автономное уравнение на прямой вида $\dot{x} = v(x)$.

Пусть функция $v \in C^1(\mathbb{R})$ имеет конечное число нулей в точках $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. Поле направлений уравнения $\dot{x} = v(x)$ горизонтально на прямых $x = a_i$, так как $v(a_i) = 0$. Поэтому прямые $\{x = a_i\}$ являются интегральными кривыми. По теореме существования и единственности (точнее, по теореме 2.4.11), через каждую точку плоскости проходит одна и только одна интегральная кривая уравнения; значит, другие интегральные кривые не могут пересекать прямые $\{x = a_i\}$.

Поэтому каждая интегральная кривая целиком содержится в одной из полос $\Pi_i := \{a_i < x < a_{i+1}\} \subset \mathbb{R}^2$ или в одной из полуплоскостей $\Pi_0 := \{x < a_0\}$, $\Pi_n = \{x > a_n\}$.

Заметим, что между своими нулями функция v не меняет знак. Пусть при $x \in (a_i, a_{i+1})$ функция v положительна. Тогда в полосе Π_i прямые поля направлений имеют положительный угол наклона, и любая интегральная кривая в Π_i идет вверх. Другими словами, $\dot{x}(t) = v(x(t)) > 0$ для любого решения, заключенного между a_i и a_{i+1} , поэтому любое такое решение монотонно возрастает.

Вблизи границ полосы функция v мала, поэтому поле направлений почти горизонтально. Угол наклона интегральной кривой уменьшается. Так как она не может пересечь границу полосы Π_i , она уходит на бесконечность вдоль прямой $\{x = a_{i+1}\}$ справа и вдоль прямой $\{x = a_i\}$ слева:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) &= a_{i+1} \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) &= a_i \end{aligned} \tag{3.7}$$

Строгое обоснование (3.7) содержится в теореме 3.2.4, см. ниже.

Если между нулями a_i и a_{i+1} функция отрицательна, аналогичные рассуждения показывают, что интегральная кривая идет вниз, и $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = a_i$, $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = a_{i+1}$.

Напомним, что если функция $x(t)$ является решением автономного уравнения, то функция $x(t + C)$ тоже является его решением (предложение 2.3.7). Другими словами, интегральные кривые автономного уравнения при сдвиге $t \mapsto t + C$ переходят в интегральные кривые. Значит, разные интегральные кривые в полосе Π_i отличаются сдвигами вдоль оси Ot .

Такого описания достаточно, чтобы нарисовать эскиз интегральных кривых в каждой полосе Π_i и в полуплоскостях Π_0, Π_n (см. рис. 3.4). Фазовые кривые — это проекции интегральных кривых на ось Ox : точки a_i , интервалы (a_i, a_{i+1}) и два луча $(-\infty, a_1)$, $(a_n, +\infty)$. На фазовых кривых мы ставим стрелки, показывающие направление роста t .

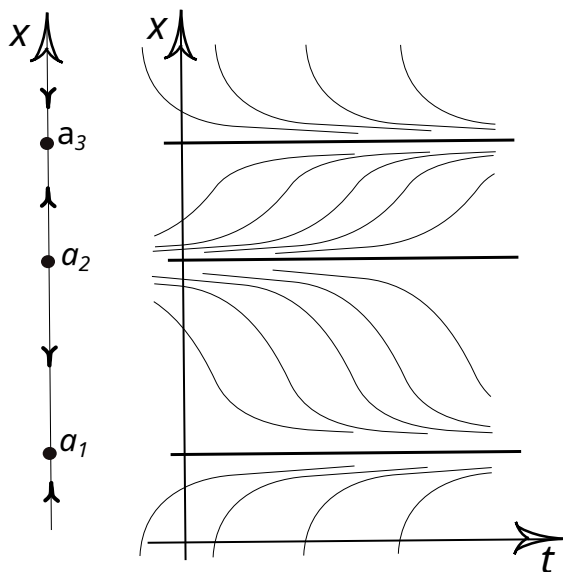


Рис. 3.4: Набросок интегральных и фазовых кривых для уравнения $\dot{x} = v(x)$, где функция v имеет три нуля и меняет знак в каждом из них.

По фазовому портрету видно, что в окрестности положения равновесия решения ведут себя одним из трех возможных способов.

- Если обе ближайшие стрелки направлены к точке a_i , то решения с начальными условиями, близкими к a_i , стремятся к a_i в будущем, при $t \rightarrow +\infty$. Такое положение равновесия называется **устойчивым (притягивающим, аттрактором)**.
- Если обе ближайшие стрелки направлены от точки a_i , то решения с начальными условиями, близкими к a_i , стремятся к a_i в прошлом, при $t \rightarrow -\infty$. В будущем они уходят от a_i . Такое положение равновесия называется **неустойчивым (отталкивающим, репеллером)**.
- Если одна из двух ближайших стрелок направлена к a_i , а другая — от неё, то одни решения с начальными условиями, близкими к a_i , стремятся к a_i в прошлом, а другие — в будущем. Такое положение равновесия называется **полуустойчивым (параболическим)**.

3.2.2 Метод разделения переменных для автономных уравнений

В этом разделе мы решим задачу Коши для автономного уравнения:

$$\dot{x} = v(x); \quad (3.8)$$

$$x(t_0) = x_0. \quad (3.9)$$

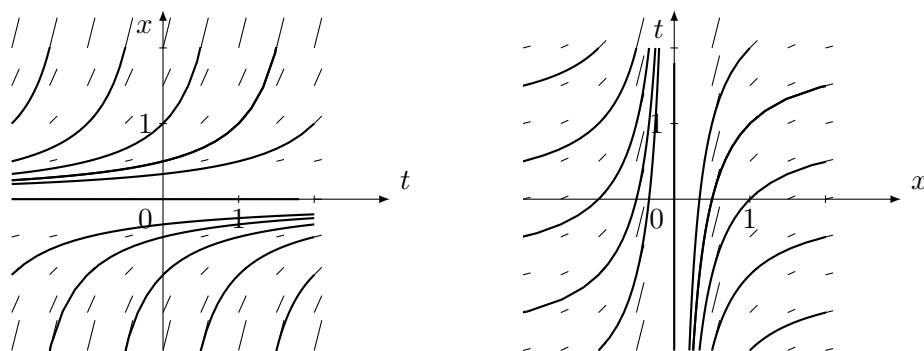


Рис. 3.5: Поле направлений и интегральные кривые уравнения $\frac{\partial x}{\partial t} = x^2$ и уравнения $\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{1}{x^2}$.

Предложение 3.2.1. Пусть функция v определена на некотором интервале и непрерывна. Решение уравнения $\dot{x} = v(x)$ с начальным условием $x(t_0) = x_0$, где $v(x_0) \neq 0$, существует и единственно в некоторой окрестности точки t_0 ; оно задаётся формулой

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dy}{v(y)} \quad (3.10)$$

Формула (3.10) означает, что решение уравнения приходит из точки $a = x_0$ в точку $b = x(t)$ за время $\int_a^b \frac{dy}{v(y)}$.

Формулу (3.10) можно получить, если формально разделить обе части уравнения $\frac{dx}{dt} = v(x)$ на $v(x)$, умножить на dt и проинтегрировать обе части равенства. Однако, чтобы придать смысл этой выкладке, нужна теория дифференциальных форм (см. раздел 4.2), поэтому мы приведем другое доказательство предложения 3.2.1.

Ключевая идея доказательства следующая. Напомним, что при сдвигах $t \mapsto t + C$ интегральные кривые автономного уравнения переходят в интегральные кривые. В разделе 2.4.2 мы рассматривали уравнения вида $\dot{x} = g(t)$; их интегральные кривые переходят в интегральные кривые при сдвигах $x \mapsto x + C$. Мы решим уравнение $\dot{x} = v(x)$, “поменяв местами” x и t и тем самым сведя задачу к предыдущей.

В следующем упражнении нужно догадаться, как правильно менять местами x и t .

Упражнение 38. Как нужно изменить дифференциальное уравнение $\dot{x} = v(x)$, чтобы его поле направлений и интегральные кривые отразились относительно прямой $x = t$?

Указание: см. рис. 3.5-3.7 и подписи к ним.

Доказательство предложения 3.2.1. Сначала мы предположим, что решение задачи Коши существует; докажем единственность решения и формулу для него.

Пусть $x(t)$ — решение нашего дифференциального уравнения, $x(t_0) = x_0$. Из соображений непрерывности $v(x(t)) \neq 0$ в некоторой окрестности точки t_0 , поэтому

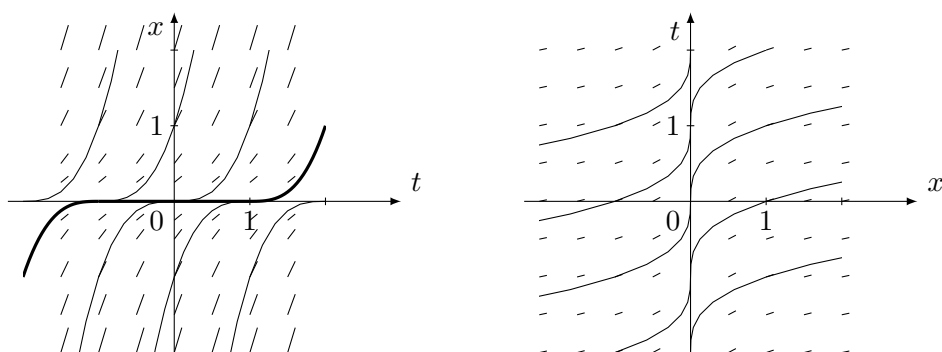


Рис. 3.6: Поле направлений и интегральные кривые уравнения $\frac{\partial x}{\partial t} = 3x^{2/3}$ и уравнения $\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{1}{3x^{2/3}}$.

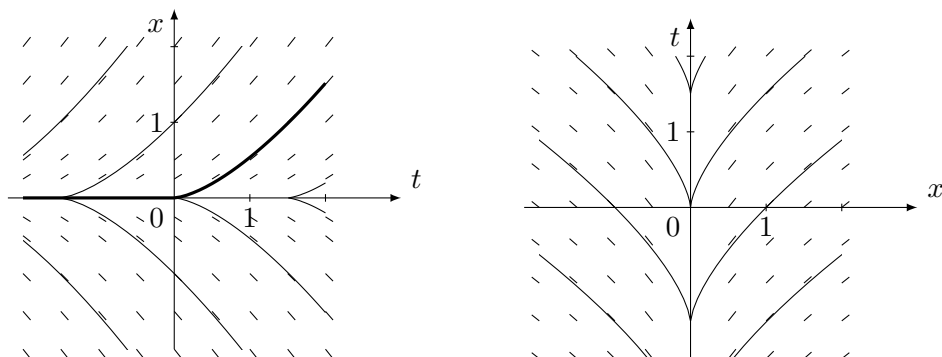


Рис. 3.7: Поле направлений и интегральные кривые уравнения $\frac{\partial x}{\partial t} = x^{1/3}$ (одна из интегральных кривых выделена на рисунке жирным) и уравнения $\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{1}{x^{1/3}}$.

3 Элементарные методы решения дифференциальных уравнений

$\dot{x}(t) \neq 0$ в этой окрестности. По теореме об обратной функции, примененной к функции $t \mapsto x(t)$, обратная функция $x \mapsto t(x)$ существует в некоторой окрестности точки x_0 , и её производная равна

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{v(x)}. \quad (3.11)$$

Все решения этого уравнения — первообразные для функции $\frac{1}{v(x)}$ — получаются интегрированием по переменной x :

$$t(x) - t_0 = \int_{x_0}^x \frac{dy}{v(y)}. \quad (3.12)$$

Отсюда следует формула для функции $x(t)$, обратной к $t(x)$, а также единственность решения задачи Коши.

Теперь докажем, что решение задачи Коши существует. Определим функцию $t(x)$ формулой (3.12); имеем $t(x_0) = t_0$ и $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{v(x)}$. Функция $t(x)$ монотонна в некоторой окрестности точки x_0 , так как функция $v(x)$ там знакопостоянна. Значит, существует обратная функция $x(t)$, $x(t_0) = x_0$, и по формуле для производной обратной функции, $\dot{x}(t) = v(x(t))$. Итак, функция $x(t)$ является решением задачи Коши. \square

Когда мы переходим от функции $x(t)$ к обратной функции, мы отражаем график функции относительно прямой $x = t$. При таком отражении поле направлений уравнения $\dot{x} = v(x)$ превращается в поле направлений уравнения $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{v(x)}$, которое можно решить интегрированием, что мы и проделали.

Предложение неприменимо, если $v(x_0) = 0$. В этом случае решение тоже существует: постоянная функция $x(t) \equiv x_0$ удовлетворяет уравнению. Остается исследовать вопрос о единственности решения с начальным условием x_0 , где $v(x_0) = 0$.

3.2.3 Критерий единственности решений автономных уравнений на прямой

В разделе 2.4.2 мы рассматривали уравнение $\dot{x} = -2\sqrt{x}$, которое описывает вытекание воды из ведра. Напомним, что решение уравнения с начальным условием $x(0) = 0$ не единственно: если в ведре нет воды, то невозможно установить, когда вода вытекла и была ли она в ведре.

Такой эффект возникает из-за того, что вода из ведра вытекает за конечное время. В общем случае единственность решения нарушается, если решение приходит в положение равновесия за конечное время.

Пусть x_0 — положение равновесия автономного уравнения $\dot{x} = v(x)$, то есть $v(x_0) = 0$. По аналогии с формулой из предложения 3.2.1, мы покажем, что время, за которое решение уравнения $\dot{x} = v(x)$ переходит из точки $x_0 \pm \varepsilon$ в точку x_0 , равно несобственному интегралу $\int_{x_0 \pm \varepsilon}^{x_0} \frac{1}{v(y)} dy$. Если интеграл сходится — время прихода конечно, и единственность решения нарушается. Если интеграл расходится, решение не может прийти в положение равновесия за конечное время и единственность сохраняется.

3.2.3. Критерий единственности решений

Предложение 3.2.2. Пусть функция v непрерывна и имеет изолированный ноль в точке x_0 : $v(x_0) = 0$, и $v(x) \neq 0$ на проколотой окрестности $(x_0 - \varepsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + \varepsilon)$ точки x_0 .

1. Пусть оба интеграла

$$\int_{x_0 - \varepsilon}^{x_0} \frac{dy}{v(y)}, \quad \int_{x_0}^{x_0 + \varepsilon} \frac{dy}{v(y)} \quad (3.13)$$

расходятся. Тогда функция $x(t) \equiv x_0$ есть единственное решение задачи Коши $\dot{x} = v(x), x(t_0) = x_0$.

2. Пусть хотя бы один из интегралов (3.13) сходится. Тогда эта задача Коши имеет бесконечно много решений.

Доказательство. 1. Предположим, что задача Коши $\dot{x} = v(x), x(t_0) = x_0$ имеет другое решение $x(t)$, которое отличается от тождественного, скажем, при $t > t_0$. Найдем момент времени t_1 , когда это решение уходит из точки x_0 . Строго говоря, рассмотрим множество $U = \{t > t_0 \mid x(t) \neq x_0\}$; оно открыто и непусто, поэтому представляется в виде объединения непересекающихся интервалов. Пусть t_1 — левый конец одного из этих интервалов. По построению, $x(t_1) = x_0$ и $x(t) \neq x_0$ в правой полукрестности t_1 .

Возьмем точку t_2 справа от t_1 . Если интервал $(t_1, t_2]$ достаточно маленький, то значения функции x на этом интервале близки к $x(t_1) = x_0$, но не равны x_0 в силу выбора t_1 ; поэтому функция $v(x(t))$ не обращается в ноль на интервале $(t_1, t_2]$. По тем же соображениям, что и в предложении 3.2.1, для любого $t_1 + \delta < t_2$ выполнено

$$t_2 - (t_1 + \delta) = \int_{x(t_1 + \delta)}^{x(t_2)} \frac{dy}{v(y)} \quad (3.14)$$

Левая часть равенства (3.14) имеет конечный предел при $\delta \rightarrow 0$. Значит, и правая часть имеет предел. Поэтому интеграл $\int_{x(t_1)}^{x(t_2)} \frac{dy}{v(y)}$ сходится. При этом $x(t_1) = x_0$ и $x(t_2) \neq x_0$ в силу выбора интервала $(t_1, t_2]$, что противоречит расходимости интегралов (3.13).

2. Пусть один из интегралов — например, $\int_{x_0}^{x_0 + \varepsilon} \frac{dy}{v(y)}$ — сходится; докажем, что решение задачи Коши не единственно.

Функция v знакопостоянна (например, положительна) на $(x_0, x_0 + \varepsilon)$. Определим функцию $t(x)$ формулой

$$t(x) = \int_{x_0}^x \frac{dy}{v(y)}$$

при $x \in [x_0, x_0 + \varepsilon]$. Эта функция монотонно возрастает, и её можно доопределить нулем в точке x_0 по непрерывности, так как интеграл сходится.

Значит, функция $t(x)$ имеет обратную $x: [0, T] \rightarrow [x_0, x_0 + \varepsilon]$. Доопределим её, положив $x(t) = x_0, t < 0$ (в частном случае уравнения $\dot{x} = x^{1/3}$ соответствующая интегральная кривая выделена на рисунке 3.7 жирным).

Соображения из предложения 3.2.1 показывают, что функция $x(t)$ является решением уравнения при $t > 0$. При $t < 0$ функция тождественно равна x_0 , поэтому

3 Элементарные методы решения дифференциальных уравнений

тоже удовлетворяет уравнению. Осталось проверить, что она гладкая в нуле. Её производная слева равна нулю; покажем, что производная справа тоже равна нулю.

Действительно, производная справа функции $t(x)$ при $x = 0$ равна

$$\lim_{\delta \rightarrow 0+} \frac{1}{\delta} \int_{x_0}^{x_0+\delta} \frac{dy}{v(y)} d\tau \geq \lim_{\delta \rightarrow 0+} \min_{y \in (x_0, x_0+\delta]} \frac{1}{v(y)} = +\infty$$

Последнее равенство следует из того, что $\lim_{y \rightarrow x_0} \frac{1}{v(y)} = +\infty$. Значит, производная обратной функции $x(t)$ равна нулю.

Итак, непостоянная функция $x(t)$ является решением задачи Коши $\dot{x} = v(x)$, $x(t_0) = x_0$. Заметим, что любая функция вида $x(t - C)$, $C > 0$, тоже будет решением этой задачи Коши, поэтому у задачи Коши бесконечно много решений. \square

Пример 3.2.3. Рассмотрим уравнения $\dot{x} = x^2$, $\dot{x} = 3x^{2/3}$, $\dot{x} = x^{1/3}$ (см. рис. 3.5 – 3.7). Для первого из них интегралы $\int_0^{\pm\epsilon} \frac{dy}{v(y)} = \int_0^{\pm\epsilon} \frac{1}{y^2} dy$ расходятся; интегральные кривые асимптотически приближаются к прямой $x = 0$, но не доходят до неё. Для второго и третьего уравнения соответствующие интегралы $\int_0^{\pm\epsilon} \frac{1}{3y^{2/3}} dy$, $\int_0^{\pm\epsilon} \frac{dy}{y^{1/3}}$, сходятся. Интегральные кривые входят в прямую $x = 0$.

Для уравнения $\dot{x} = x^{1/3}$ любое решение, кроме $x(t) \equiv 0$, имеет вид или

$$x(t) = \begin{cases} \left(\frac{2}{3}(t - t_0)\right)^{3/2}, & t > t_0, \\ 0, & t \leq t_0. \end{cases}$$

или

$$x(t) = \begin{cases} -\left(\frac{2}{3}(t - t_0)\right)^{3/2}, & t > t_0. \\ 0, & t \leq t_0. \end{cases}$$

Одна из интегральных кривых этого уравнения выделена жирным на рис. 3.7.

Для уравнения $\dot{x} = 3x^{2/3}$ общее решение еще сложнее: кроме решений вида

$$x(t) = \begin{cases} (t - t_0)^3, & t > t_0; \\ 0, & t \leq t_0. \end{cases}$$

которые фигурировали в доказательстве предложения 3.2.2, и похожих решений вида

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t \geq t_0; \\ (t - t_0)^3, & t < t_0. \end{cases},$$

возможны еще решения вида

$$x(t) = \begin{cases} (t - t_1)^3, & t < t_1; \\ 0, & t_1 \leq t \leq t_2; \\ (t - t_2)^3, & t > t_2. \end{cases}$$

Одна такая интегральная кривая выделена жирным на рис. 3.6.

3.2.3. Критерий единственности решений

В предположениях расходимости интегралов можно полностью описать, как ведет себя решение автономного уравнения на прямой с (конечным или бесконечным) дискретным множеством особых точек a_k . Следующая теорема оправдывает наши рисунки в разделе 3.2.1.

Теорема 3.2.4. Пусть y непрерывной функции v конечное или бесконечное дискретное множество нулей $\{a_i\}$ и все интегралы

$$\int_{a_k-\varepsilon}^{a_k} \frac{dy}{v(y)}, \int_{a_k}^{a_k+\varepsilon} \frac{dy}{v(y)} \quad (3.15)$$

расходятся.

Тогда задача Коши (3.8), (3.9) имеет единственное решение для любого $x_0 \in \mathbb{R}$. Более того:

1. Пусть a_k, a_{k+1} — два соседних нуля функции v . Пусть $a_k < x_0 < a_{k+1}$. Тогда решение $x(t)$ с начальным условием $x(t_0) = x_0$ определено при всех t .

Если $v > 0$ на интервале (a_k, a_{k+1}) , то функция $x(t)$ монотонно возрастает и $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = a_k, \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = a_{k+1}$. Если $v < 0$ на интервале (a_k, a_{k+1}) , то функция $x(t)$ монотонно убывает и $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = a_{k+1}, \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = a_k$.

2. Пусть $v > 0$ на луче $(a_n, +\infty)$ и $x_0 > a_n$. Тогда решение $x(t)$ с начальным условием $x(t_0) = x_0$ монотонно возрастает и $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = a_n$.

2а. Если интеграл $\int_C^{+\infty} \frac{dy}{v(y)}$, $C > a_n$, расходится, то решение определено при всех t и $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = +\infty$.

2б. Если этот интеграл сходится, то решение определено на некотором луче $t < c$ и $\lim_{t \rightarrow c-} x(t) = +\infty$.

Мы предоставляем читателю сформулировать аналоги п.2 для $v < 0$ и для луча $(-\infty, a_1)$. Заметим, что если множество нулей функции v неограниченно снизу и сверху, то все решения ведут себя как в п. 1.

Доказательство. Единственность решения с любым начальным условием следует из предложений 3.2.1 и 3.2.2.

1. Пусть $v > 0$ на интервале (a_k, a_{k+1}) . Вновь определим

$$t(x) := t_0 + \int_{x_0}^x \frac{dy}{v(y)}.$$

Эта функция определена при $x \in (a_k, a_{k+1})$, монотонно возрастает и стремится к $\pm\infty$, когда $x \rightarrow a_k, x \rightarrow a_{k+1}$, так как интегралы расходятся. Значит, обратная функция $x(t)$ определена на всей вещественной оси, монотонно возрастает, и вполне $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = a_k, \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = a_{k+1}$. Как мы многократно проверяли, функция $x(t)$ является решением уравнения.

Доказательство для случая $v < 0$ аналогично.

2. Если интеграл расходится, доказательство в точности повторяет доказательство предыдущего шага, но a_{k+1} нужно заменить на $+\infty$. Если интеграл сходится, функция $t(x)$ определена на всей вещественной оси и принимает значения в $(-\infty, c)$, где

3 Элементарные методы решения дифференциальных уравнений

$c = t_0 + \int_{x_0}^{+\infty} \frac{dy}{v(y)}$. Значит, обратная функция $x(t)$ определена только на луче $(-\infty, c)$. Остальные рассуждения аналогичны. \square

Заметим, что интеграл $\int_C^{\infty} \frac{dy}{v(y)}$ при $C > a_n$ — это время, за которое решение из точки C уходит на бесконечность.

3.2.4 Достаточное условие для единственности решений автономного дифференциального уравнения на прямой

В предыдущем разделе мы научились решать автономные дифференциальные уравнения на прямой с непрерывной правой частью. Выяснилось, что решение существует при любом начальном условии, но не всегда единственно.

В этом разделе мы укажем простое *достаточное* условие единственности решения. Достаточным условием, как и в общей теореме существования и единственности, оказывается *липшицевость* правой части дифференциального уравнения. Напомним определение липшицевой функции в одномерном случае.

Определение 3.2.5. Функция $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ называется **липшицевой**, если существует такая константа L , что для любых точек $x_1, x_2 \in (a, b)$ выполнено неравенство

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L |x_1 - x_2|.$$

Константа L называется константой Липшица функции f .

Понятно (докажите это!), что липшицева функция всегда непрерывна. Обратное утверждение неверно:

Упражнение 39. Приведите пример непрерывной, но не липшицевой функции; гладкой, но не липшицевой функции.

Но гладкая функция с *ограниченной производной* обязательно является липшицевой.

Предложение 3.2.6. Функция $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ класса C^1 , имеющая ограниченную производную:

$$|f'(x)| \leq L \text{ при всех } x \in (a, b),$$

липшицева с константой L .

Аналог предложения 3.2.6 для функций на многомерном шаре доказан в разделе 2.4.1, но мы приведем простое непосредственное доказательство этого простого факта.

Доказательство. Первое доказательство

По формуле Ньютона-Лейбница,

$$f(x_2) - f(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f'(y) dy.$$

3.2.4. Достаточное условие единственности решений

Оценим интеграл в правой части равенства:

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq \int_{x_1}^{x_2} |f'(y)| dy \leq L|x_2 - x_1|.$$

Второе доказательство

По теореме Лагранжа о конечных приращениях,

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=\xi},$$

где $\xi \in (x_1, x_2)$. Отсюда сразу следует требуемое утверждение. \square

Оказывается, что из липшицевости функции f следует расходимость интегралов (3.13), а значит, единственность решения задачи Коши (3.8), (4.1.6).

Предложение 3.2.7. Пусть v — липшицева функция, заданная на отрезке $[x_0, x_0 + \varepsilon]$. Пусть $v(x_0) = 0$, и функция $v(x)$ не обращается в 0 в других точках отрезка. Тогда интеграл

$$\int_{x_0}^{x_0 + \varepsilon} \frac{dy}{v(y)}$$

расходится.

Аналогичное утверждение верно для функций на отрезке вида $[x_0 - \varepsilon, x_0]$.

Доказательство. Оценим значение функции v в точке $y \in [x_0, x_0 + \varepsilon]$. Пусть её константа Липшица равна L . Тогда

$$|v(y) - v(x_0)| \leq L|y - x_0|,$$

откуда

$$|v(y)| \leq L|y - x_0|.$$

Функция v знакопостоянна на интервале $(x_0, x_0 + \varepsilon)$. Не ограничивая общности, будем считать, что она положительна. Тогда

$$\frac{1}{v(y)} \geq \frac{1}{L(y - x_0)},$$

а интеграл от функции $\frac{1}{L(y-x_0)}$ по отрезку $[x_0, x_0 + \varepsilon]$ расходится. Значит, расходится и интеграл

$$\int_{x_0}^{x_0 + \varepsilon} \frac{dy}{v(y)}.$$

\square

Объединяя эти результаты, мы получаем следующее достаточное условие существования и единственности решения задачи Коши (3.8), (4.1.6).

Предложение 3.2.8. Пусть функция v липшицева на интервале (a, b) , содержащем точку x_0 . Тогда задача Коши (3.8), (3.9) имеет единственное решение.

Это предложение «почти» следует из предложений 3.2.2 и 3.2.7. Но мы, не ссылаясь на предложение 3.2.2, повторим доказательство еще раз.

Упражнение 40. Почему недостаточно просто применить предложения 3.2.2 и 3.2.7?

Доказательство. Если $v(x_0) \neq 0$, единственность решения следует из предложения 3.2.1.

Пусть $v(x_0) = 0$. Понятно, что уравнению удовлетворяет функция, тождественно равная x_0 . Предположим, что существует другое решение $x(t)$, $x(t_0) = x_0$. Мы не можем напрямую применить предложение 3.2.2, так как функция $v(x(t))$ может обращаться в 0 в бесконечном количестве точек вблизи точки t_0 . Поступим следующим образом.

Существует такой момент времени τ , что $v(x(\tau)) \neq 0$. Иначе наше решение совпадает с $x(t) \equiv x_0$: действительно, тогда $v(x(t)) \equiv 0$, и в силу уравнения $\dot{x} = v(x(t)) \equiv 0$, поэтому $x(t)$ постоянно; в силу начального условия, $x(t) \equiv x_0$.

Итак, $v(x(\tau)) \neq 0$. В частности, $x(\tau) \neq x_0$. Будем считать, что $\tau > t_0$. Найдем наибольшее значение $t \in [t_0, \tau]$, для которого $v(x(t)) = 0$. Обозначим его τ_0 .

На отрезке $[\tau_0, \tau]$ применим те же соображения, что и при доказательстве предложения 3.2.2. А именно, на отрезке $[\tau_0 + \delta, \tau]$ функция $v(x(t))$ не обращается в 0. Поэтому

$$\tau - (\tau_0 + \delta) = \int_{x(\tau_0 + \delta)}^{x(\tau)} \frac{dy}{v(y)}.$$

При $\delta \rightarrow 0$, в силу предложения 3.2.7, правая часть стремится к бесконечности. Так как левая часть не стремится к бесконечности, мы получаем противоречие.

Итак, решение $x(t) \equiv x_0$ единственно. \square

Из этой теоремы, воспользовавшись предложениями 3.2.6 и 3.2.7, мы получаем следствие:

Следствие 3.2.9. Пусть v — C^1 -гладкое поле, множество нулей которого неограниченно с обеих сторон. Тогда все решения уравнения $\dot{x} = v(x)$ определены при любом t , и каждое решение уравнения заключено между какими-то соседними нулями поля v .

В частности, определен глобальный фазовый поток для уравнения $\dot{x} = v(x)$ на прямой.

Упражнение 41. Пользуясь теоремой 3.2.4, сформулируйте аналогичный критерий существования глобального фазового потока на прямой для уравнения $\dot{x} = v(x)$, если множество нулей функции v ограничено с обеих сторон.

3.2.5 Ход лучей (*)

Геометрическая оптика изучает распространение света без учета его волновых свойств. В геометрической оптике постулируется, что в однородной среде луч света распространяется по прямой. Если же луч света переходит из одной среды в другую (например, из воздуха в воду), то он меняет направление движения — преломляется.

В этом параграфе мы решим следующую задачу:

Нарисовать ход лучей на плоскости с показателем преломления, зависящим только от вертикальной координаты.

Закон Снеллиуса

Для начала рассмотрим классический случай преломления света на границе двух сред. Закон преломления света определяется *показателями преломления* двух сред.

Закон Снеллиуса.³

При переходе из одной однородной среды в другую луч света преломляется так, что произведение показателя преломления в первой среде на синус угла падения равно произведению показателя преломления во второй среде на синус угла преломления.

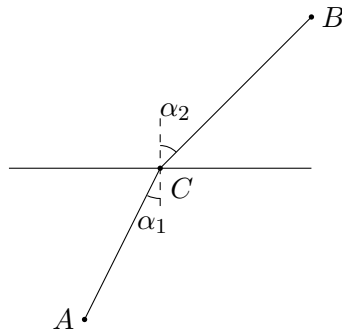


Рис. 3.8: Угол падения α_1 и угол преломления α_2 .

Пусть плоскость разделена горизонтальной прямой на две полуплоскости. Пусть в нижней полуплоскости показатель преломления равен ν_1 , а в верхней — ν_2 ; пусть луч идет снизу вверх. Напомним, что угол падения и угол преломления — углы между лучом и нормалью к границе раздела двух сред (см. рис. 3.8); эта нормаль в нашем случае вертикальна. Закон Снеллиуса принимает вид

$$\nu_1 \sin \alpha_1 = \nu_2 \sin \alpha_2,$$

где α_1, α_2 — углы между лучом света и вертикалью.

³Виллеборд Снелл (1580 – 1626) — математик и астроном. Известен своими работами по приближенному вычислению числа π и по измерению диаметра Земли; переоткрыл закон преломления света. Закон преломления света был ранее открыт Ибн Сахлом около 984 г. и Томасом Хэрриотом в 1602 г.

Вывод закона Снеллиуса из принципа Ферма

Один из фундаментальных постулатов геометрической оптики –

Принцип Ферма⁴⁵. Луч света из точки A в точку B идёт по пути, по которому время прохождения между любыми двумя близкими точками минимально.

Из принципа Ферма сразу следует, что в однородной среде свет будет распространяться по кратчайшему пути — по прямому. Покажем, как из принципа Ферма выводится закон Снеллиуса, и заодно свяжем показатель преломления со скоростью света в среде. Пусть скорость света в нижней половине плоскости равна c_1 , а в верхней — c_2 . Пусть свет проходит из точки A в нижней полуплоскости в точку B в верхней. Принцип Ферма показывает, что луч света “решает” оптимизационную задачу, как быстрее добраться из A в B . Приведем интерпретацию этой задачи, которая принадлежит Фейнману⁶ (см. Фейнмановские лекции по физике, 26-3) [?]:

Представьте себе, что Вы стоите у берега озера, а в озере тонет красивая девушка. Ваша задача — добраться до неё и спасти как можно скорее. Является ли кратчайший путь самым быстрым? Если нет, то в какой же точке берега надо входить в воду? Конечно, Вы бежите быстрее, чем плавёте.

Оригинальный текст (на английском) звучит так:

In Fig. 26-4, our problem is again to go from A to B in the shortest time. To illustrate that the best thing to do is not just to go in a straight line, let us imagine that a beautiful girl has fallen out of a boat, and she is screaming for help in the water at point B . The line marked x is the shoreline. We are at point A on land, and we see the accident, and we can run and can also swim. But we can run faster than we can swim. What do we do? Do we go in a straight line? [?]

Здесь A — точка, где находится спасатель; B — точка, где находится девушка; c_1 — скорость, с которой спасатель может бежать, а c_2 — скорость, с которой он может плыть.

Пусть луч света пересекает границу раздела двух сред (спасатель входит в воду) в точке C . Ясно, что время его движения будет минимальным только если от A до C , а потом от C до B он движется по прямой. Кроме того, точка C на границе раздела двух сред должна быть выбрана так, чтобы суммарное время движения $T(C) := \frac{|AC|}{c_1} + \frac{|CB|}{c_2}$ было минимальным. Найдём эту точку C : для начала надо найти нули производной, $T'(C) = 0$.

Мы проводим рассуждения для точки C , лежащей между проекциями точек A и B на границу раздела сред. Обозначим эти проекции символами H_1 и H_2 .

⁴Пьер де Ферма (1601 – 1665) — юрист и математик. Внес большой вклад в теорию чисел, аналитическую геометрию, теорию вероятностей и оптику.

⁵Сформулирован Пьером Ферма в личном письме к М. К. де Ла Шамбру 1 января 1662 г.

⁶Ричард Филлипс Фейнман (1918 – 1988) — физик, известный работами по квантовой механике, квантовой электродинамике, сверхтекучести гелия, физике элементарных частиц. Лауреат Нобелевской премии.

Упражнение 42. Докажите, что функция $T(C)$ не имеет минимумов вне отрезка, заключенного между точками H_1 и H_2 — между проекциями точек A и B на границу раздела двух сред.

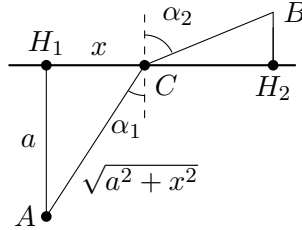


Рис. 3.9: К доказательству закона Снеллиуса

Пусть $|CH_1| = x$ и $|AH_1| = a$. Тогда расстояние $|AC|$ равно $\sqrt{x^2 + a^2}$. Производная этого выражения по x равна

$$\frac{d}{dx}|AC| = \frac{d}{dx}\sqrt{x^2 + a^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{|CH_1|}{|AC|} = \sin \alpha_1.$$

Таким же образом получаем $\frac{d}{dC}|BC| = -\sin \alpha_2$. Итак, $T'(C) = \frac{\sin \alpha_1}{c_1} - \frac{\sin \alpha_2}{c_2}$. В точке минимума производная должна быть равна нулю, поэтому для искомой точки C

$$\frac{\sin \alpha_1}{c_1} = \frac{\sin \alpha_2}{c_2}.$$

Итак, свет движется так, что отношение $\sin \alpha$ к скорости света остается постоянным, где α — угол между лучом и вертикалью. Это и есть закон Снеллиуса для $\frac{v_1}{v_2} = \frac{c_2}{c_1}$.

Упражнение 43. Проверьте, что закон Снеллиуса задаёт единственную точку C на границе раздела двух сред.

Мы получили следующее

Предложение 3.2.10. Показатель преломления среды обратно пропорционален скорости света в этой среде.

Строго говоря, надо проверить, что найденный ноль производной соответствует минимуму функции $T(C)$. Однако из наших выкладок и из упражнения 42 следует, что в других точках у $T(C)$ не может быть минимума; а так как при $C \rightarrow \pm\infty$ функция $T(C)$ стремится к бесконечности, то по принципу Вейерштрасса она должна иметь минимум на вещественной прямой. Значит, этот минимум и есть найденный ноль производной.

Упражнение 44. Принцип Вейерштрасса обычно формулируют так: непрерывная функция на отрезке всегда достигает минимума. Мы применили его для функции $T(C)$ на прямой, для которой $\lim_{C \rightarrow +\infty} T(C) = \lim_{C \rightarrow -\infty} T(C) = +\infty$.

Докажите непрерывность функции $T(C)$. Докажите нужный вариант принципа Вейерштрасса, если он вам неизвестен.

Непрерывный вариант закона Снеллиуса

Пусть теперь свет движется по плоскости с переменным показателем преломления ν . Будем считать, что показатель преломления зависит только от вертикальной координаты y . В этом случае уравнения получаются достаточно простыми, чтобы мы могли исследовать их решения и получить содержательные результаты: например, объяснить существование подводного звукового канала и возникновение миражей (см. примеры 3.2.15, 3.2.16 ниже).

Закон Снеллиуса обобщается на случай переменного показателя преломления $\nu = \nu(y)$ следующим образом.

Непрерывный вариант закона Снеллиуса: произведение $\nu \sin \alpha$ (где α – угол наклона луча к вертикали) остается постоянным вдоль хода луча.

На физическом уровне строгости это утверждение можно получить, если разбить плоскость на много узких горизонтальных полос и в каждой из них считать показатель преломления постоянным. Применяя закон Снеллиуса на каждой границе раздела, мы получим, что произведение $\nu \sin \alpha$ не меняется вдоль луча.

Замечание 3.2.11 (Принцип Ферма и геодезические). *Принцип Ферма для нашей задачи означает, что свет движется между двумя близкими точками A и B по такому пути γ , чтобы время его движения*

$$T(\gamma) = \int_{\gamma} \nu(y) d\gamma \quad (3.16)$$

было минимально. Здесь $d\gamma$ – форма длины на кривой γ : если параметризовать кривую γ параметром t , то $d\gamma = \sqrt{(\dot{\gamma}_1)^2 + (\dot{\gamma}_2)^2} dt$.

Можно понимать формулу (3.16) как способ измерять длину кривых на плоскости. Говорят, что функция $\nu(y)$ задает метрику (метрический тензор) на плоскости, и (3.16) – длина кривой относительно этой метрики.

*Кривая, маленькие участки которой являются кратчайшими путями в смысле некоторой метрики, называется **геодезической** в смысле этой метрики.*

Поэтому свет распространяется по геодезическим в смысле метрики, заданной функцией $\nu(y)$.

*Задачами нахождения минимальных или максимальных значений интегралов, подобных (3.16), в общем случае занимается **вариационное исчисление**.*

Из принципа Ферма можно вывести непрерывный вариант закона Снеллиуса, см. параграф 4.5.2.

Уравнение хода лучей

Пусть луч света идет по кривой $(x, y(x))$; наша задача – найти функцию $x \mapsto y(x)$. В точке $(x, y(x))$ угол между лучом и горизонтальной прямой равен $\arctg y'(x)$, поэтому угол между лучом и вертикальной прямой равен $\alpha = \frac{\pi}{2} - |\arctg y'(x)|$. Это выражение равно $\arccos y'$ или $\pi - \arccos y'$, в зависимости от знака y' . Закон Снеллиуса и в том, и в другом случае принимает вид $\nu(y) \sin \arccos y' = \text{const}$, то есть

$\sin \operatorname{arctg} y' = \frac{k}{\nu(y)}$, где k зависит от начального направления луча. Возможны два варианта: $\operatorname{arctg} y' = \arcsin \frac{k}{\nu}$ и $\operatorname{arctg} y' = \pi - \arcsin \frac{k}{\nu}$. Значит, $y' = \pm \operatorname{ctg} \arcsin \frac{k}{\nu(y)}$. Так как $\operatorname{ctg} \varphi = \pm \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \varphi} - 1}$, получаем уравнение

$$y' = \pm \frac{1}{k} \sqrt{\nu^2(y) - k^2}. \quad (3.17)$$

Это и есть уравнение хода лучей на плоскости с показателем преломления, зависящим только от вертикальной координаты. Случай $k = 0$ не покрывается уравнением (3.17), но он соответствует вертикальному начальному направлению луча, а в таком случае ясно, что луч будет идти вдоль вертикальной прямой.

Анализ уравнения (3.17)

Будем считать, что функция $\nu: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, задающая показатель преломления на плоскости, C^2 -гладкая. Мы будем рассматривать только случай $\nu(y) > 0$ (материалы с отрицательным показателем преломления представляют большую редкость).

Каждой функции $\nu(y)$ соответствует целое семейство уравнений (3.17) с разными значениями k . Если выпустить семейство параллельных лучей под углом α к вертикали из точек вида (x, y_0) для всевозможных x , то $k = \nu(y_0) \sin \alpha$ (по закону Снеллиуса); дальше эти лучи пойдут вдоль интегральных кривых уравнения (3.17) с таким значением k . Так как уравнение автономное, его интегральные кривые будут отличаться только сдвигом по горизонтали.

При фиксированном k правая часть уравнения не определена в полосах $|\nu(y)| < |k|$. На границах таких полос поле направлений нашего уравнения будет горизонтальным. Впрочем, если $\pm k$ не принадлежит множеству значений функции $\nu(y)$, то таких полос не будет.

Исследуем единственность решений уравнения (3.17) с фиксированным знаком в правой части (например, +). Напомним (см. предложение 3.2.2 из раздела 4.1.6), что достаточно для каждой особой точки y_0 , $|\nu(y_0)| = |k|$, исследовать интегралы

$$\int_{y_0}^{y_0+\varepsilon} \frac{dy}{\sqrt{\nu^2(y) - k^2}}, \quad \int_{y_0-\varepsilon}^{y_0} \frac{dy}{\sqrt{\nu^2(y) - k^2}}. \quad (3.18)$$

Пусть $\nu'(y_0) \neq 0$. Тогда $\sqrt{\nu^2(y_0 + \delta) - k^2} = \sqrt{2k\delta \cdot \nu'(y_0)(1 + o(\delta))}$, и интегралы (4.1.6) будут сходиться, как и интеграл $\int \frac{1}{\sqrt{\delta}} d\delta$. Чтобы получить строгое доказательство, нужно оценить интеграл выражением вида $\frac{\operatorname{const}}{\sqrt{y-y_0}}$ и доказать сходимость.

Упражнение 45. Докажите строго сходимость интеграла (3.18) в случае $\nu'(y_0) \neq 0$.

Упражнение 46. Докажите, что в случае $\nu'(y_0) = 0$ интеграл (3.18) будет расходиться.

Определение 3.2.12. Значение k называется *некритическим* для функции $\nu(y)$, если во всех точках y_0 , для которых $\nu(y_0) = k$, выполнено $\nu'(y_0) \neq 0$.

3 Элементарные методы решения дифференциальных уравнений

Напомним, что k определяется по начальному направлению луча: если луч выпущен под углом α_0 из точки (x_0, y_0) , то $\nu(y_0) \sin \alpha_0 = k$. Если $\sin \alpha < \frac{\sup_{\mathbb{R}} \nu(y)}{\nu(y_0)}$ (направление луча близко к вертикальному направлению), соответствующее значение k не принадлежит множеству значений ν , и поле направлений уравнения хода лучей нигде не будет горизонтальным.

Если же $\sin \alpha > \frac{\sup_{\mathbb{R}} \nu(y)}{\nu(y_0)}$ (луч выпущен под небольшим углом к горизонтали), то k принадлежит множеству значений функции ν , и в большинстве случаев — если k не критическое — единственность решений будет нарушаться. Поэтому луч придет на ближайшую прямую $\nu(y) = k$ с горизонтальной касательной.

Как будет двигаться луч потом?

На этот вопрос невозможно ответить, пользуясь только законом Снеллиуса. На самом деле, луч отразится и пойдет вниз вдоль решения уравнения (3.17) со знаком $(-)$ в правой части. Чтобы доказать это, надо решить другую задачу оптимизации: для данных точек A и B , расположенных ниже прямой $y = y_0$, выяснить, где должна находиться точка отражения C на прямой $y = y_0$, чтобы время движения от A до C и от C до B вдоль решений уравнения (3.17) было минимальным. Мы не будем решать эту задачу оптимизации. Заметим только (без доказательства), что ход луча на рис. 3.10, когда луч некоторое время движется вдоль прямой $y = y_0$, не оптимален для такой задачи.

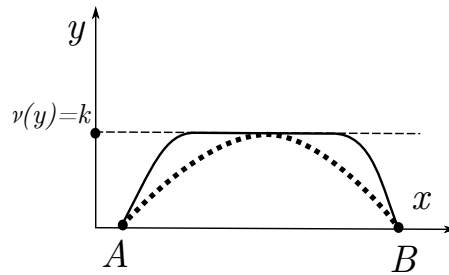


Рис. 3.10: Ход луча, при котором луч некоторое время движется вдоль горизонтальной прямой, не оптимизирует время движения. Пунктиром показана оптимальная траектория.

Явление отражения луча от слоя с показателем преломления $k = \nu(y_0) \sin \alpha_0$ близко к явлению полного внутреннего отражения, но здесь луч движется вдоль гладкой кривой, а для полного внутреннего отражения — вдоль ломаной.

Пример 3.2.13. Рассмотрим движение луча по полуплоскости $y > 0$ с показателем преломления $\nu(y) = \sqrt{y}$. Соответствующее уравнение $y' = \pm \frac{1}{k} \sqrt{y - k^2}$ легко решить в явном виде. Мы получаем уравнение для кривых, по которым движется луч: $y = k^2 + \frac{1}{4k^2} (c \pm x)^2$; лучи движутся по параболам. На рис. 3.11 изображено семейство таких парабол, проходящих через точку $(1, 0)$, для нескольких разных значений k . Нижняя точка каждой параболы находится на высоте y , где $\nu(y) = k$. Это объясняет связь между графиком функции $\nu(y)$ и траекториями движения лучей, показанную на рис. 3.11.

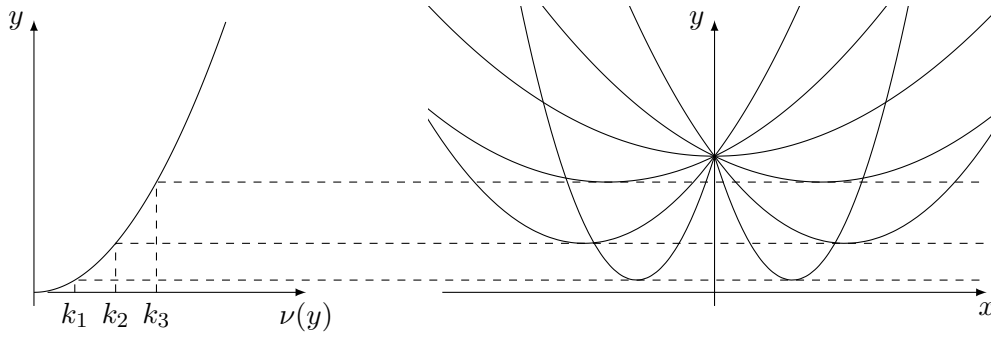


Рис. 3.11: График функции $\nu(y) = \sqrt{y}, y > 0$, и ход лучей, выпущенных из точки $(1, 0)$ под разными углами, для показателя преломления $\nu(y) = \sqrt{y}$.

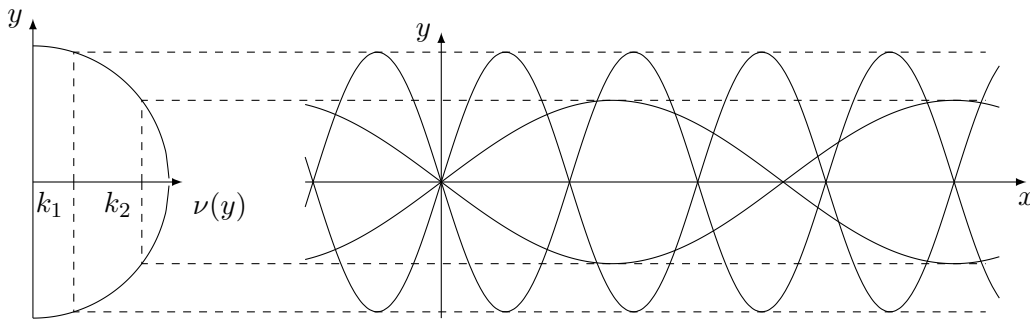


Рис. 3.12: График функции $\nu(y) = \sqrt{1 - y^2}, -1 < y < 1$, и ход лучей, выпущенных из точки $(0, 0)$ под разными углами, для $\nu(y) = \sqrt{1 - y^2}$.

Пример 3.2.14. Рассмотрим движение луча в полосе $-1 < y < 1$ с показателем преломления $\nu(y) = \sqrt{1 - y^2}$. Уравнение $y' = \pm \frac{1}{k} \sqrt{1 - y^2 - k^2}$ тоже легко решить. Мы получим, что луч движется по кривым $y = (1 - k^2) \sin(\frac{x}{k} + c)$ — синусоидам. На рис. 3.12 изображено несколько таких синусоид, проходящих через точку $(0, 0)$. Каждая точка максимума и минимума синусоиды — точка отражения; так как каждое значение $y \in (-1, 1)$ функция $\nu(y)$ принимает дважды, луч будет двигаться между двумя прямыми $\nu(y) = k$, отражаясь от них.

В следующих двух примерах нам неизвестна точная формула для функции $\nu(y)$ — мы знаем только качественное описание её поведения. Тем не менее, мы сможем качественно описать траектории движения лучей.

Пример 3.2.15 (Подводный звуковой канал). Распространение звука описывается таким же уравнением, что и распространение света; роль показателя преломления тут играет $\nu = \frac{1}{v}$, где v — скорость звука. Скорость звука в воде зависит и от температуры, и от давления; в море или в океане на одинаковых глубинах она примерно одинакова. Поэтому наша модель работает и для распространения звука в океане. С ростом глубины скорость звука сперва убывает (за счет убывания температуры), а затем возрастает (за счет роста давления); поэтому у функции $\nu(y)$ будет максимум.

Есть значения k , которые функция $\nu(y)$ принимает дважды. Для каждого такого значения ход звуковой волны будет таким, как показано на рис. 3.13: в полосе $\nu(y) > k$ она будет многократно отражаться от слоёв с $\nu(y) = k$. Это — так называемый *подводный звуковой канал*, вдоль которого звук может распространяться на большие расстояния.

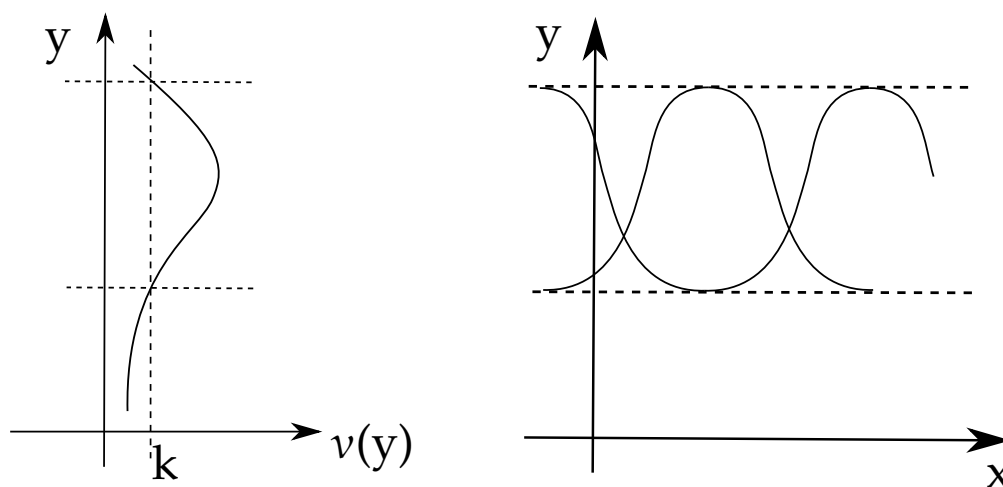


Рис. 3.13: Подводный звуковой канал. Звуковая волна движется в полосе $\nu(y) > k$, отражаясь от её границ

Пример 3.2.16 (Миражи на дороге и в пустыне). В жаркие дни над асфальтовой дорогой образуется слой нагретого воздуха. Показатель преломления воздуха убывает с ростом температуры, значит, у поверхности дороги он будет ниже. Пусть луч

3.2.5. Ход лучей (*)

света падает на дорогу сверху; в силу непрерывного варианта закона Снеллиуса, угол наклона луча к вертикали будет возрастать по мере приближения к дороге. Значит, луч будет отклоняться к горизонтали. Если начальный угол наклона близок к $\pi/2$, то единственность решения будет нарушаться; тогда луч снова пойдет вверх, “отразившись” от слоя нагретого воздуха.

При этом будет наблюдаться мираж: если смотреть на дорогу сверху, будут видны лужи, которые на самом деле являются отражениями неба (см. рис. 3.14).

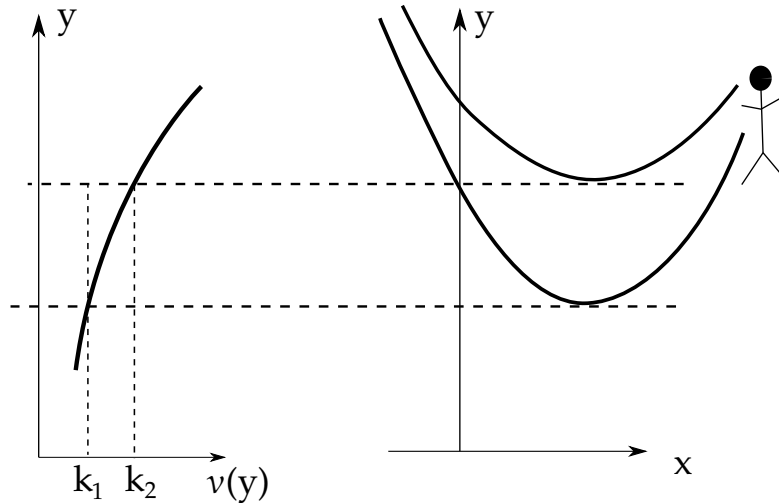


Рис. 3.14: Миражи над дорогой. На рисунке справа показан ход лучей для двух разных значений k

В пустыне возможен и другой тип миражей. Для его возникновения нужно, чтобы слой наиболее нагретого воздуха был на некоторой высоте над поверхностью земли; тогда график функции v будет таким, как в примере 3.2.15. Луч света (как звук в океане) будет распространяться на большие расстояния. Тогда наблюдатель будет видеть объекты, расположенные на огромных расстояниях (дворцы, корабли и др.).

3.3 Метод разделения переменных в общем случае

3.3.1 Описание метода

Уравнения вида

$$\frac{dx}{dt} = \frac{f(x)}{g(t)} \quad (3.19)$$

называются *уравнениями с разделяющимися переменными*, потому что к ним применим *метод разделения переменных*. Его применение выглядит так.

Формально домножим обе части равенства на dt и разделим на $f(x)$:

$$\frac{dx}{f(x)} = \frac{dt}{g(t)}, \quad (3.20)$$

а затем проинтегрируем:

$$\int \frac{dx}{f(x)} = \int \frac{dt}{g(t)}. \quad (3.21)$$

Получилось соотношение на x и t , из которого можно найти зависимость $x(t)$. Например, для уравнения $\dot{x} = x$ получаем

$$\int \frac{dx}{x} = \int dt, \quad (3.22)$$

то есть $\ln|x| = t + \text{const}$, и $x = Ce^t$.

Как мы уже знаем, все решения уравнения $\dot{x} = x$ имеют вид Ce^t : метод разделения переменных привел нас к правильному ответу. Но наши выкладки не являются его обоснованием. Мы пока не обсудили, что такое $\frac{dx}{f(x)}$ и $\frac{dt}{g(t)}$ (на самом деле это *дифференциальные формы*), в каком смысле они равны и как их интегрировать. В разделе 4.2 мы дадим определение дифференциальной формы и обоснуем наши выкладки.

Впрочем, убедиться в правильности итоговой формулы (3.21) можно и без дифференциальных форм. Этим мы и займемся в следующих разделах.

Частным случаем метода разделения переменных является метод решения автономных уравнений, изложенный в разделе 3.2.

3.3.2 О связи фазовых и интегральных кривых и понижении размерности в автономных уравнениях

В этом разделе мы увидим, что фазовые кривые автономного уравнения являются интегральными кривыми некоторого нового уравнения, которое имеет меньшую размерность. Такая конструкция позволяет понизить размерность автономного дифференциального уравнения.

Для простоты мы будем рассматривать только случай уравнений на плоскости; все результаты можно перенести и на многомерный случай.

Пример 3.3.1. Фазовые кривые системы $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$ (см. рис. 2.4) совпадают с интегральными кривыми уравнения $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ в области $(x, y) \neq 0$ (см. рис 2.2), если это уравнение мы рассматриваем вместе с обратным (как в определении 2.2.8).

3.3.2. О связи фазовых и интегральных кривых и понижении размерности в автономных уравнениях

Рассмотрим систему автономных дифференциальных уравнений на плоскости:

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x, y), \\ \dot{y} = G(x, y), \end{cases} \quad (3.23)$$

здесь $x, y \in \mathbb{R}$. Пусть функции F и G непрерывны в некоторой области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ и не обращаются в ноль одновременно.

Теперь “поделим второе уравнение на первое”: выпишем новое дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{G(x, y)}{F(x, y)}. \quad (3.24)$$

Как обычно, уравнение (3.24) будем рассматривать вместе с его обратным (см. определение 2.2.8):

$$\frac{dx}{dy} = \frac{F(x, y)}{G(x, y)}. \quad (3.25)$$

В многомерном случае все уравнения системы автономных уравнений можно “поделить” на одно из уравнений. Интегральные кривые новой системы уравнений будут совпадать с фазовыми кривыми исходной системы.

Теорема 3.3.2. Пусть функции F и G непрерывны в области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Тогда фазовые кривые системы (3.23) вне точек (x, y) , для которых $F(x, y) = G(x, y) = 0$, являются интегральными кривыми уравнения (3.24), и наоборот.

Доказательство. Идея доказательства состоит в следующем. Векторы поля $(F(x, y), G(x, y))$ направлены так же, как прямые поля направлений уравнения (3.24), поэтому кривые, касающиеся векторного поля (фазовые кривые системы (3.23)) совпадают с кривыми, касающимися поля направлений (интегральными кривыми (3.24)).

Любая фазовая кривая системы уравнений (3.23) является интегральной кривой уравнения (3.24). Действительно, фазовая кривая системы (3.23) в каждой своей точке касается вектора $(F(x, y), G(x, y))$. Тангенс угла наклона этого вектора равен $\frac{G(x, y)}{F(x, y)}$. Поэтому фазовая кривая касается прямой поля направлений, соответствующего уравнению (3.24). Значит, фазовая кривая является интегральной.

Любая интегральная кривая уравнения (3.24) является фазовой кривой системы (3.23).

Рассмотрим интегральную кривую $\gamma = (x, y(x))$ уравнения (3.24). Касательная к этой кривой в её точке (x, y) содержится в прямой поля направлений, поэтому параллельна вектору $(F(x, y), G(x, y))$. Наша задача — параметризовать кривую γ временем t так, чтобы её вектор скорости совпадал с вектором $(F(x, y), G(x, y))$. Тогда кривая γ с этой параметризацией будет фазовой кривой системы (3.23), и утверждение будет доказано.

Чтобы ввести параметризацию временем, достаточно найти зависимость $t(x)$ или $t(y)$. Пусть $F(x_0, y_0) \neq 0$, и $y = y(x), y_0 = y(x_0)$ — интегральная кривая уравнения

3 Элементарные методы решения дифференциальных уравнений

(3.24). Функцию $t(x)$ в окрестности x_0 мы найдём из следующего дифференциального уравнения:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{F(x, y(x))} \quad (3.26)$$

Правая часть уравнения зависит только от x , поэтому искомая функция $t(x)$ является первообразной правой части, и её легко найти интегрированием. Производная функции $t(x)$ ненулевая — она равна $1/F(x, y(x))$. Поэтому в окрестности точки $t(x_0)$ существует обратная функция $x(t)$. Производная обратной функции равна

$$\frac{dx}{dt} = F(x, y(x)).$$

Производная сложной функции $y(x(t))$ равна

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{G(x, y)}{F(x, y)} F(x, y) = G(x, y).$$

Итак, пара функций $(x(t), y(t))$ является решением системы (3.23) — другими словами, вектор скорости кривой $(x(t), y(t))$ равен вектору векторного поля $(F(x, y), G(x, y))$. Поэтому кривая $y(x)$ является фазовой кривой для уравнения (3.23).

Если $F(x_0, y_0) = 0$, то вместо уравнения (3.24) нужно рассматривать его обратное — уравнение (4.1.6), а координаты x и y в рассуждении надо поменять местами. \square

Из этой теоремы мы получим следующее утверждение для векторных полей:

Следствие 3.3.3. *Если домножить векторное поле (3.23) на плоскости на любую положительную функцию, его фазовый портрет не изменится.*

Доказательство. Неформальное доказательство очень просто: направления векторов векторного поля при таком домножении сохраняются, значит, кривые, которые всюду касаются векторного поля (фазовые кривые), тоже не меняются.

Чтобы дать формальное доказательство, мы используем предыдущую теорему. При домножении векторного поля на функцию соответствующее уравнение (3.24) останется тем же, поэтому его интегральные кривые не поменяются. Значит, фазовые кривые уравнения (3.23) тоже сохраняются. Стрелки на фазовых кривых не поменяют направление: они направлены вдоль векторов векторного поля, которые не меняют направление. \square

Заметим, что если домножить векторное поле на отрицательную функцию, фазовые кривые не изменятся, но стрелки на них поменяют направление.

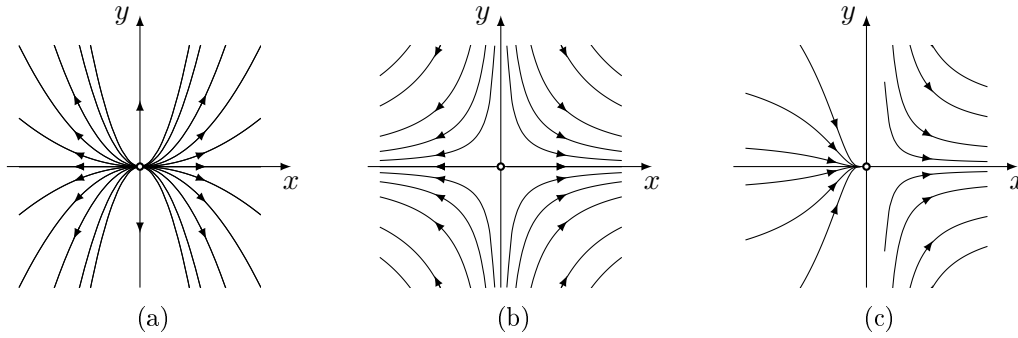


Рис. 3.15: (а) Узел: декартово произведение уравнений $\dot{x} = x$ и $\dot{y} = 2y$. (б) Седло: декартово произведение уравнений $\dot{x} = x$ и $\dot{y} = -y$. (с) Седлоузел: декартово произведение уравнений $\dot{x} = x^2$ и $\dot{y} = -y$.

3.3.3 Обоснование метода разделения переменных

Определение 3.3.4. Декартовым⁷ (или прямым) произведением уравнений $\dot{x} = f(x)$ и $\dot{y} = g(y)$ называется система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ \dot{y} = g(y), \end{cases} \quad (3.27)$$

Примеры декартовых произведений изображены на рис. 3.15а–3.15с. Эти векторные поля имеют названия: *узел*, *седло* и *седлоузел*.

Упражнение 47. Решите дифференциальные уравнения и найдите фазовые кривые для узла, седла и седлоузла.

Мы умеем решать уравнение (3.27), так как умеем решать каждое из уравнений системы по отдельности. Их решения в областях $f(x) \neq 0, g(y) \neq 0$ задаются следующими формулами:

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{d\zeta}{f(\zeta)},$$

$$t - t_0 = \int_{y_0}^{y(t)} \frac{d\eta}{g(\eta)}.$$

По теореме 3.3.2 для декартовых произведений, фазовые кривые системы (3.27) совпадают с интегральными кривыми следующего уравнения с разделяющимися переменными:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(y)}{f(x)}. \quad (3.28)$$

⁷Рене Декарт (1596 – 1650) — философ, физик и математик. В математике наиболее известен как основатель аналитической геометрии.

Итак, это уравнение мы тоже умеем решать. Его интегральные кривые $(x(t), y(t))$ удовлетворяют условию

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{d\zeta}{f(\zeta)} = \int_{y_0}^{y(t)} \frac{d\eta}{g(\eta)}.$$

Чтобы найти решения уравнения (3.28), достаточно представить его интегральные кривые в виде графика функции $x \mapsto y(x)$. Мы получаем следующее предложение, которое оправдывает наши выкладки из раздела 3.3.1.

Следствие 3.3.5 (Метод разделения переменных). *Для непрерывных функций f, g любое решение $x \mapsto y(x)$ уравнения с разделяющимися переменными (3.28) в области $f(x) \neq 0, g(y) \neq 0$ даётся формулой*

$$\int_{x_0}^x \frac{d\zeta}{f(\zeta)} = \int_{y_0}^{y(x)} \frac{d\eta}{g(\eta)}. \quad (3.29)$$

Что происходит в тех точках, где $f(x) = 0$ или $g(y) = 0$? Если $f(x_0) = 0$, правая часть уравнения (3.28) не определена в точке x_0 , поэтому решения этого уравнения не определены при $x = x_0$. Если же $g(y_0) = 0$, правая часть уравнения равна нулю, поэтому функция $y(x) \equiv y_0$ будет решением этого уравнения. Это постоянное решение может и не получаться по формуле из следствия 3.3.5, и его следует добавить в список решений. Если условия теоремы существования и единственности нарушены, уравнение может иметь решение, равное y_0 только на части своей области определения, как происходит, например, в следующем упражнении.

Упражнение 48. *Решите уравнение $\frac{dy}{dx} = \frac{y^{2/3}}{x^{2/3}}$ и нарисуйте его интегральные кривые.*

Ответ: при применении следствия 3.3.5 получаются решения $y(x) = (\sqrt[3]{x} - c)^3$. Кроме того, у уравнения есть постоянное решение $y \equiv 0$. Наконец, решение этого уравнения может прийти в ноль за конечное время, а потом, возможно, покинуть эту точку. Поэтому решениями также будут функции следующих трех типов:

$$y(x) = \begin{cases} (\sqrt[3]{x} - c)^3, & x < c^3 \\ 0, & x \geq c^3 \end{cases}, \quad y(x) = \begin{cases} 0, & x \leq c^3 \\ (\sqrt[3]{x} - c)^3, & x > c^3 \end{cases}, \quad y(x) = \begin{cases} (\sqrt[3]{x} - d)^3, & x < d^3 \\ 0, & d^3 \leq x \leq c^3 \\ (\sqrt[3]{x} - c)^3, & x > c^3 \end{cases}$$

Упражнение 49. *Найдите фазовые кривые системы уравнений Лотки⁸–Вольтерры⁹:*

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax - Bxy, \\ \dot{y} = -Cy + Dxy. \end{cases} \quad (3.30)$$

Эта система — математическая модель системы «хищник — жертва» в живой природе (см. раздел 4.2.7.2).

⁸Альфред Джеймс Лотка (1880 – 1949) — математик, химик, статистик, демограф.

⁹Вито Вольтерра (1860 – 1940) — математик и физик; в математике также известны его работы а области интегральных уравнений и функционального анализа.

3.3.3. Обоснование метода разделения переменных

Указание: Примените теорему 3.3.2, чтобы перейти к интегральным кривым одномерного дифференциального уравнения. Затем решите полученное дифференциальное уравнение методом разделения переменных.

Фазовые кривые уравнения Лотки—Вольтерры найдены другим способом в разделе 4.2.7.2 (см. рис. 4.6).

3.4 Линейные уравнения на прямой

Дифференциальное уравнение называется *линейным*, если его правая часть линейно зависит от неизвестной функции. В одномерном случае линейное уравнение имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x + b(t), \quad (3.31)$$

где функции $a(t)$ и $b(t)$, как обычно, предполагаются непрерывными. Напомним, что в разделе 1.1.1 мы уже решали линейное одномерное уравнение $\dot{x} = x$ с постоянными коэффициентами $a(t) \equiv 1$, $b(t) \equiv 0$.

3.4.1 Линейные однородные одномерные уравнения

Однородное линейное уравнение — это уравнение с нулевым свободным членом:

$$\dot{x} = a(t)x, \quad (3.32)$$

$b(t) \equiv 0$. Оно называется однородным, так как его правая часть однородна по x .

Применим метод разделения переменных:

$$\frac{dx}{x} = a(t)dt,$$

откуда

$$\ln |x(t)| - \ln |x_0| = \int_{t_0}^t a(\tau)d\tau.$$

Итак, решением будет функция

$$x(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^t a(\tau)d\tau}. \quad (3.33)$$

Можно сделать такое наблюдение:

Предложение 3.4.1. Пусть $x_1(t)$, $x_2(t)$ — решения линейного однородного уравнения (3.32). Тогда их сумма $x_1(t) + x_2(t)$, а также функция $Cx_1(t)$ (где C — постоянная) тоже удовлетворяют уравнению (3.32). Другими словами, **решения линейного однородного уравнения образуют векторное пространство.**

Это утверждение, конечно, следует из формулы (3.33). Но гораздо проще подставить в уравнение (3.32) функции $x_1(t) + x_2(t)$ и $Cx_1(t)$.

Упражнение 50. Докажите предложение 3.4.1.

Векторное пространство решений уравнения (3.32) одномерно: любое решение представляется в виде $C\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — какое-то фиксированное решение одномерного уравнения (например, $\varphi(t) = e^{\int_{t_0}^t a(\tau)d\tau}$).

3.4.1.1 Пример: уравнение Гомперца для роста опухоли.

В стандартной модели роста опухоли, маленькая опухоль растет экспоненциально; её объем подчиняется уравнению $\dot{V} = \lambda V$. Но потом, когда объем опухоли V увеличивается, её рост замедляется. Рост опухоли описывают¹⁰ уравнением Гомперца¹¹:

$$\dot{V} = \lambda e^{-\alpha t} V$$

где λ и α — некоторые положительные постоянные.

Решение этого уравнения с начальным условием $V(0) = V_0$ имеет вид

$$V(t) = V_0 e^{\frac{\lambda}{\alpha}(1-e^{-\alpha t})}$$

в соответствии с формулой (3.33). Интегральные кривые уравнения Гомперца носят название “кривые Гомперца” (см. рис. 3.16). При $t \rightarrow +\infty$ функция $V(t)$ имеет предел

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} V(t) = V_0 e^{\frac{\lambda}{\alpha}},$$

то есть объем опухоли стабилизируется, и предельное значение объема опухоли линейно зависит от её объема V_0 в начальный момент времени.

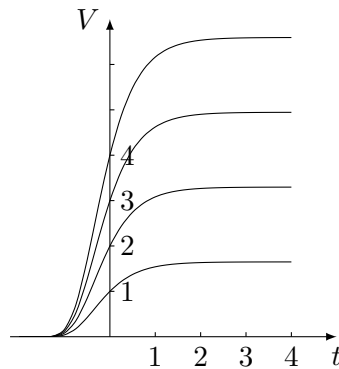


Рис. 3.16: Кривые Гомперца для $\alpha = 0.5$, $\lambda = 0.25$, $V_0 = 1, 2, 3, 4$

3.4.2 Линейные неоднородные одномерные уравнения

В предыдущем разделе мы рассмотрели линейные однородные уравнения (3.32) и научились их решать, а также заметили, что их решения образуют одномерное векторное пространство.

В этом разделе мы изучим линейные неоднородные уравнения (3.31). Если $x_1(t)$ и $x_2(t)$ — решения уравнения (3.31), их сумма $x_1(t) + x_2(t)$ уже не удовлетворяет уравнению (3.31). Зато их *разность* $x_1(t) - x_2(t)$ является решением уравнения (3.32).

¹⁰Laird A. K. (1964). "Dynamics of tumor growth". Вр J Cancer. 18 (3): 490–502.

¹¹Бенджамин Гомперц (1779 – 1865) — математик, статистик и астроном.

3 Элементарные методы решения дифференциальных уравнений

Это означает, что решения линейных неоднородных уравнений образуют *аффинное* пространство.

Неформально говоря, аффинное пространство — это векторное пространство без выделенной точки 0 . Можно представлять себе, например, прямую на плоскости, не проходящую через 0 . Формальное определение аффинного пространства мы уже приводили в разделе 2.1. Напомним его.

Определение 3.4.2. *Аффинное пространство A , ассоциированное с векторным пространством V , — это множество, на котором определена операция прибавления любого элемента векторного пространства V . При этом*

- $a + (v + w) = (a + v) + w$, где $v, w \in V, a \in A$;
- для любых двух элементов $a, b \in A$ найдется единственный элемент $v \in V$, для которого $a + v = b$.

Отображение аффинных пространств $f: (A_1, V_1) \rightarrow (A_2, V_2)$ называется *аффинным*, если оно сохраняет структуру аффинного пространства: $f(a + v) = f(a) + l(v)$, где l — линейное отображение $l: V_1 \rightarrow V_2$.

Упражнение 51. *Проверьте, что решения линейного неоднородного уравнения образуют одномерное аффинное пространство, ассоциированное с пространством решений соответствующего однородного уравнения.*

Из этого простого упражнения следует, что если мы знаем *одно* решение неоднородного уравнения (3.31), то остальные его решения получаются прибавлением всевозможных решений однородного уравнения. Другими словами, выполнено такое утверждение.

Предложение 3.4.3. *Общее решение линейного неоднородного уравнения (3.31) (т.е. его произвольное решение) имеет вид:*

$$x_{\text{общ}}(t) = x_{\text{част}}(t) + C\varphi(t), \quad (3.34)$$

где $\varphi(t)$ — решение однородного уравнения (3.32), $x_{\text{част}}$ — частное решение (то есть какое-то одно решение) неоднородного уравнения (3.31).

Это предложение является частным случаем чрезвычайно общего факта: *пространство решений линейного неоднородного уравнения любой природы: алгебраического, обыкновенного дифференциального, в частных производных и т. д. является аффинным пространством, с которым ассоциировано пространство решений соответствующего линейного однородного уравнения.*

Другими словами, *общее решение линейного неоднородного уравнения равно сумме частного решения этой системы и общего решения соответствующей однородной системы.*

Итак, чтобы решить линейное дифференциальное уравнение, достаточно подобрать частное (то есть какое-нибудь одно) решение уравнения (3.32).

Пример 3.4.4. Рассмотрим линейное неоднородное уравнение $\dot{x} = x - t$. По его полю направлений (см. рис. 4.3) видно, что прямая $x = t + 1$ является интегральной кривой, то есть это уравнение имеет решение $x_{\text{част}}(t) = t + 1$; действительно, $(t+1)' = (t+1) - t$. Общее решение соответствующего однородного уравнения $\dot{x} = x$ имеет вид $x_{\text{общ}}(t) = ce^t$. Значит, общее решение уравнения $\dot{x} = x - t$ имеет вид $x(t) = ce^t + t + 1$.

Упражнение 52. Сформулируйте аналог предложения 3.4.3 для системы линейных алгебраических уравнений. Помните ли вы его доказательство (оно входит в стандартный курс линейной алгебры)?

В общем случае неоднородное уравнение можно решить методом вариации постоянной.

3.4.3 Метод вариации постоянной

Любое решение однородного линейного уравнения имеет вид $C\varphi(t)$, где $\varphi(t) = e^{\int_{t_0}^t a(\tau)d\tau}$.

Будем подбирать частное решение неоднородного уравнения в виде

$$x_{\text{част}}(t) = C(t)\varphi(t), \quad \text{где } x_{\text{част}}(t_0) = 0$$

— проварируем постоянную C . Мы получаем следующее уравнение на функцию $C(t)$:

$$\dot{C}(t)\varphi(t) + C(t)\dot{\varphi}(t) = a(t)C(t)\varphi(t) + b(t), \quad C(t_0) = 0. \quad (3.35)$$

Но функция φ удовлетворяет однородному уравнению:

$$\dot{\varphi}(t) = a(t)\varphi(t),$$

откуда

$$\dot{C}(t)\varphi(t) = b(t).$$

Следовательно,

$$\dot{C}(t) = \varphi(t)^{-1}b(t), \quad C(t_0) = 0.$$

Частное решение $x_{\text{част}}(t)$ неоднородного уравнения находится теперь с помощью теоремы Ньютона—Лейбница. Более подробно,

$$C(t) = \int_{t_0}^t \varphi(\tau)^{-1}b(\tau)d\tau;$$

итак, частное решение линейного неоднородного уравнения равно

$$x_{\text{част}}(t) = \varphi(t)C(t) = \varphi(t) \int_{t_0}^t \varphi(\tau)^{-1}b(\tau)d\tau. \quad (3.36)$$

В силу предложения 3.4.3, общее решение неоднородного уравнения (3.31) равно

$$x_{\text{общ}}(t) = x_{\text{част}}(t) + C\varphi(t).$$

3 Элементарные методы решения дифференциальных уравнений

Окончательно,

$$x_{\text{общ}}(t) = \left(C + \int_{t_0}^t \varphi(\tau)^{-1} b(\tau) d\tau \right) \varphi(t),$$

где $\varphi(t) = e^{\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau}$.

Из этой формулы, в частности, следует, что решения линейных уравнений определены при любом t .

Пример 3.4.5 (Уравнение Бернулли). Уравнением Бернулли называется уравнение вида

$$\dot{x} = f(t)x + g(t)x^\alpha \text{ при } \alpha \neq 0, 1. \quad (3.37)$$

Если разделить обе части на x^α , а затем обозначить $z := x^{1-\alpha}$, уравнение примет вид

$$\dot{z} = (1 - \alpha)f(t)z + (1 - \alpha)g(t).$$

То есть уравнение Бернулли превратится в линейное неоднородное уравнение.

Упражнение 53. Решите уравнение Бернулли (3.37).

3.4.4 Преобразования потока линейных уравнений на прямой

Мы пользуемся определением фазового потока для неавтономных уравнений, см. раздел 2.4.4. Напомним, что преобразование потока $g_f^{t_0, t_1}$ уравнения $\dot{x} = f(t, x)$ переводит точку x_0 в точку $x(t_1)$, где x — решение уравнения с начальным условием $x(t_0) = x_0$.

Для линейного однородного уравнения $\dot{x} = a(t)x$ имеем

$$g^{t_0, t_1}(x) = \left(e^{\int_{t_0}^{t_1} a(\tau) d\tau} \right) x =: A(t_0, t_1)x.$$

То есть преобразование фазового потока g^{t_0, t_1} линейного однородного уравнения линейно и сохраняет ориентацию. Оно является умножением на положительное число $e^{\int_{t_0}^{t_1} a(\tau) d\tau}$.

Для линейного неоднородного уравнения $\dot{x} = a(t)x + b(t)$, в силу предложения 3.4.3, преобразование потока имеет вид

$$g^{t_0, t_1}(x) = x_{\text{част}}(t_1) + A(t_0, t_1)x, \quad (3.38)$$

где частное решение $x_{\text{част}}$ дается формулой (3.36). Итак, преобразование фазового потока линейного неоднородного уравнения — аффинное отображение, сохраняющее ориентацию (другими словами, является композицией линейного растяжения и сдвига).

Упражнение 54. Найдите преобразования фазового потока

а) для линейного уравнения $\dot{x} = x + \sin t$;

б) для линейного уравнения $\dot{x} = xt + 1$.

3.4.5 Линейные уравнения с периодическими коэффициентами

В этом пункте мы изучим линейные неоднородные уравнения, коэффициенты которых периодичны с некоторым (общим) периодом T :

$$\dot{x} = a(t)x + b(t), \text{ где } a(t+T) = a(t), \ b(t+T) = b(t) \text{ для любого } t. \quad (3.39)$$

Насколько сильно меняется решение уравнения за один период? Периодичны ли решения уравнения? Как поведут себя решения уравнения в далеком будущем (когда t стремится к бесконечности)?

Чтобы ответить на эти вопросы, рассмотрим преобразование фазового потока за период. В силу (3.38), это отображение аффинно; обозначив $B(0, T) = x_{\text{част}}(t_1)$, получим

$$g^{0,T}(x) = A(0, T)x + B(0, T) \quad (3.40)$$

Это аффинное отображение называется *отображением монодромии* уравнения с периодическими коэффициентами.

Периодические решения нашего уравнения соответствуют неподвижным точкам отображения $g^{0,T}$. Действительно, если $g^{0,T}(x_0) = x_0$, то

$$g^{0,T+t}(x_0) = g^{T,T+t} \circ g^{0,T}(x_0) = g^{T,T+t}(x) = g^{0,t}(x_0)$$

(последнее равенство следует из T -периодичности коэффициентов уравнения), значит, решение $x(t) = g^{0,t}(x_0)$ периодично.

Напомним, что преобразование потока линейного неоднородного уравнения (в частности, преобразование монодромии) аффинно. Что можно сказать о неподвижных точках произвольного аффинного отображения прямой, сохраняющего ориентацию:

$$g: x \mapsto Ax + B,$$

где $A > 0$?

1. Общий случай: $A \neq 1$.

В этом случае преобразование g — растяжение с коэффициентом A относительно неподвижной точки $x_0 = \frac{B}{1-A}$.

2. Вырожденный случай: $A = 1$. В этом случае $g: x \mapsto x + B$ — перенос.

- а) Невырожденный (типичный) перенос: $B \neq 0$. Неподвижных точек нет.
- б) Вырожденный перенос: $B = 0$. Преобразование g тождественно, и все точки неподвижны.

На рис. 3.17 и 3.18 изображены интегральные кривые нескольких уравнений, для которых преобразования монодромии имеют тип 1, 2а) и 2б) соответственно.

Теорема 3.4.6. *Линейное одномерное дифференциальное уравнение с непрерывными T -периодическими коэффициентами имеет единственное T -периодическое решение, если и только если интеграл по периоду от коэффициента при линейном члене отличен от нуля:*

$$\int_0^T a(\tau) d\tau \neq 0.$$

3 Элементарные методы решения дифференциальных уравнений

Доказательство. Преобразование монодромии уравнения (3.39) аффинно и имеет вид

$$x \mapsto Ax + B, \quad \text{где } A = e^I, \quad I = \int_0^T a(t)dt.$$

Оно имеет единственную неподвижную точку, если и только если $A \neq 1$, т.е. $I \neq 0$. □

Эта теорема позволяет легко узнавать уравнения вида (3.39) с единственным периодическим решением. С помощью преобразования монодромии можно также понять, как ведут себя решения уравнения (3.39) на бесконечности (см. задачу 25. ниже).

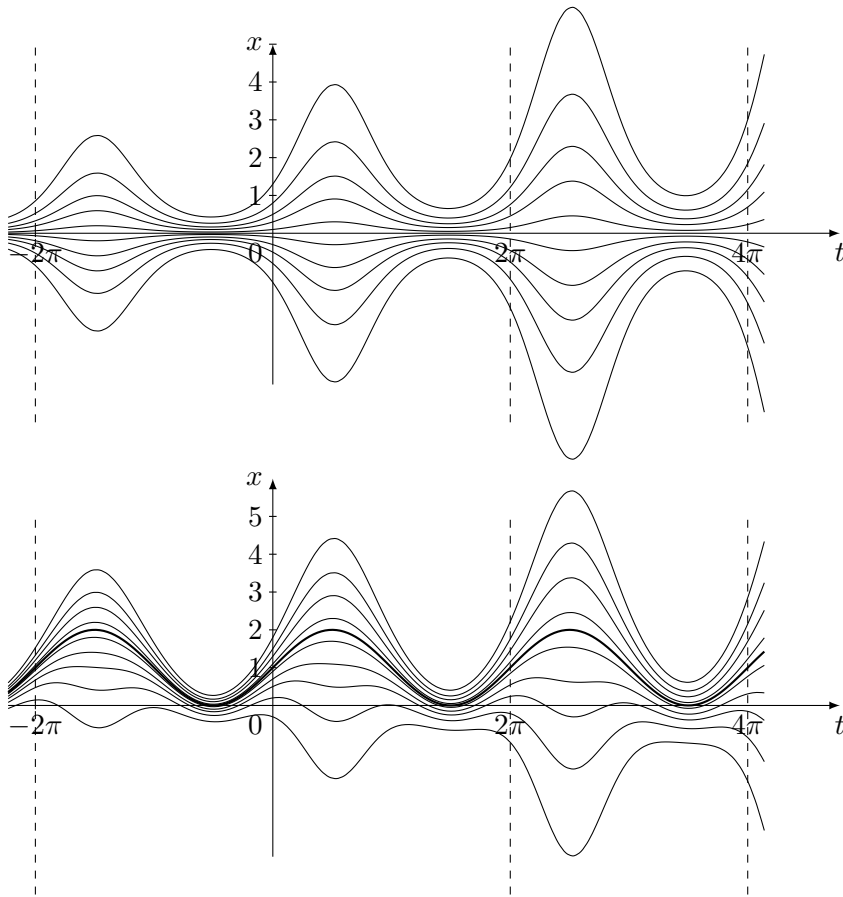


Рис. 3.17: Случай 1: преобразование монодромии – растяжение. Интегральные кривые однородного уравнения $\dot{x} = x(\cos t + \frac{1}{15})$ и неоднородного уравнения $\dot{x} = x(\cos t + \frac{1}{15}) - \sin t \cos t - \sin t - 1$. График единственного периодического решения неоднородного уравнения выделен жирным на втором рисунке.

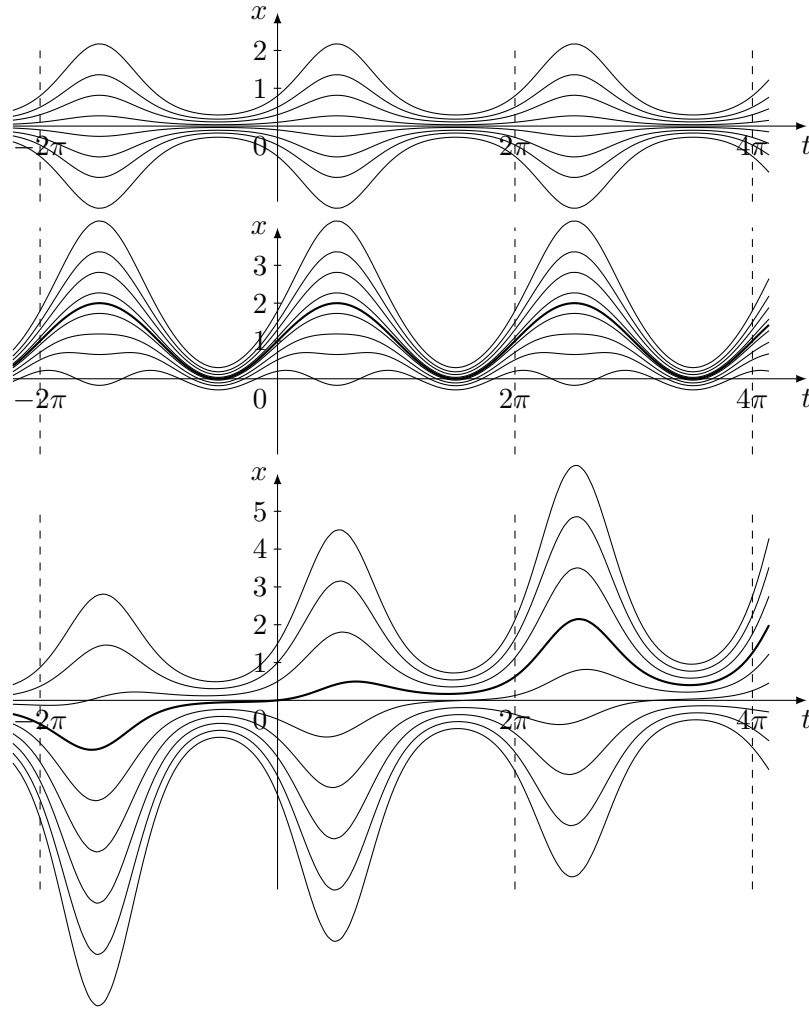


Рис. 3.18: Случай 2. Интегральные кривые однородного уравнения $\dot{x} = x \cos t$ и неоднородных уравнений $\dot{x} = x \cos t - \sin t \cos t$ (случай 2b: тождественное преобразование монодромии, все решения периодические), $\dot{x} = x \cos t + \frac{1}{10}e^{\sin t}$ (случай 2a: преобразование монодромии – сдвиг, периодических решений нет).

3.5 Задачи к главе 3

Приближенные методы решения дифференциальных уравнений

1. С помощью метода разложения в ряд найдите решения следующих уравнений:

- а) $\dot{x} = ax$ с начальным условием $x(0) = 1$;
- б) $\ddot{x} = -x$ с начальным условием $x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0$;
- в) $\ddot{x} = -4x$ с начальным условием $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 2$;
- г) $\ddot{x} = x$ с начальным условием $x(0) = 1, \dot{x}(0) = 1$;
- е) $\ddot{x} + 4\dot{x} + 3 = 0$ с начальным условием $x(0) = 1, \dot{x}(0) = -3$.

2. Напишите программу на известном вам языке программирования, которая приближенно решает дифференциальные уравнения методом Эйлера. Постройте графики приближенных решений уравнения а) $\dot{x} = -x$, б) $\dot{x} = x + 1$, в) $\dot{x} = (1+x)(1-x)$ с начальными условиями $x(0) = -1.5, -0.5, 0.5, 1.5$ на отрезке $[0, 5]$. Опишите, как ведут себя эти решения.

Попробуйте положить $n = 10, n = 100, n = 1000, n = 10000$; как меняется картинка в зависимости от n ?

3. Примените метод Эйлера к линейному уравнению с периодическими коэффициентами $\dot{x} = (\cos t - 0.5)x + \sin t$. Убедитесь, что решения с любыми начальными условиями приближаются к одному и тому же периодическому решению. Приближенно найдите значение этого периодического решения в нуле.

Объяснение такого поведения решений содержится в задаче 25. к разделу 3.4 “Линейные уравнения на прямой”.

4. Формула (3.3) метода Эйлера применима в многомерном случае, если f — отображение $f: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$, а $x_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ — вектор-функции. Напишите программу на известном вам языке программирования, которая приближенно решает дифференциальные уравнения вида $\dot{x} = v(x), x \in \mathbb{R}^2$, методом Эйлера.

Опробуйте вашу программу для уравнения Ван дер Поля:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= 3(1 - x_1^2)x_2 - x_1 \end{aligned} \quad (3.41)$$

с начальным условием $x(0) = (1, 1)$.

Найдите $x(5)$.

Нарисуйте длинный участок (приближенной) фазовой кривой $(x_1(t), x_2(t))$ и пронаблюдайте, что кривая наматывается на замкнутую кривую, которая соответствует периодическому решению уравнения (*предельному циклу*).

Приближенно вычислите период этого решения.

Автономные уравнения

5. Следующие уравнения дают модели роста популяции животных; $x > 0$ — количество животных. Нарисуйте фазовые кривые этих уравнений:

- a) $\dot{x} = x$: свободное размножение¹².
- b) $\dot{x} = x - x^2$: размножение с конкуренцией за пищу¹³.
- c) $\dot{x} = x - x^2 - 0.1$: к предыдущей модели добавлен отлов с постоянной квотой. Выясните, при каких начальных количествах животных популяция вымирает. Чему равен предельный размер популяции $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)$, если она не вымирает?
- d) $\dot{x} = x - x^2 - a$, $a > \frac{1}{4}$: хищнический отлов. Что означает такой фазовый портрет для популяции?
- e) $\dot{x} = x - x^2 - \frac{1}{4}$. Докажите, что квота $1/4$ соответствует максимальному постоянному отлову без вымирания популяции.
- f) $\dot{x} = x - x^2 - bx$, $b = \frac{1}{2}$: квота отлова зависит от размера популяции. Может ли вымереть популяция при таком отлове? Чему равен предельный размер популяции $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)$?

Сравните эту схему отлова с постоянным отловом из п. e). Примите во внимание эффективность отлова (количество пойманных животных) при $t \rightarrow +\infty$ и устойчивость популяции. Какой отлов кажется вам предпочтительнее?

6. Решите уравнения из пунктов a), b), e), f) предыдущей задачи.
7. Сопротивление воздуха свободно падающему телу пропорционально квадрату скорости тела, $f = cv^2$.
 - a) Пусть парашютист массы m выпрыгнул из самолета с нулевой скоростью. Найдите зависимость скорости падения парашютиста от времени (до раскрытия парашюта), считая известным значение коэффициента пропорциональности c .
 - b) Найдите предельное значение скорости падения парашютиста. Верно ли, что скорость падения парашютиста стремится к своему предельному значению экспоненциально? Как предельная скорость падения зависит от массы парашютиста¹⁴?
 - c) Предельная скорость парашютиста массы $m = 90$ кг составила 55 м/сек. Найдите коэффициент пропорциональности c .

¹²Закон Мальтуса. Robert Malthus, An Essay on the Principle of Population (1798).

¹³Логистическое уравнение. Эту модель роста популяции предложил бельгийский математик Пьер Франсуа Ферхюльст (1804 – 1849) в статье 1838 г. “Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement”. Correspondance mathématique et physique. 10: 113–121.

¹⁴Ответ на этот вопрос объясняет, почему у кота больше шансов выжить после падения с большой высоты, чем у человека.

8. Нарисуйте зависящее от параметра a семейство фазовых портретов уравнений $\dot{x} = v_a(x)$, если v_a имеет вид:
- $v_a(x) = x - x^2 + a$;
 - $v_a(x) = \frac{1}{1+x^2} + a$;
 - $v_a(x) = x^3 - x + a$;
 - $v_a(x) = ax - x^3$.
 - $v_a(x) = -x^4 + 2x^2 - a$;
 - $v_a(x) = x^4 - x^2 + a$.

9. Для каждого из следующих уравнений выясните, верно ли, что для любого начального условия решение задачи Коши единственно.
- $\dot{y} = f(y)$, где $f(y) = y \ln^2 |y|$ при $y \neq 0$; $f(0) = 0$.
 - $\dot{y} = f(y)$, где $f(y) = y \ln |y|$ при $y \neq 0$; $f(0) = 0$.

10. Нарисуйте интегральные кривые уравнения

$$\dot{x} = |\sin x|^\alpha$$

для $\alpha = \frac{1}{2}$; $\alpha = \frac{3}{2}$.

Как меняются эти кривые, когда α меняется от $\frac{1}{2}$ до $\frac{3}{2}$?

11. Для каких векторных полей v из следующего списка существует единственное решение уравнения $\dot{x} = v(x)$ с начальным условием в особой точке поля v ?
- $v(x) = |x|^\alpha$, $\alpha > 0$;
 - $v(x) = \sqrt{x^2 - C}$, $C = -1; 0; 1$;
 - $v(x) = \sqrt{\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{2}}$;
 - $v(x) = \sin x + C$, $C = 0$; $C = 1$.

12. Найдите преобразование фазового потока на прямой за время t для следующих автономных уравнений:
- $\dot{x} = ax$;
 - $\dot{x} = x^2$;
 - $\dot{x} = \frac{f(x)}{f'(x)}$, где f — диффеоморфизм прямой;
 - $\dot{x} = \sin x$.

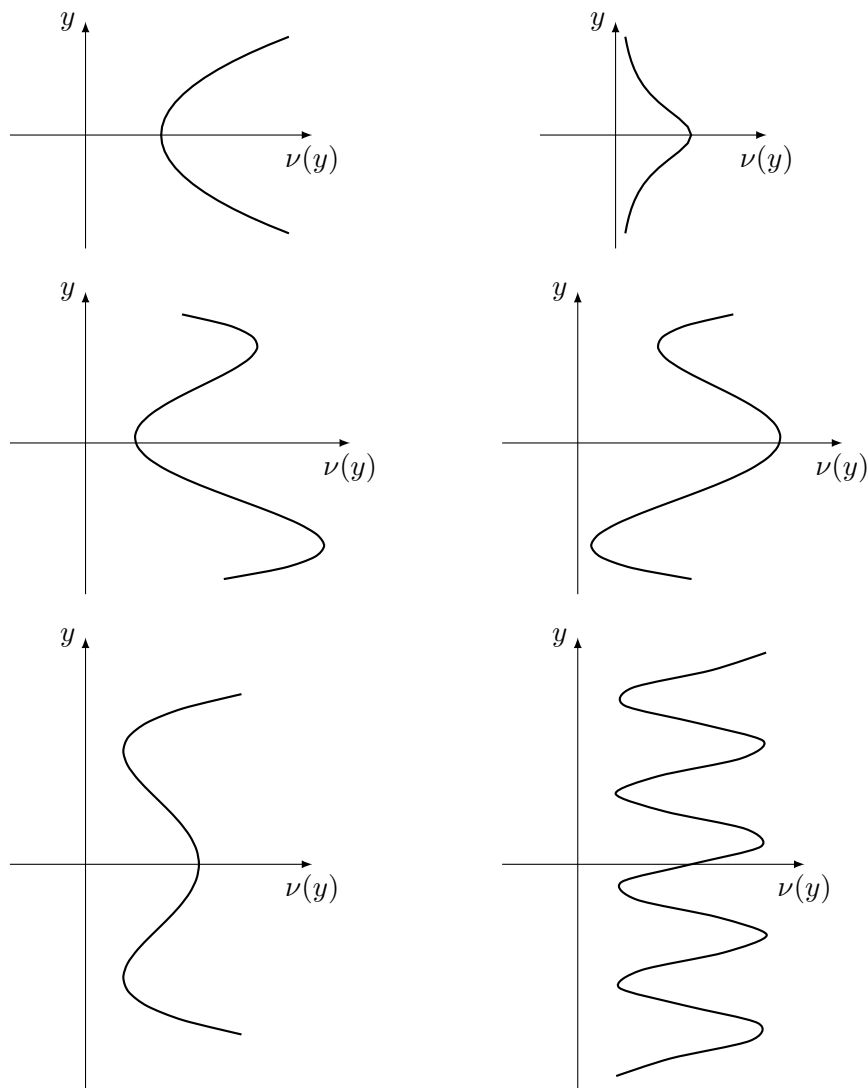
13. Докажите закон отражения света от зеркала (“угол падения равен углу отражения”), пользуясь принципом Ферма. Считайте зеркало а) плоским; б) произвольной гладкой поверхностью.

14. Нарисуйте ход лучей на плоскости, считая, что показатель преломления зависит только от вертикальной координаты на плоскости и равен

а) $\nu(y) = \frac{1}{y}$; найдите уравнение для кривых, по которым распространяется свет.

Эти кривые — геодезические в метрике Лобачевского¹⁵ в верхней полуплоскости, то есть прямые в геометрии Лобачевского.

б) То же задание — для C^2 -гладкой функции $\nu(y)$, заданной графиком:



¹⁵Николай Иванович Лобачевский (1792 – 1856) — математик, построивший первую из неевклидовых геометрий — гиперболическую геометрию. Гиперболической геометрией ранее занимался Карл Фридрих Гаусс (однако не публиковал свои работы) и — независимо от Лобачевского — Януш Больяи.

Метод разделения переменных

15. Найдите и нарисуйте:

a) фазовые кривые системы $\dot{x} = x$, $\dot{y} = y$ и интегральные кривые уравнения $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$;

b) фазовые кривые системы $\dot{x} = x$, $\dot{y} = -y$ и интегральные кривые уравнения $\frac{dx}{dy} = -\frac{x}{y}$;

фазовые кривые следующих систем:

c) $\dot{x} = x$, $\dot{y} = 2y$;

d) $\dot{x} = y$, $\dot{y} = x$;

e) $\dot{x} = x^2$, $\dot{y} = -y$;

f) $\dot{x} = y$, $\dot{y} = x - x^2$;

g) $\dot{x} = x^2 - 1$, $\dot{y} = 4 - y^2$;

h) $\dot{x} = x^2 - 1$, $\dot{y} = y^2 - 1$;

i) $\dot{x} = \sin x$, $\dot{y} = \cos y$.

16. Нарисуйте фазовые кривые систем

a) $\dot{x} = \frac{\sin x}{x}$, $\dot{y} = y$;

b) $\dot{x} = \frac{\sin x}{x}$, $\dot{y} = y \cos y$;

c) $\dot{x} = x^2(1 - x)^2$, $\dot{y} = y$.

Линейные уравнения на прямой

17. Пусть x — температура воздуха в доме, который не отапливается. Скорость изменения температуры в доме пропорциональна разности температур в доме и на улице. Пусть температура на улице меняется периодически по закону $T(t) = \sin(at)$. Параметр a выбран таким образом, что период функции T равен продолжительности суток. Выясните, как меняется температура воздуха в доме с течением времени.

Покажите, что при больших значениях t зависимость этой температуры от времени почти периодическая. По прошествии достаточно большого времени, в какое время суток в доме холоднее всего? Как зависит ответ от коэффициента пропорциональности?

(Если коэффициент пропорциональности большой, дом плохо защищает от холода; если маленький — хорошо защищает от холода).

18. Докажите, что если первообразная функции $a(t)$ стремится к $-\infty$ при $t \rightarrow +\infty$, то разные решения линейного уравнения $\dot{x} = a(t)x + b(t)$ сближаются при $t \rightarrow +\infty$. Какое условие следует наложить на функцию $a(t)$, чтобы решения сближались при $t \rightarrow -\infty$?

19. Решите уравнения и нарисуйте их интегральные кривые. Верно ли, что разные решения уравнения сближаются при $t \rightarrow +\infty$? а при $t \rightarrow -\infty$?
- $\dot{x} = x + t$;
 - $\dot{x} = -x + t$;
 - $\dot{x} = -x/t + 1$;
 - $\dot{x} = x/t + 1$.
20. Докажите, что если первообразная функции $a(t)$ неограниченно возрастает при $t \rightarrow +\infty$, то у линейного уравнения $\dot{x} = a(t)x + b(t)$ может быть только одно решение, ограниченное при $t \rightarrow +\infty$ (возможно, ни одного).
21. Решите уравнение $x' + x \operatorname{ctg} t = 1$. Найдите решение, которое имеет предел при $t \rightarrow 0$, и докажите, что такое решение только одно.
22. Может ли линейное неоднородное уравнение с T -периодическими коэффициентами на прямой иметь периодическое решение $x(t)$ такое, что T не является периодом этого решения?
23. Найти все значения α , при которых уравнение

$$\dot{x} = a(t)x + b(t)$$

имеет единственное 2π -периодическое решение, для

- $a(t) = \sin t + \alpha$, $b(t) = \cos^2 t$;
- $a(t) = \sin^2 t + \alpha$, $b(t) = \cos 2t$;
- $a(t) = \sin^3 t + \alpha$, $b(t) = \sin t$;
- $a(t) = (\sin t + \alpha)x$, $b(t) = \cos t$;
- $a(t) = (\sin 3t + \cos 2t + \alpha)$, $b(t) = 1$;
- $a(t) = \sin^4 t + \alpha \sin^2 t + 2\alpha$, $b(t) = \cos^2 t$.

Решение пунктов а), б): В силу теоремы 3.4.6, вид функции $b(t)$ не влияет на ответ. Функция $a(t)$ во всех пунктах — тригонометрический многочлен, то есть имеет вид $d_0 + \sum_1^N c_k \sin kt + \sum_1^N d_k \cos kt$. Интеграл такой функции за период $T = 2\pi$ равен $2\pi d_0$, и отличен от нуля в том и только том случае, когда свободный член d_0 отличен от нуля. В первой задаче свободный член равен α , во второй $d_0 = \frac{1}{2} + \alpha$. Поэтому к первым двум задачам ответы такие:

- $\alpha \neq 0$;
- $\alpha \neq -\frac{1}{2}$.

24. Найти все значения α , при которых уравнения из предыдущей задачи имеют хотя бы одно 2π -периодическое решение.

Указание: Эта задача приводит к исследованию интегралов, которые не берутся. Однако не обязательно брать интеграл, чтобы убедиться, что он отличен от нуля.

25. Докажите, что если интеграл $I = \int_0^T a(t)dt$ положителен, то все решения уравнения $\dot{x} = a(t)x + b(t)$ с T -периодическими функциями a, b удаляются от периодического решения при $t \rightarrow +\infty$, а если этот интеграл отрицателен, приближаются к нему сколь угодно близко.

Ответы к некоторым задачам

- 1. а) $x(t) = e^{at}$; б) $x(t) = \cos t$; в) $x(t) = \sin 2t$; г) $x(t) = e^t$; е) $x(t) = e^{-3t}$.
- 5. в): популяция не вымрет при начальном количестве животных более $\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{3}{20}}$.
 В этом случае предельный размер популяции $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{20}}$.
 г): при хищническом отлове популяция вымрет при любом начальном количестве животных.
 ф): если квота отлова линейно зависит от размера популяции, популяция не вымрет ни при каком начальном количестве животных. Предельный размер популяции равен $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 1 - b = \frac{1}{2}$, и в пределе отлов равен $1/4$. Итак, в пунктах е) и ф) в пределе отлов одинаков, но при этом в пункте е) популяция находится на грани вымирания (малейшее увеличение отлова — и она вымрет при любом начальном количестве животных). Значит, схема отлова из пункта ф) предпочтительнее.
- 6. Решения уравнений: а) $x(t) = Ce^t$; б) $x(t) = \frac{Ce^t}{1+Ce^t} = \frac{1}{1+ke^{-t}}$ при всех k , а также постоянные решения $x(t) \equiv 0, 1$; в) $x(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{t+C}$, а также постоянное решение $x(t) = \frac{1}{2}$; г) $x(t) = \frac{1-b}{1+Ce^{-(1-b)t}}$ и постоянные решения $x(t) \equiv 0, 1 - b$.
 В рамках модели эти решения имеют смысл только при тех значениях t , при которых количество животных положительно.
- 7. а) $v(t) = \sqrt{\frac{mg}{c}} \cdot \frac{1+ke^{-t\sqrt{cg/m}}}{1-ke^{-t\sqrt{cg/m}}}$. б) значение скорости экспоненциально быстро сходится к предельному значению $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = \sqrt{\frac{mg}{c}}$; предельная скорость пропорциональна корню из массы парашютиста. в) $c \approx \frac{36}{121} \frac{\text{кг}}{\text{м}} \approx 0.3 \frac{\text{кг}}{\text{м}}$.
- 9. а) да; б) да.
- 11. а) При $\alpha \geq 1$; б) при $C = -1$ особых точек нет, решение всегда единственно; при $C = 0$ единственность сохраняется, при $C = 1$ нарушается. в) единственность нарушается. г) единственность сохраняется.
- 12. а) $g_v^t x = e^{at}x$; б) $g_v^t x = \frac{x}{1-tx}$ (определено при $t < \frac{1}{x}$ для положительных x и при $t > -\frac{1}{x}$ для отрицательных); в) $g_v^t x = f^{-1}(e^t f(x))$; г) $g_v^t x = 2 \operatorname{arctg}(e^t \operatorname{tg} \frac{x}{2}) + 2\pi k$ при $x \in (2\pi k - \pi, 2\pi k + \pi)$ и $g_v^t x = x$ при $x = \pi n$.

3 Элементарные методы решения дифференциальных уравнений

- 17. $x(t) = ce^{-kt} + \frac{-ak}{k^2+a^2} \cos at + \frac{k^2}{k^2+a^2} \sin at$. При больших t первое слагаемое стремится к нулю, и $x(t)$ становится почти периодическим. Эта периодическая функция равна $\frac{-ak}{k^2+a^2} \cos at + \frac{k^2}{k^2+a^2} \sin at = A \sin(a(t - \varphi))$, где $A = \frac{k}{\sqrt{k^2+a^2}}$, $\varphi = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{a}{k}$, и потому её минимум достигается в момент времени $\frac{3}{2}\pi a + a\varphi + 2\pi an$ — через φ -ю долю суток после точки минимума температуры на улице $T(t) = \sin at$. Заметим, что временной сдвиг φ растёт с убыванием k : чем лучше дом защищает от холода, тем позже наступает этот момент. Стоит также отметить, что значение минимальной температуры ($-A$) растёт с убыванием k .
- 18. Следует потребовать, чтобы первообразная стренилась к $-\infty$ при $t \rightarrow -\infty$.
- 21. $x(t) = \frac{c-\cos t}{\sin t}$; единственное решение, имеющее предел в нуле, соответствует $c = 1$.
- 22. Нет, не может.
- 23. c) $\alpha \neq 0$; d) $\alpha \neq 0$; e) $\alpha \neq 0$; f) $\alpha \neq -\frac{3}{20}$.
- 24. a) $\alpha \neq 0$; b) $\alpha \in \mathbb{R}$; c) $\alpha \in \mathbb{R}$; d) $\alpha \neq 0$; e) $\alpha \neq 0$; f) $\alpha \neq -\frac{3}{20}$.

4 Симметрии и законы сохранения

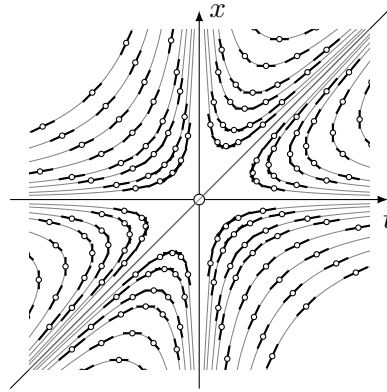


Рис. 4.1: Поле направлений и интегральные кривые однородного уравнения

4.1 Симметрии уравнений и замена переменных

В разделе 3.2 мы уже встречались с симметриями дифференциальных уравнений. Поле направлений автономного уравнения сохраняется при любом сдвиге $t \mapsto t + C$, а поле направлений уравнения вида $\dot{x} = g(t)$ — при любом сдвиге $x \mapsto x + C$.

В этом параграфе мы узнаем, как симметрии помогают решить дифференциальное уравнение. Сначала разберем еще один пример симметрии.

4.1.1 Однородные уравнения

Однородными называются уравнения вида

$$\frac{dx}{dt} = F\left(\frac{x}{t}\right) \quad (4.1)$$

Легко доказать следующее предложение:

Предложение 4.1.1. *Поле направлений уравнения (4.1) не меняется при растяжении $t \mapsto \lambda t$, $x \mapsto \lambda x$. Другими словами, если $t = t(\tau)$, $x = x(\tau)$ — интегральная кривая уравнения (4.1) и $\lambda \neq 0$, то $t = \lambda t(\tau)$, $x = \lambda x(\tau)$ — также интегральная кривая этого уравнения.*

Предложение 4.1.1 показывает, что у нашего уравнения есть *симметрия* — семейство отображений $(t, x) \rightarrow (\lambda t, \lambda x)$, которые сохраняют множество интегральных кривых.

В области $t \neq 0$ определим функцию $u(t, x) = \frac{x}{t}$ (можно сказать иначе: введем координаты (t, u) , где $u = \frac{x}{t}$). Тогда для любого решения исходного уравнения $x(t)$ выполнено

$$\frac{dx}{dt} = F(u),$$

причем

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d(ut)}{dt} = u + t \frac{du}{dt}.$$

В последнем равенстве выражение du/dt — это производная функции $u(t, x(t))$ по t . Обозначим $u(t) = u(t, x(t))$. Итак,

$$\frac{du}{dt} = \frac{F(u) - u}{t}.$$

Метод разделения переменных даёт

$$\int_{u_0}^{u(t)} \frac{dv}{F(v) - v} = \int_{t_0}^t \frac{d\tau}{\tau} = \ln |t| - \ln |t_0|.$$

Мы получили неявную формулу для функции $u(t)$. Найдя функцию $u(t)$, легко найти и функцию $x(t)$, так как $u(t) = u(t, x(t)) = x(t)/t$.

Таким образом, однородные уравнения мы тоже научились решать. Оказывается, что наличие симметрии позволяет уменьшить число уравнений в системе, а если уравнение одно — решить его.

4.1.2 Замена переменной

Многие дифференциальные уравнения удаётся решить или упростить с помощью замены переменной.

4.1.2.1 Аналитический подход

Рассмотрим дифференциальное уравнение $\dot{x} = f(t, x)$ (одномерное или многомерное). Пусть задан диффеоморфизм g на фазовом пространстве.

Определение 4.1.2. Сделать замену переменной $y = g(x)$ в уравнении $\dot{x} = f(t, x)$ — значит выписать новое дифференциальное уравнение $\dot{y} = \tilde{f}(t, y)$, которое обладает следующим свойством: функция $x(t)$ является решением исходного уравнения если и только если функция $y(t) := g(x(t))$ является решением нового уравнения.

Пусть задан диффеоморфизм $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Сделать замену времени $t = h(\tau)$ в уравнении $\dot{x} = f(t, x)$ — значит выписать новое уравнение $\tilde{x}'_\tau = \tilde{f}(\tau, \tilde{x})$, которое обладает следующим свойством: функция $x(t)$ является решением исходного уравнения если и только если функция $\tilde{x}(\tau) := x(h(\tau))$ является решением нового уравнения.

Следующая выкладка показывает, как делать замены в дифференциальных уравнениях. Мы увидим, что замену можно сделать не решая уравнения. Это позволяет применять замены переменных для того, чтобы приводить дифференциальные уравнения к более простому виду и решать их.

Пусть g — диффеоморфизм. Пусть $x(t)$ — решение уравнения $\dot{x} = f(t, x)$; положим $y(t) = g(x(t))$. Тогда

$$\dot{y} = g'(x)\dot{x} = g'(x)f(t, x) = g'(g^{-1}(y)) \cdot f(t, g^{-1}(y)), \quad (4.2)$$

поэтому функция $y(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{y} = g'(g^{-1}(y)) \cdot f(t, g^{-1}(y)). \quad (4.3)$$

Мы приходим к следующему определению.

Определение 4.1.3. Пусть задано уравнение $\dot{x} = f(t, x)$ в области $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^{n+1}$ и диффеоморфизм $g: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$. Замена переменной $y = g(x)$ в уравнении $\dot{x} = f(t, x)$ — это замена уравнения $\dot{x} = f(t, x)$ на уравнение (4.3).

Наша выкладка (4.2), (4.3) показывает, что новое уравнение удовлетворяет свойству из определения 4.1.2.

Упражнение 55. Сделайте замену времени $t = h(\tau)$ в уравнении $\dot{x} = f(t, x)$. Дайте формальное определение замены времени, аналогичное определению 4.1.3.

Упражнение 56. В дифференциальном уравнении $x'_t = x$ сделайте замены

- $y = x^3$;
- $t = \tau^2$.

Приводит ли к каким-нибудь трудностям тот факт, что отображение $h(\tau) = \tau^2$ — не диффеоморфизм?

Решение упражнения. Проще применить формулу для производной сложной функции, чем запоминать формулу (4.3). Пусть $x(t)$ — решение уравнения $x'_t = x$. Тогда

- $\frac{dy}{dt} = \frac{d(x^3)}{dt} = 3x^2 \frac{dx}{dt} = 3x^3$. Но так как $x = \sqrt[3]{y}$, мы получаем, что $y' = 3y$. Итак, если $x(t)$ — решение уравнения $x' = x$, то $y(t) = x^3(t)$ — решение уравнения $y' = 3y$.

И действительно, решение нового уравнения — функция $y(t) = Ce^{3t}$, и она получается из решения старого уравнения возведением в куб.

- Заметим, что $\frac{d\tilde{x}}{d\tau}|_{\tau_0} = \frac{dx}{dt}|_{t(\tau_0)} \cdot \frac{dt}{d\tau}|_{\tau_0} = \frac{dx}{dt}|_{\tau_0^2} \cdot 2\tau_0 = x(\tau_0^2) \cdot 2\tau_0 = 2\tau_0 \tilde{x}(\tau_0)$. Поэтому если функция $x(t)$ удовлетворяет уравнению $x'_t = x$, то функция $\tilde{x}(\tau) = x(\tau^2)$ удовлетворяет уравнению $\tilde{x}'_\tau = 2\tau \tilde{x}$.

Действительно, решения нового уравнения имеют вид $\tilde{x}(\tau) = Ce^{\tau^2}$; от решений старого уравнения $x(t) = Ce^t$ они отличаются как раз заменой $t = \tau^2$.

Строго говоря, замена $t = \tau^2$ не удовлетворяет определению 4.1.3, потому что отображение $h(\tau) = \tau^2$ — не диффеоморфизм. Такую замену можно делать только в областях $t > 0$, $\tau > 0$. Тем не менее, замену $t = \tau^2$ можно применить для решения нового уравнения $\tilde{x}'_\tau = 2\tau \tilde{x}$. Формально говоря, следует сделать замену $t = \tau^2$ в области $\tau > 0$ и отдельно — такую же замену в области $\tau < 0$. В каждой из этих областей отображение $t = \tau^2$ — диффеоморфизм. В каждой из областей после замены мы приходим к уравнению $x'_t = x$, решением которого является функция $x(t) = ce^t$. Поэтому решением старого уравнения (как в области $\tau > 0$, так и при $\tau < 0$) является функция $x(\tau) = ce^{\tau^2}$.

4.1.2.2 Геометрический подход

Мы дадим геометрическое определение замены переменной для общего случая: в уравнении $\dot{x} = f(t, x)$, $(t, x) \in \Omega_1$ мы научимся делать замену $(\tau, y) = h(t, x)$, где $h: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ — диффеоморфизм областей $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Напомним, что поля направлений — то же самое, что дифференциальные уравнения.

Определение 4.1.4. Пусть в области Ω_1 задано поле направлений l . Пусть задан диффеоморфизм $h: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$. Тогда в области Ω_2 возникает образ поля направлений под действием диффеоморфизма — поле направлений $\tilde{l} = h_*l$: в точке $q = h(p)$ проведена прямая

$$\tilde{l}(q) = dh|_p l(p). \quad (4.4)$$

В правой части равенства — образ прямой $l(p)$ под действием линейного отображения $dh|_p$ (дифференциала h в точке p).

Таким образом, мы определили образ поля направлений — то есть образ дифференциального уравнения — под действием диффеоморфизма h . В этом определении важно, что h — инъективное отображение, иначе в одной и той же точке образа $h(a) = h(b)$ возникло бы два разных направления $dh|_a l(a)$ и $dh|_b l(b)$, и новое поле направлений не было бы корректно определено.

Упражнение 57. Докажите, что образ поля направлений для уравнения $\dot{x} = f(t, x)$ под действием диффеоморфизма $h(t, x) = (t, g(x))$ является полем направлений для уравнения (4.3), то есть геометрическое и аналитическое определения замены переменной $y = g(x)$ совпадают.

Докажите аналогичное утверждение для замены времени.

Докажем, что при замене переменной $(\tau, y) = h(t, x)$ решения уравнения переходят в решения, то есть интегральные кривые переходят в интегральные кривые.

Предложение 4.1.5. 1. Пусть l — поле направлений в области $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^{n+1}$, пусть $h: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2 \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — диффеоморфизм. Тогда образ любой интегральной кривой поля направлений l под действием h является интегральной кривой поля направлений $\tilde{l} := h_*l$.

Верно и обратное:

2. Пусть поля направлений l, \tilde{l} соответствуют C^1 -гладким функциям f, \tilde{f} . Пусть диффеоморфизм $h: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ переводит любую интегральную кривую поля направлений l в интегральную кривую поля направлений \tilde{l} . Тогда $\tilde{l} = h_*l$.

Доказательство. 1. Пусть $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$, $\gamma(s) = (\gamma_1(s), \gamma_2(s))$ — интегральная кривая поля направлений l . Тогда её касательный вектор в точке $\gamma(s_0) =: p$ параллелен прямой поля направлений $l(p)$.

По формуле дифференцирования сложной функции, у кривой $h(\gamma)$ касательный вектор в точке $q = h(p)$ равен $dh|_p \dot{\gamma}(s_0)$. Значит, он параллелен прямой $dh|_p l(p) = \tilde{l}(q)$, откуда следует, что $h(\gamma(s))$ — интегральная кривая поля направлений \tilde{l} .

2. Рассмотрим произвольную точку $p \in \Omega$. Пусть γ — интегральная кривая уравнения $\dot{x} = f(t, x)$, проходящая через точку p ; она существует по теореме 2.4.11. Тогда $h \circ \gamma$ — интегральная кривая поля направлений \tilde{l} , проходящая через точку $q = h(p)$.

По определению интегральной кривой, вектор скорости кривой γ в точке p содержится в прямой поля направлений $l(p)$, а вектор скорости кривой $h \circ \gamma$ в точке $h(p)$ содержится в прямой поля направлений $\tilde{l}(q)$. С другой стороны, по теореме о производной сложной функции, касательный вектор к кривой $h \circ \gamma$ в точке $h(p) = q$ равен $dh|_p \dot{\gamma}(p)$. Значит, $\tilde{l}(q) = dh|_p l(p)$, то есть $\tilde{l} = h_* l$. \square

Из этого предложения следует, что все наши определения замены переменной равносильны.

Предложение 4.1.6. *Для уравнения $\dot{x} = f(t, x)$ с C^1 -гладкой правой частью определения 4.1.2, 4.1.3 и 4.1.4 для замены переменной $y = g(x)$ равносильны.*

Доказательство. (4.1.4 \Rightarrow 4.1.2) Пусть в уравнении $\dot{x} = f(t, x)$ с полем направлений l мы делаем замену $y = g(x)$, пользуясь определением 4.1.4. Это означает, что мы полагаем $H(t, x) = (t, g(x))$ и выписываем новое уравнение $\dot{y} = \tilde{f}(t, y)$, которое соответствует полю направлений $H_* l$. По п.1 предложения 4.1.5, отображение H переводит интегральные кривые уравнения $\dot{x} = f(t, x)$ в интегральные кривые уравнения $\dot{y} = \tilde{f}(t, y)$. Так как интегральные кривые — это графики решений, мы получаем, что для любого решения первого уравнения $x(t)$ функция $g(x(t))$ является решением нового уравнения. Это и означает, что мы сделали замену переменной в смысле определения 4.1.2.

(4.1.2 \Rightarrow 4.1.4) Пусть мы выписали уравнение $\dot{y} = \tilde{f}(t, y)$, удовлетворяющее свойству из определения 4.1.2: если x — решение исходного уравнения $\dot{x} = f(t, x)$, то $y(t) = g(x(t))$ — решение нового уравнения. Это означает, что интегральные кривые поля направлений l под действием отображения $H: (t, x) \mapsto (t, g(y))$ переходят в интегральные кривые нового уравнения. Значит, по п.2 предложения 4.1.5, новое уравнение соответствует полю направлений $\tilde{l} = H_* l$.

Заметим, что определение 4.1.4 однозначно определяет новое уравнение. В силу равносильности определений 4.1.4 и 4.1.2, **есть только одно уравнение $\dot{y} = \tilde{f}(t, y)$, которое удовлетворяет свойству из определения 4.1.2.**

(4.1.3 \Leftrightarrow 4.1.2) Давая определение 4.1.3, мы убедились, что новое уравнение удовлетворяет определению 4.1.2. Так как оба определения 4.1.2 и 4.1.3 однозначно определяют новое уравнение, они равносильны. Впрочем, равносильность этих определений можно проверить и непосредственно, см. упражнение 57.

Итак, все три определения равносильны. \square

Упражнение 58. *Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение о замене времени. Обратите внимание на то, что диффеоморфизму $(t, x) \mapsto (h(t), x)$ соответствует замена $t = h^{-1}(\tau)$.*

Напоследок получим аналог формулы (4.3) для замены переменной общего вида: $H = (h, g): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, где $\tau = h(t, x)$, $y = g(t, x)$. Такие замены мы не рассматривали в предыдущем разделе.

4.1.3. Замена переменной для векторных полей

Пусть $x(t)$ — решение уравнения $\dot{x} = f(t, x)$. Положим $\tau(t) := h(t, x(t))$, $y(t) = g(t, x(t))$. Тогда $(\tau(t), y(t))$ — образ интегральной кривой $(t, x(t))$ под действием H . Имеем

$$\begin{aligned}\dot{\tau} &= (h'_t + h'_x \dot{x})|_{t, x(t)} = (h'_t + h'_x f)|_{H^{-1}(\tau, y)} \\ \dot{y} &= (g'_t + g'_x \dot{x})|_{t, x(t)} = (g'_t + g'_x f)|_{H^{-1}(\tau, y)}\end{aligned}\quad (4.5)$$

Поэтому кривая $(\tau(t), y(t))$ является фазовой кривой следующей системы уравнений на плоскости:

$$\begin{aligned}\dot{\tau} &= (h'_t + h'_x f)|_{H^{-1}(\tau, y)} \\ \dot{y} &= (g'_t + g'_x f)|_{H^{-1}(\tau, y)}\end{aligned}\quad (4.6)$$

Значит, по теореме 3.3.2 о связи фазовых и интегральных кривых, эта кривая является интегральной кривой следующего уравнения:

$$y'_\tau = \frac{(g'_t + g'_x f)|_{H^{-1}(\tau, y)}}{(h'_t + h'_x f)|_{H^{-1}(\tau, y)}}. \quad (4.7)$$

Итак, интегральные кривые уравнения $\dot{x} = f(t, x)$ под действием H переходят в интегральные кривые уравнения (4.7). По предложению 4.1.5 (часть 2), поле направлений уравнения $\dot{x} = f(t, x)$ переходит в поле направлений уравнения (4.7) под действием H . Итак, уравнение (4.7) и есть результат замены переменной $\tau = h(t, x)$, $y = g(t, x)$ в уравнении $\dot{x} = f(t, x)$.

Упражнение 59. Проверьте непосредственно, что дифференциал отображения H переводит поле направлений уравнения $\dot{x} = f(t, x)$ в поле направлений уравнения (4.7).

Пример 4.1.7. Что происходит при замене $h(t, x) = (t, x^3)$ (см. упражнение 56)? Если прямая поля направлений в точке (t, x) шла вдоль вектора (v_1, v_2) , то у нового поля направлений в точке (t, x^3) будет прямая вдоль вектора $dh|_{(t, x)}(v_1, v_2) = (v_1, 3x^2 v_2)$. Это соответствует формуле $\frac{dy}{dt} = \frac{d(x^3)}{dt} = 3x^2 \frac{dx}{dt}$.

А что происходит при замене $\tilde{h}(t, x) = (\tau, x) = (\sqrt{t}, x)$? У нового поля направлений в точке (\sqrt{t}, x) будет проведена прямая вдоль вектора $d\tilde{h}|_{(t, x)}(v_1, v_2) = (\frac{1}{2\sqrt{t}}v_1, v_2)$. Поэтому угловой коэффициент v_2/v_1 умножится на $2\sqrt{t}$. Это соответствует формуле $\frac{dx}{d\tau} = \frac{dx}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{dx}{dt} \cdot 2\tau$.

4.1.3 Замена переменной для векторных полей

Для автономного уравнения $\dot{x} = v(x)$ в области $x \in \Omega_1 \subset \mathbb{R}^n$ разумно рассмотреть частный случай замены переменной — замену переменной в фазовом пространстве, то есть действие диффеоморфизма фазового пространства $H: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ на векторное поле. Диффеоморфизм H соответствует замене переменной $(t, x) \mapsto h(t, x) = (t, H(x))$ в расширенном фазовом пространстве $\mathbb{R} \times \Omega_1$.

Напомним, что векторное поле — это то же самое, что автономное дифференциальное уравнение.

Определение 4.1.8. Пусть в области $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^n$ задано векторное поле $v(x)$, $x \in \Omega_1$. Пусть задан диффеоморфизм $H: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$, где $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$. Тогда в области Ω_2 возникает образ векторного поля под действием диффеоморфизма — векторное поле $\tilde{v} = H_*v$: в точке $y = H(x)$ приложен вектор

$$\tilde{v}(y) = dH|_x v(x). \quad (4.8)$$

В правой части равенства — образ вектора $v(x)$ под действием линейного отображения $dH|_x$ (дифференциала H в точке x).

Докажем, что соответствие векторных полей и решений автономных дифференциальных уравнений сохраняется при заменах переменной.

Предложение 4.1.9. Пусть v — векторное поле в области $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^n$, пусть $H: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$ — диффеоморфизм. Тогда образ любой фазовой кривой векторного поля v под действием H является фазовой кривой поля $\tilde{v} = H_*v$.

Доказательство. Пусть $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega_1$, $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ — фазовая кривая поля v . Тогда её касательный вектор в точке $\gamma(t_0)$ равен $v(\gamma(t_0))$.

У кривой $H(\gamma(t))$, по формуле дифференцирования сложной функции, касательный вектор в точке $H(\gamma(t_0))$ равен $dH_{\gamma(t_0)}\dot{\gamma}(t_0)$. Однако

$$dH_{\gamma(t_0)}\dot{\gamma}(t_0) = dH_{\gamma(t_0)}v(\gamma(t_0)) = H_*v(\gamma(t_0)),$$

поэтому $H(\gamma(t))$ — фазовая кривая поля \tilde{v} . □

4.1.4 (*) Векторные поля на поверхностях и другой подход к замене переменной для векторных полей

В этом разделе мы определим векторные поля на поверхностях (например, на торе или сфере) и замену переменной для них. Определения, которые мы дадим в этом разделе, работают и на любом абстрактном многообразии, которое задано атласом карт.

Для начала дадим определение касательного вектора к кривой.

Раньше мы определяли вектор скорости кривой таким образом:

Определение 4.1.10. Пусть $I = [0, 1]$ — отрезок на вещественной прямой. Вектор скорости кривой $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ в точке $\varphi(t)$ — это предел $\dot{\varphi}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h}$.

Но для того, чтобы такое определение имело смысл, надо уметь вычитать, то есть надо ввести на нашем пространстве аффинную структуру. На поверхности в \mathbb{R}^n естественной аффинной структуры нет. Далее, если мы примем это определение, нам придется дополнительно разбираться в том, как ведет себя вектор скорости кривой при заменах координат. Дадим новое определение, которое не зависит от аффинной структуры; по нему будет видно, что происходит с векторами при заменах координат.

Пусть M — поверхность в \mathbb{R}^n (частный случай $M = \mathbb{R}^n$ мы тоже рассматриваем). Аналогичные понятия можно ввести для абстрактного многообразия, заданного с помощью атласа карт, но мы не будем обсуждать, как это делается.

4.1.4. (*) Векторные поля на поверхностях и другой подход к замене переменной для векторных полей

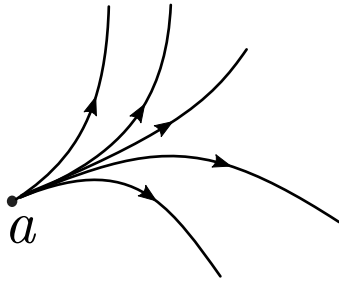


Рис. 4.2: Вектор, приложенный в точке p

Определение 4.1.11. Введем отношение эквивалентности на гладких кривых, лежащих в M и проходящих через точку p : две кривые φ, ψ с $\varphi(0) = \psi(0) = p$ эквивалентны, если $\text{dist}(\varphi(t), \psi(t)) = o(t)$ при $t \rightarrow 0$.

Тогда *вектор v , приложенный в точке p поверхности M* , — это класс эквивалентности C^1 -гладких кривых $\varphi: I \rightarrow M, \varphi(0) = p$, относительно такого отношения эквивалентности. Множество всех векторов, приложенных в точке p , обозначается $T_p M$.

Здесь $\text{dist}(a, b) = |a - b|$ — обычная евклидова метрика в \mathbb{R}^n . Заметим, что эквивалентные кривые касаются в точке p (кроме случая, когда касательный вектор равен нулю). Для поверхностей в \mathbb{R}^n касательный вектор можно отождествить с общим вектором скорости кривых из его класса эквивалентности. Такой вектор всегда лежит в касательной плоскости к поверхности. Стандартная терминология получится, если для ненулевых векторов вместо слов «кривая принадлежит классу эквивалентности v , где $v \in T_p M$ » говорить «кривая имеет вектор скорости $v \in T_p M$ в точке $p \in M$ ».

Векторное поле на M — это отображение, которое каждой точке $p \in M$ сопоставляет пару (p, v) , где $v \in T_p M$. Теперь мы можем определить понятие решения автономного дифференциального уравнения:

Определение 4.1.12. Пусть v — векторное поле на M . Тогда решение φ уравнения $\dot{x} = v(x)$ — это кривая, которая входит в класс эквивалентности $v(p) \in T_p M$ для каждой своей точки p .

Теперь рассмотрим *гладкое отображение $H: M_1 \rightarrow M_2$ поверхностей в \mathbb{R}^n* , то есть ограничение гладкого отображения $H: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ на поверхность M_1 . Под действием гладкого отображения эквивалентные кривые переходят в эквивалентные. Действительно, пусть кривые $\varphi(t), \psi(t)$, проходящие через точку p , эквивалентны: $\varphi(0) = \psi(0) = p$ и $|\varphi(t) - \psi(t)| = o(t)$. На шаре с центром p гладкое отображение всегда липшицево (лемма 2.4.4) с некоторой константой Липшица L , поэтому

$$|H(\varphi(t)) - H(\psi(t))| \leq L|\varphi(t) - \psi(t)| = o(t),$$

то есть кривые $H(\varphi(t))$ и $H(\psi(t))$, проходящие через точку $H(p)$, эквивалентны. Значит, мы можем определить действие диффеоморфизма на классы эквивалентности

4 Симметрии и законы сохранения

кривых — на векторы из $T_p M_1$, а также на векторные поля.

Определение 4.1.13. Пусть $H: M_1 \rightarrow M_2$ — диффеоморфизм, определенный в точке p . Тогда его действие на векторах, приложенных в точке p определяется следующим образом.

Пусть $v \in T_p M_1$ — вектор, то есть класс эквивалентности кривых, проходящих через точку p . Пусть кривая $\varphi: I \rightarrow M_1$ — представитель этого класса. Пусть $\tilde{\varphi} := H \circ \varphi$. Тогда, по определению, вектор $H_* v \in T_{H(p)} M_2$ — это класс эквивалентности, содержащий кривую $\tilde{\varphi}$.

Исходя из этого определения, выпишем формулу, описывающую связь между \tilde{v} и v — формулу замены переменной в дифференциальном уравнении. Пусть $\varphi, \tilde{\varphi}$ таковы, как в определении. Имеем $\dot{\varphi}(0) = v(p)$ и $\dot{\tilde{\varphi}}(0) = \tilde{v}(H(p))$. Так как $\tilde{\varphi} = H \circ \varphi$, по формуле производной сложной функции получаем $\dot{\tilde{\varphi}}(0) = \frac{dH}{dx}(p)\dot{\varphi}(0)$, то есть

$$\tilde{v}(H(p)) = dH|_p v(p)$$

Итак, к вектору $v(p)$, приложенному к точке p , применяется дифференциал отображения H в этой точке. Мы пришли к определению 4.1.8.

Приведем доказательство предложения 4.1.9 в новых терминах; оно проще старого доказательства и сразу следует из определений.

Предложение 4.1.14. Пусть v — векторное поле на поверхности $M_1 \subset \mathbb{R}^n$, пусть $H: M_1 \rightarrow M_2 \subset \mathbb{R}^n$ — диффеоморфизм на поверхностях M_1, M_2 . Тогда образ любой фазовой кривой векторного поля v под действием H является фазовой кривой поля $\tilde{v} = H_* v$ на M_2 .

Доказательство. Пусть $t \mapsto \varphi(t)$ — фазовая кривая первого уравнения, которая проходит через точку $p \in M_1$. Тогда она лежит в классе вектора $v(p)$ в точке p . Диффеоморфизм H переводит вектор $v(p)$ поля v в вектор поля \tilde{v} , приложенный в точке $H(p)$. По определению действия диффеоморфизма на векторы, кривая $H \circ \varphi =: \tilde{\varphi}$ должна лежать в классе вектора $\tilde{v}(H(p)) \in T_{H(p)} \mathbb{R}^n$. Это верно для каждой точки кривой φ ; значит, кривая $\tilde{\varphi}$ лежит в классе вектора \tilde{v} в каждой своей точке. Итак, $\tilde{\varphi}$ — фазовая кривая второго уравнения, что и требовалось. □

4.1.5 Симметрии: общий случай

В разделе 4.1.1 мы научились решать любое однородное уравнение. Это удалось сделать за счет того, что однородные уравнения имеют *симметрию*: поле направлений сохраняется при всевозможных растяжениях $(t, x) \mapsto (\lambda t, \lambda x)$.

В общем случае симметрия — это “непрерывное движение”, которое сохраняет поле направлений. Сейчас мы увидим, что наличие симметрии позволяет найти замену переменной, которая превращает уравнение в автономное. Автономное уравнение мы уже умеем сводить к неавтономному уравнению меньшей размерности, переходя от фазовых кривых к интегральным (см. раздел 3.3.2). Итак, *наличие симметрии позволяет уменьшить количество переменных на 1*.

Уравнение с одномерной пространственной переменной, имеющее симметрию, после замены превращается в одномерное автономное уравнение, что приводит к полному решению уравнения.

Дадим формальное определение группы симметрий. Рассмотрим уравнение в области $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Определение 4.1.15. Диффеоморфизм расширенного фазового пространства $h: \Omega \rightarrow \Omega$ сохраняет поле направлений, если он отображает поле направлений в себя (в смысле определения 4.1.4).

Упражнение 60. Проверьте, что диффеоморфизмы, сохраняющие поле направлений дифференциального уравнения, образуют группу.

Напомним, что однопараметрическая группа диффеоморфизмов (фазовый поток) — это семейство диффеоморфизмов g^t , $t \in \mathbb{R}$, гладко зависящих от t , для которого $g^0 = id$ и выполнено групповое свойство $g^t g^s = g^{t+s}$ (определение 2.4.23).

Определение 4.1.16. Симметрией дифференциального уравнения называется однопараметрическая группа диффеоморфизмов расширенного фазового пространства $h_s: \Omega \rightarrow \Omega$, сохраняющих поле направлений.

Орбиты группы симметрий — это кривые

$$\{h_s(p) \mid s \in \mathbb{R}\}. \quad (4.9)$$

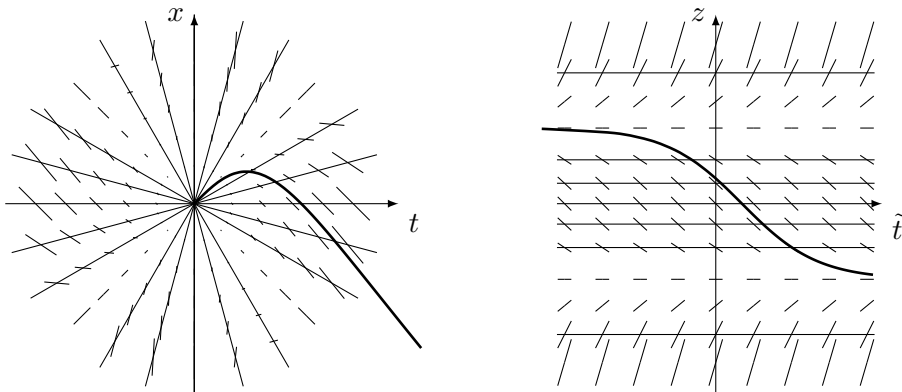


Рис. 4.3: Слева: поле направлений однородного уравнения $\dot{x} = \frac{x}{t} + \frac{x^2}{t^2} - 1$ и орбиты группы симметрий $h_s(t, x) = (e^{st}, e^s x)$; одна интегральная кривая отмечена жирным. Справа: образ орбит группы симметрий, поля направлений и интегральной кривой под действием замены $(\ln t, x/t)$. Орбиты группы симметрии выпрямлены, новое уравнение $z' = z^2 - 1$ автономно.

По теореме 2.4.27, у всякой однопараметрической группы h_s есть генератор. В частности, существует поле w , для которого $g_w^s = h_s$, а именно $w(x) := \frac{d}{ds}|_{s=0} h_s(x)$. Фазовые кривые поля w — это в точности орбиты группы симметрий, так как $h_s(p) = g_w^s(p)$.

4 Симметрии и законы сохранения

В частности, для достаточно гладких h_s каждые две орбиты группы симметрий либо не пересекаются, либо совпадают.

Пример 4.1.17. У любого автономного уравнения есть симметрии $h_s(t, x) = (t + s, x)$ — параллельные переносы вдоль оси времени. Поэтому орбиты группы симметрий — горизонтальные прямые. Генератор такой группы — поле $w = (1, 0)$.

Пример 4.1.18. Однородные уравнения — это в точности уравнения, инвариантные относительно растяжений плоскости $(x, y) \mapsto (\lambda x, \lambda y)$. Такие растяжения образуют однопараметрическую группу. Действительно, параметризуем их таким образом: $h_s(t, x) = (e^s t, e^s x)$; тогда $h_s \circ h_t = h_{t+s}$ (выполняется групповое свойство). Орбиты группы симметрий, кроме одной, — (открытые) лучи, выходящие из нуля; единственная исключительная орбита состоит только из точки $(0, 0)$. Генератор группы симметрий — поле $w(x, y) = (x, y)$.

Чтобы свести дифференциальное уравнение с симметрией к автономному, достаточно превратить группу симметрий h_s в группу симметрий автономного уравнения $t \mapsto t + s$. Значит, замена переменной должна переводить генератор группы симметрий в единичное векторное поле — генератор группы сдвигов. При этом орбиты группы симметрий будут переходить в горизонтальные кривые.

Теорема 4.1.19. Пусть дифференциальное уравнение $\dot{x} = f(t, x)$ имеет однопараметрическую группу симметрий h_s . Пусть векторное поле w — генератор этой однопараметрической группы: $h_s = g_w^s$. Пусть диффеоморфизм H выпрямляет поле w , то есть переводит его в единичное поле $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$.

Тогда H переводит поле направлений уравнения $\dot{x} = f(t, x)$ в поле направлений некоторого автономного уравнения.

Другими словами, после замены переменной $(s, u) = H(t, x)$ в уравнении $\dot{x} = f(t, x)$ мы получаем автономное уравнение $u'_s = F(u)$.

Доказательство. Отображение H выпрямляет поле w , поэтому переводит его фазовые кривые $g_w^s(x_0)$ в фазовые кривые единичного поля $g_{e_1}^s(y_0) = y_0 + se_1$. Таким образом, $H(g_w^s(x_0)) = H(x_0) + se_1$, откуда $H \circ g_w^s \circ H^{-1}(x) = x + se_1$: отображение H сопрягает фазовый поток поля w со сдвигом на se_1 .

Отображения $h_s = g_w^s$ сохраняют поле направлений l уравнения $\dot{x} = f(t, x)$: $(h_s)_* l = l$. Положив $\tilde{l} = H_* l$, получим

$$\tilde{l} = H_* l = H_* \circ (h_s)_* l = H_* \circ (h_s)_* \circ H_*^{-1} \circ H_* l = H_* \circ (h_s)_* \circ H_*^{-1} \tilde{l} = (H \circ h_s \circ H^{-1})_* \tilde{l}.$$

Мы получили, что поле направлений \tilde{l} инвариантно относительно отображений $H \circ h_s \circ H^{-1}$. Но эти отображения — сдвиги: $H \circ h_s \circ H^{-1}(x) = x + se_1$. Поэтому поле направлений \tilde{l} инвариантно относительно сдвигов переменной s , то есть соответствует уравнению вида $u'_s = F(u)$, правая часть которого не зависит от времени, — автономному уравнению. \square

Чтобы иметь возможность применять этот метод для решения уравнений, надо уметь находить выпрямляющее отображение H для генератора группы симметрий w .

Именно это отображение даёт искомую замену переменной. В общем случае выпрямляющее отображение существует только локально — в окрестности каждой неособой точки a , $w(a) \neq 0$ (хотя иногда можно выпрямить поле и на большом куске пространства). Общий рецепт даёт теорема о выпрямлении 7.3.1 (см. раздел 7.3).

Здесь мы опишем построение выпрямляющего отображения для полей на плоскости. Рассмотрим поле w на плоскости, для которого $w(a) \neq 0$. Выберем *трансверсаль* к полю, проходящую через a . Трансверсаль — это кривая $\Sigma: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\Sigma(0) = a$, которая во всех своих точках не касается поля w (трансверсальна ему). Можно взять любой короткий отрезок, проходящий через a и не параллельный вектору $w(a)$.

Рассмотрим отображение $G(s, u) = g_w^s \circ \Sigma(u)$. Можно сказать, что на окрестности точки a мы вводим систему координат (s, u) , причем трансверсаль параметризована параметром u , а фазовые кривые поля w — параметром s . Положим $H = G^{-1}$.

Теорема 4.1.20. *Для любого C^2 -гладкого поля w на плоскости в окрестности любой точки a , в которой $w(a) \neq 0$, диффеоморфизм H , определенный выше, переводит поле w в единичное поле $e_1 = (1, 0)$: $H_*w = e_1$.*

Доказательство. Отображение $G(s, u) = g_w^s \circ \Sigma(u)$ переводит любую горизонтальную прямую $u = u_0$ на плоскости Ous в фазовую кривую поля w , проходящую через точку $\Sigma(u_0)$, — в кривую $s \mapsto g_w^s \circ \Sigma(u_0)$. Поэтому вектор скорости горизонтальной прямой — вектор $(1, 0)$ — под действием дифференциала отображения H переходит в вектор скорости фазовой кривой — вектор поля w . Значит, $G_*e_1 = w$.

Если теперь положить $H = G^{-1}$, мы получим $H_*w = e_1$, что и требовалось.

Из теоремы гладкости (теорема 2.4.6) следует, что отображение G гладкое. Чтобы доказать, что обратное отображение $H = G^{-1}$ тоже гладкое, надо проверить, что дифференциал отображения G невырожден в точке $(0, 0) = G^{-1}(a)$, и применить теорему об обратном отображении. Но столбцы матрицы Якоби отображения G в нуле — это $\frac{\partial}{\partial s}|_{(0,0)}G = \frac{\partial}{\partial s}|_{s=0}g_w^s|_{\Sigma(0)} = w(\Sigma(0)) = w(a)$ и $\frac{\partial}{\partial u}|_{(0,0)}G = \Sigma'(0)$. Второе равенство следует из того, что отображение g_w^0 тождественно. В силу трансверсальности Σ к полю, столбцы матрицы Якоби линейно независимы, поэтому дифференциал отображения G в точке $(0, 0)$ невырожден. □

Для генератора группы симметрий отображение G задается формулой $G(s, u) = g_w^s \circ \Sigma(u) = h_s(\Sigma(u))$. По формуле (4.7), после замены $(s, u) = G^{-1}(t, x)$ уравнение $\dot{x} = f(t, x)$ принимает вид

$$\frac{du}{ds} = \frac{u'_t + u'_x f}{s'_t + s'_x f} \Big|_{(t,x)=h_s(\Sigma(u))}. \quad (4.10)$$

Из теоремы 4.1.19 следует, что это уравнение автономно — правая часть не содержит s . В одномерном случае его можно полностью решить с помощью разделения переменных; в многомерном — свести к неавтономному уравнению, размерность которого на 1 меньше, как описано в разделе 3.3.2. Итак, мы показали, каким образом симметрия позволяет уменьшить размерность системы.

Пример 4.1.21. Напомним, что у любого автономного уравнения есть группа симметрий $h_s(t, x) = (t + s, x)$, см. пример 4.1.17. В качестве Σ возьмем вертикальную прямую $t = 1$: $\Sigma(u) = (1, u)$. Получим $G(s, u) = h_s(1, u) = (s + 1, u)$, поэтому $H(t, x) = (t - 1, x)$. При замене уравнение не меняется.

Пример 4.1.22. Напомним, что для однородных уравнений симметрии имеют вид $h_s(t, x) = (e^s t, e^s x)$, см. пример 4.1.18. Для однородного уравнения в качестве Σ тоже можно взять вертикальную прямую $t = 1$. Получим $G(s, u) = h_s(1, u) = (e^s, e^s u)$, $H(t, x) = G^{-1}(t, x) = (\ln t, x/t)$. Поэтому при замене переменной мы приходим к уравнению

$$u'_s = \frac{\dot{x}/t - x/t^2}{1/t} = \dot{x} - x/t = F(u) - u$$

и получаем автономное уравнение (ср. с выкладкой из раздела 4.1.1).

Если векторное поле на плоскости инвариантно относительно поворотов плоскости, говорят, что уравнение имеет вращательную симметрию. Однопараметрическая группа симметрий в этом случае имеет вид

$$h_s(x) = \begin{pmatrix} \cos s & \sin s \\ -\sin s & \cos s \end{pmatrix}.$$

Упражнение 61. Проверьте, что такие повороты плоскости образуют однопараметрическую группу диффеоморфизмов.

Выпишите замену, которую нужно делать для уравнений, имеющих вращательную симметрию. В качестве Σ возьмите луч, выходящий из нуля.

Упражнение 62. Проверьте, что поля $v(x, y) = (x, y)$, $v(x, y) = (y, -x)$ и $v(x, y) = (x + y \sin(x^2 + y^2), y - x \sin(x^2 + y^2))$ имеют вращательную симметрию.

Замена, которая возникает из группы симметрий, позволяет решить любое квазиоднородное уравнение на плоскости.

Определение 4.1.23. Уравнение $\dot{x} = v(x)$ на плоскости называется *квазиоднородным*, если оно инвариантно относительно квазиоднородных замен $(x_1, x_2) \mapsto (c^\alpha x_1, c^\beta x_2)$ для некоторых α, β .

Если положить $\alpha = \beta = 1$, получим определение однородного уравнения. Группа симметрий для квазиоднородного уравнения имеет вид $h_s(x_1, x_2) = (e^{\alpha s} x_1, e^{\beta s} x_2)$.

Упражнение 63. Проверьте, что такие отображения образуют однопараметрическую группу диффеоморфизмов. Выпишите замену, которую нужно делать для квазиоднородных уравнений.

4.2 Дифференциальные формы

Автономные дифференциальные уравнения на плоскости можно задавать не только с помощью векторных полей, но и с помощью двойственного объекта — дифференциальных форм.

Начнем с определения дифференциальной формы. Более подробно о дифференциальных формах см. в книге *М. Спивак, Анализ на многообразиях*¹.

4.2.1 Определения

Кокасательное пространство и дифференциальные формы

Напомним, что касательное пространство к области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ в точке p — это пространство векторов, приложенных в точке p , а касательное пространство к кривой в точке p одномерно и порождено её касательным вектором. Следующее понятие двойственно понятию касательного пространства.

Определение 4.2.1. Кокасательное пространство $T_p^*\Omega$ к открытому множеству $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ в точке $p \in \Omega$ — это пространство, двойственное к $T_p\Omega$, то есть пространство линейных функционалов на касательном пространстве. Как векторное пространство оно изоморфно \mathbb{R}^n .

Кокасательное пространство к кривой — это пространство линейных функционалов на её (одномерном) касательном пространстве.

Например, дифференциал функции $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ в точке p — линейный функционал на $T_p\Omega$, то есть элемент кокасательного пространства: $df|_p \in T_p^*\Omega$.

Дифференциальная 1-форма — объект, двойственный векторному полю. Векторное поле — это вектор, приложенный в каждой точке, то есть элемент касательного пространства в каждой точке; дифференциальная 1-форма — это линейный функционал на $T_p\Omega$ в каждой точке.

Определение 4.2.2. (Гладкая) дифференциальная 1-форма — это гладкое отображение, которое каждой точке $p \in \Omega$ сопоставляет линейный функционал $\omega_p: T_p\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ на касательном пространстве в точке p .

Важный пример дифференциальной 1-формы — дифференциал df функции $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$: в каждой точке p мы рассматриваем функционал $df|_p: T_p\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

В координатах дифференциальная 1-форма имеет вид

$$\omega = a_1(x)dx_1 + a_2(x)dx_2 + \dots + a_n(x)dx_n,$$

где функции a_i гладкие, а формы dx_j являются дифференциалами координатных функций x_j . В частности,

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n.$$

¹М. Спивак, *Анализ на многообразиях*, М: Мир, 1968.

Дифференциальную 1-форму можно вычислить на векторе $v \in T_p\Omega$, приложенном в точке p . В координатах, если вектор $v = (v_1, \dots, v_n)$ приложен в точке x , то

$$\omega(v) = a_1(x)v_1 + a_2(x)v_2 + \dots + a_n(x)v_n,$$

так как по определению дифференциала $dx_j(v) = v_j$. Итак, **дифференциальная форма действует на векторы, приложенные в точках Ω** .

Кроме дифференциальных 1-форм, можно ввести понятие дифференциальных k -форм любого порядка k (их можно будет вычислять на наборах из k векторов). Но мы не будем ни давать определение k -форм, ни использовать их. В дальнейшем мы будем писать “(дифференциальная) форма”, имея в виду “дифференциальная 1-форма”.

Дифференциал как дифференциальная форма

Докажем, что значение дифференциальной формы df на векторе $v \in T_p\Omega$ — это производная функции f вдоль вектора v . Напомним определение.

Определение 4.2.3. Производная функции $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ вдоль вектора v в точке p — это производная отображения $t \mapsto f(p + vt)$ в точке $t = 0$:

$$\mathcal{L}_v f = \left. \frac{d}{dt} f(p + vt) \right|_{t=0}.$$

Еще одно определение производной вдоль вектора таково:

$$\mathcal{L}_v f = \left. \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) \right|_{t=0},$$

где $\gamma(t)$ — кривая, для которой $\gamma(0) = p, \dot{\gamma}(0) = v$.

Видно, что понятие производной вдоль вектора не зависит от выбора координат.

Упражнение 64. Докажите эквивалентность этих определений.

Предложение 4.2.4. Производная функции вдоль вектора $v \in T_p\Omega$ — это значение формы df на векторе v .

Доказательство. По формуле дифференцирования сложной функции,

$$\mathcal{L}_v f = \frac{\partial f}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} v_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} v_n = df|_p v.$$

Это равенство выполнено в любой системе координат.

Его можно доказать и без использования координат: так как $\gamma(0) = p$, по определению дифференциала

$$f(\gamma(t)) - f(\gamma(0)) = df|_p(\gamma(t) - \gamma(0)) + o(|\gamma(t) - \gamma(0)|),$$

поэтому после деления левой и правой части на t и предельного перехода $t \rightarrow 0$ мы получаем

$$\frac{d}{dt}f(\gamma(t)) = df|_p \dot{\gamma}(0) = df|_p v,$$

что и требовалось. \square

Формулу для производной функции вдоль вектора часто записывают с использованием градиента функции f . Напомним определение градиента.

Определение 4.2.5. **Градиент** функции $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ в точке p — это вектор $\text{grad } f$, двойственный к линейному функционалу $df|_p$ относительно стандартного скалярного произведения:

$$(\text{grad } f|_p, v) = df|_p v \text{ для любого вектора } v.$$

Градиент зависит от выбора скалярного произведения. **Если система координат ортонормирована** относительно скалярного произведения (то есть $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$), то двойственным к дифференциалу будет вектор

$$\text{grad } f|_p = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

По определению градиента, из предложения 4.2.4 мы получаем, что

$$\mathcal{L}_v f = (\text{grad } f|_p, v). \quad (4.11)$$

Заметим, что хотя градиент меняется при изменении скалярного произведения, правая часть равенства (4.11) не зависит ни от выбора скалярного произведения, ни от выбора системы координат (так как равна $df|_p(v)$).

Замена переменной в дифференциальной форме

Как мы уже отмечали, в дифференциальной геометрии в определение объекта всегда включают информацию о том, как меняется этот объект при замене координат. И векторное поле, и дифференциальная форма в \mathbb{R}^n задаются набором n функций; но мы увидим, что эти функции по-разному изменяются при заменах координат.

Пусть $H: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ — диффеоморфизм областей $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$. Напомним, что если в области Ω_1 задано векторное поле v , то в области Ω_2 возникает его образ под действием диффеоморфизма H — поле $\tilde{v} = H_* v$, которое в точке $H(p)$ равно $\tilde{v}(H(p)) = dH|_p v(p)$.

Пусть теперь в области Ω_2 (в образе диффеоморфизма) задана дифференциальная форма ω . Тогда в области Ω_1 возникает форма $\tilde{\omega} := H^* \omega$, которая в точке $p \in \Omega_1$ действует на векторы пространства $T_p \Omega_1$ следующим образом: для $v \in T_p \Omega_1$

$$\tilde{\omega}(v) = \omega(H_* v) \quad (4.12)$$

где $H_* v = dH|_p v \in T_{H(p)} \Omega_2$.

4 Симметрии и законы сохранения

Это определение означает, что линейный оператор $H^*: T_{H(p)}^*\Omega_2 \rightarrow T_p^*\Omega_1$ двойственен к линейному оператору $H_*: T_p\Omega_1 \rightarrow T_{H(p)}\Omega_2$.

В координатах, пусть точка с координатами x_j в области Ω_1 переходит в точку с координатами $y_j = h_j(x_1, \dots, x_n)$ в области Ω_2 . Тогда из формы $\omega = a_1(y)dy_1 + \dots + a_n(y)dy_n$ в области Ω_2 мы получаем форму $\tilde{\omega} = H^*\omega$ в области Ω_1 , где

$$\begin{aligned} \tilde{\omega} &= a_1(h(x))dh_1(x) + \dots + a_n(h(x))dh_n(x) = \\ &= a_1(h(x)) \sum_{j=1}^n \frac{\partial h_1}{\partial x_j} dx_j + \dots + a_n(h(x)) \sum_{j=1}^n \frac{\partial h_n}{\partial x_j} dx_j = \\ &= \sum_{j=1}^n a_j(h(x)) \frac{\partial h_j}{\partial x_1} dx_1 + \sum_{j=1}^n a_j(h(x)) \frac{\partial h_j}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \sum_{j=1}^n a_j(h(x)) \frac{\partial h_j}{\partial x_n} dx_n. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Упражнение 65. Проверьте, что координатное определение (4.13) равносильно бескоординатному (4.12).

Интегрирование дифференциальных форм

Дифференциальные 1-формы можно интегрировать по кривым в области Ω . В частности, интеграл Римана² $\int_a^b f(x)dx$ — это интеграл от 1-формы $f(x)dx$ по отрезку прямой.

Определение 4.2.6. Интеграл от дифференциальной 1-формы ω в \mathbb{R}^m по гладкой кривой $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ — это

$$\int_{\gamma} \omega := \int_a^b \omega(\dot{\gamma}(t))dt,$$

где $\omega(\dot{\gamma}(t))$ — это значение дифференциальной формы ω на векторе $\dot{\gamma}(t)$, касательном к кривой γ .

Определение интеграла в координатах выглядит следующим образом. Пусть

$$\begin{aligned} \omega &= F_1(x_1, \dots, x_m)dx_1 + \dots + F_m(x_1, \dots, x_m)dx_m, \\ \gamma(t) &= (\gamma_1(t), \dots, \gamma_m(t)). \end{aligned}$$

Тогда

$$\int_{\gamma} (F_1 dx_1 + \dots + F_m dx_m) = \int_a^b (F_1(\gamma(t))\dot{\gamma}_1(t) + \dots + F_m(\gamma(t))\dot{\gamma}_m(t))dt.$$

Заметим, что для случая $n = 1$ и для кривой $\gamma(t) = t, t \in [a, b]$, (то есть для кривой, совпадающей с отрезком $[a, b]$) так определённый интеграл совпадает с обычным

²Георг Фридрих Бернхард Риман (1826 – 1866) – математик, известный своим вкладом в вещественный и комплексный анализ, теорию чисел, дифференциальную геометрию.

4.2.2. Пфаффовы дифференциальные уравнения

интегралом Римана: $\int_{\gamma} f(x)dx = \int_a^b f(t) \cdot 1dt$. Поэтому путаницы с обозначениями не возникает.

Ниже мы докажем обобщение теоремы о замене переменной в определённом интеграле и обобщение формулы Ньютона-Лейбница.

Предложение 4.2.7. *Интеграл от дифференциальной формы по кривой не зависит от параметризации кривой. Другими словами, для любого диффеоморфизма $\varphi: [a, b] \rightarrow [c, d]$, $t = \varphi(\tau)$, интеграл от любой дифференциальной формы по гладкой кривой γ совпадает с её интегралом по кривой $\tilde{\gamma}(\tau) := \gamma(\varphi(\tau))$.*

Доказательство. Выпишем определение интеграла формы ω по кривой γ и сделаем замену переменной $t = \varphi(\tau)$. Получим

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega &= \int_a^b \left(F_1(\gamma(t)) \frac{d\gamma_1}{dt} + \dots + F_m(\gamma(t)) \frac{d\gamma_m}{dt} \right) dt = \\ &= \int_c^d \left(F_1(\gamma(\varphi(\tau))) \frac{d\gamma_1}{dt} \Big|_{\varphi(\tau)} \frac{d\varphi}{d\tau} + \dots + F_m(\gamma(\varphi(\tau))) \frac{d\gamma_m}{dt} \Big|_{\varphi(\tau)} \frac{d\varphi}{d\tau} \right) d\tau. \end{aligned}$$

Так как $\frac{d\gamma_k}{dt} \Big|_{\varphi(\tau)} \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}(\gamma_k(\varphi(\tau)))$ по формуле производной сложной функции, последний интеграл равен интегралу формы ω по кривой $\gamma(\varphi(\tau))$. \square

Определение 4.2.8. Форма ω называется **точной**, если $\omega = dF$ для некоторой функции $F \in C^2(\Omega)$. Эта функция F называется **потенциалом** дифференциальной формы.

Потенциал дифференциальной формы определен с точностью до прибавления константы.

Предложение 4.2.9. *Интеграл по гладкой кривой $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ от точной формы $\omega = dF$ равен приращению её потенциала F вдоль кривой:*

$$\int_{\gamma} dF = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Доказательство. Значение формы dF на любом векторе v — это производная функции F вдоль вектора v . Поэтому

$$\int_{\gamma} dF = \int_a^b dF(\dot{\gamma}(t)) \Big|_{\gamma(t)} = \int_a^b \frac{d}{dt} F(\gamma(t)) dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Здесь мы применили формулу Ньютона-Лейбница для функции $F(\gamma(t))$. \square

4.2.2 Пфаффовы дифференциальные уравнения

Пусть $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ — кривая на плоскости.

4 Симметрии и законы сохранения

Рассмотрим (одномерное) касательное пространство $T_p\gamma$ к кривой γ в точке $p \in \gamma$. Ограничим линейные функционалы dx и dy на пространство $T_p\gamma$. На касательном векторе к кривой γ ограничения равны

$$\begin{aligned} dx(\dot{\gamma}_1(t), \dot{\gamma}_2(t)) &= \dot{\gamma}_1(t), \\ dy(\dot{\gamma}_1(t), \dot{\gamma}_2(t)) &= \dot{\gamma}_2(t). \end{aligned}$$

Это два линейных функционала на одномерном пространстве $T_p\gamma$, поэтому они линейно зависимы. Если теперь фиксировать коэффициенты линейной зависимости в каждой точке p , мы получим условие на пространство $T_p\gamma$ в каждой точке p — пфаффово дифференциальное уравнение.

Определение 4.2.10. Пфаффовым³ дифференциальным уравнением в области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ называется запись вида $\omega = 0$, где дифференциальная форма ω имеет вид $\omega = A(x, y)dx + B(x, y)dy$, и гладкие функции $A, B: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ не обращаются в ноль одновременно.

Кривая γ называется интегральной кривой пфаффова уравнения, если в каждой точке $p \in \gamma$ выполнено условие $\omega(T_p\gamma) = 0$, то есть форма ω — нулевая в ограничении на каждое касательное подпространство к кривой γ . Если интегральная γ является графиком функции $y = \varphi(x)$, то эта функция называется решением пфаффова уравнения.

Пфаффово уравнение легко превратить в обычное.

Предложение 4.2.11. *Интегральные кривые пфаффова уравнения*

$$A(x, y)dx + B(x, y)dy = 0, \quad (4.14)$$

где функции A, B гладкие, совпадают с интегральными кривыми дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{A(x, y)}{B(x, y)}. \quad (4.15)$$

В последнем уравнении мы разрешаем случай $B(x, y) = 0$ и рассматриваем уравнение в смысле определения 2.2.8.

Как мы знаем, интегральные кривые последнего уравнения совпадают с фазовыми кривыми уравнения

$$\begin{aligned} \dot{x} &= B(x, y), \\ \dot{y} &= -A(x, y). \end{aligned} \quad (4.16)$$

В этом смысле уравнения (4.14), (4.15) и (4.16) равносильны.

³Иоганн Фридрих Пфафф (1765 – 1825) – математик, известный своими работами по уравнениям с частными производными и теории рядов.

4.2.3. Еще одно обоснование метода разделения переменных

Доказательство. Вычислим значение формы $A dx + B dy$ на касательном векторе к кривой γ :

$$(A dx + B dy)(\dot{\gamma}_1(t), \dot{\gamma}_2(t)) = A\dot{\gamma}_1(t) + B\dot{\gamma}_2(t).$$

Если γ — интегральная кривая уравнения (4.15), то это выражение равно нулю. Значит, форма $A dx + B dy$ равна нулю на $T_p\gamma$, так как пространство $T_p\gamma$ порождено касательным вектором к кривой γ .

Обратно, если форма $A dx + B dy$ равна нулю на $T_p\gamma$, то она равна нулю на касательном векторе к кривой γ , откуда

$$A\dot{\gamma}_1(t) + B\dot{\gamma}_2(t) = 0.$$

Значит,

$$\frac{\dot{\gamma}_2(t)}{\dot{\gamma}_1(t)} = -\frac{A}{B}.$$

Если $B(x, y) = 0$, следует рассмотреть обратное отношение. Поэтому кривая γ является интегральной для уравнения (4.15). □

В дальнейшем мы будем часто писать уравнение $A(x, y)dx + B(x, y)dy = 0$ вместо уравнения (4.15). Заметим, что функции A и B можно одновременно домножить на любую функцию, которая не обращается в ноль; соответствующее уравнение (4.15) не поменяется.

4.2.3 Еще одно обоснование метода разделения переменных

В разделе 3.3.3 мы доказали следующее утверждение.

Теорема 4.2.12. *Для непрерывных функций f, g любое решение $x \mapsto y(x)$ уравнения с разделяющимися переменными $\frac{dy}{dx} = \frac{g(y)}{f(x)}$ в области $f(x) \neq 0, g(y) \neq 0$ даётся формулой*

$$\int_{x_0}^x \frac{d\zeta}{f(\zeta)} = \int_{y_0}^{y(x)} \frac{d\eta}{g(\eta)}. \quad (4.17)$$

Перед этим в разделе 3.3.1 мы дали неформальное объяснение тому, что это утверждение верно: мы домножили обе части уравнения на dx , разделили на $g(y)$ и приписали интегралы. Сейчас мы увидим, что этим операциям можно придать строгий смысл с помощью пфаффовых уравнений. Так как выше мы рассматривали только гладкие дифференциальные формы, мы будем считать, что функции f, g гладкие; от этого требования можно избавиться, если рассматривать непрерывные дифференциальные 1-формы.

Перепишем уравнение в виде

$$\frac{dy}{g(y)} - \frac{dx}{f(x)} = 0.$$

4 Симметрии и законы сохранения

Это равенство означает, что значения форм $\frac{dy}{g(y)}$ и $\frac{dx}{f(x)}$ на касательных векторах к интегральной кривой нашего уравнения должны совпадать. Поэтому по определению интеграла от дифференциальной формы, если γ — любой кусок интегральной кривой, то

$$\int_{\gamma} \frac{dx}{f(x)} = \int_{\gamma} \frac{dy}{g(y)}.$$

Обе формы $\frac{dx}{f(x)}$ и $\frac{dy}{g(y)}$ точны: если F — первообразная функции f^{-1} , а G — первообразная функции g^{-1} , то потенциалом формы $\frac{dx}{f(x)}$ будет функция $(x, y) \mapsto F(x)$, а потенциалом формы $\frac{dy}{g(y)}$ будет $(x, y) \mapsto G(y)$. Поэтому по предложению 4.2.9 интегралы равны приращению потенциалов этих форм вдоль γ . Если $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [0, T]$, то мы получаем, что

$$F(x(T)) - F(x(0)) = G(y(T)) - G(y(0)),$$

и $F(x) = G(y) + C$ вдоль интегральной кривой, что и требовалось показать.

Мы проделали в точности то же самое, что в разделе 3.3.1: в уравнении $\frac{dy}{dx} = \frac{g(y)}{f(x)}$ разделили на $g(y)$ и домножили на dx (перешли к дифференциальным формам) и дописали интегралы. И так, мы привели аккуратное обоснование эвристических рассуждений из раздела 3.3.1.

4.2.4 Уравнения в полных дифференциалах

Пфаффово дифференциальное уравнение $A(x, y)dx + B(x, y)dy = 0$ становится очень простым, если оно имеет вид $dF = 0$. Тогда оно называется *уравнением в полных дифференциалах*.

Определение 4.2.13. Пфаффово уравнение $\omega = 0$ называется **уравнением в полных дифференциалах**, если форма ω точна: $\omega = dF$ для некоторой C^2 -гладкой функции F .

Для уравнения в полных дифференциалах функция F постоянна вдоль интегральных кривых.

Определение 4.2.14. *Линия уровня* функции $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ — это кривая в плоскости \mathbb{R}^2 , на которой значение функции постоянно: $F(x, y) = c$.

Определение 4.2.15. Функция F называется *первым интегралом* уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, если интегральные кривые уравнения лежат на линиях уровня функции F , то есть функция постоянна вдоль любой интегральной кривой $(\varphi(t), \psi(t))$:

$$F(\varphi(t), \psi(t)) = \text{const.}$$

Теорема 4.2.16. Пусть пфаффово дифференциальное уравнение $\omega = 0$ в области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ является уравнением в полных дифференциалах: $\omega = dF$ для некоторой

4.2.4. Уравнения в полных дифференциалах

функции $F \in C^2(\Omega)$. Тогда функция F является первым интегралом уравнения (4.18), то есть постоянна вдоль любой интегральной кривой $(\varphi(t), \psi(t))$:

$$F(\varphi(t), \psi(t)) = \text{const}$$

Например, для уравнения $\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$ функция $x^2 + y^2$ постоянна вдоль интегральных кривых. Значит, интегральные кривые лежат на линиях уровня функции $x^2 + y^2$ — на окружностях (см. рис. 2.2).

Доказательство. Первое доказательство. Пусть $(\varphi(t), \psi(t))$ — интегральная кривая пфаффа уравнения $dF = 0$. Для доказательства теоремы достаточно показать, что производная функции $F(\varphi(t), \psi(t))$ по t равна нулю.

Производная $\frac{d}{dt}F(\varphi(t), \psi(t))$ — это производная функции F вдоль касательного вектора к кривой $(\varphi(t), \psi(t))$, который равен $(\dot{\varphi}(t), \dot{\psi}(t))$. Но производная функции вдоль вектора есть значение её дифференциала на этом векторе. Получаем

$$\frac{d}{dt}F(\varphi(t), \psi(t)) = \mathcal{L}_{(\dot{\varphi}(t), \dot{\psi}(t))}F = dF(\dot{\varphi}(t), \dot{\psi}(t)).$$

Так как наше уравнение имеет вид $dF = 0$, значение дифференциала dF равно нулю на касательном векторе $(\dot{\varphi}(t), \dot{\psi}(t))$ к его интегральной кривой $(\varphi(t), \psi(t))$. Итак, $\frac{d}{dt}F(\varphi(t), \psi(t)) = 0$, и функция F постоянна вдоль интегральных кривых.

Второе доказательство: доказательство без дифференциальных форм. Запишем уравнение $dF = 0$ в координатах: $\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0$. По предложению 4.1.6, интегральная кривая $(\varphi(t), \psi(t))$ этого пфаффа уравнения является также интегральной кривой уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}. \quad (4.18)$$

Итак,

$$\frac{\dot{\psi}(t)}{\dot{\varphi}(t)} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \Big|_{(\varphi(t), \psi(t))}. \quad (4.19)$$

Вычислим производную функции $F(\varphi(t), \psi(t))$: по формуле производной сложной функции,

$$\frac{d}{dt}F(\varphi(t), \psi(t)) = \frac{\partial F}{\partial x}(\varphi(t), \psi(t)) \dot{\varphi}(t) + \frac{\partial F}{\partial y}(\varphi(t), \psi(t)) \dot{\psi}(t),$$

откуда, пользуясь равенством (4.19), получим

$$\frac{d}{dt}F(\varphi(t), \psi(t)) = \dot{\varphi}(t) \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \right) \Big|_{(\varphi(t), \psi(t))} = 0.$$

□

Это предложение позволяет решить уравнение в полных дифференциалах. Действительно, его интегральные кривые (графики решений) совпадают с линиями уровня функции F .

4.2.5 Условие точности дифференциальной формы: лемма Пуанкаре

Мы научились решать уравнения в полных дифференциалах. Теперь естественно задать следующий вопрос:

Вопрос. *Задаана гладкая дифференциальная форма $\omega = A(x, y)dx + B(x, y)dy$ в области Ω . При каких условиях она является точной, то есть существует функция $F \in C^2(\Omega)$, такая что $\omega = dF$?*

Другими словами, когда существует такая функция F , что $\frac{\partial F}{\partial x} = A(x, y)$, $\frac{\partial F}{\partial y} = B(x, y)$?

Воспользуемся теоремой о равенстве смешанных производных: для C^2 -гладких функций

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}.$$

Из неё следует, что для точной формы

$$\frac{\partial}{\partial y} A(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} B(x, y). \quad (4.20)$$

Вопрос. *Является ли условие (4.20) достаточным для того, чтобы форма $A dx + B dy$ была точна?*

Оказывается, ответ сильно зависит от свойств области Ω . Условие (4.20) будет достаточным, если в области Ω нет «дыр». Мы не будем доказывать этот факт (и не будем объяснять, что такое «дыры»), но докажем достаточность условия (4.20) для некоторого специального класса областей без «дыр» — *звёздных* областей. Мы докажем общее утверждение для 1-формы ω в пространстве любой размерности.

Определение 4.2.17. Область $\Omega \in \mathbb{R}^m$ называется **звёздной**, если для некоторой точки $p \in \Omega$ и для любой другой точки $q \in \Omega$ отрезок $[p, q]$ полностью содержится в Ω (см. рис. 4.4).

Обобщим условие (4.20) на многомерный случай:

Определение 4.2.18. Форма $\omega = A_1 dx_1 + \dots + A_m dx_m$ называется **замкнутой**, если

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_k} = \frac{\partial A_k}{\partial x_i}$$

для всех значений k, i .

Упражнение 66. *Докажите, что замкнутость формы не зависит от выбора координат в пространстве.*

4.2.5. Условие точности дифференциальной формы: лемма Пуанкаре

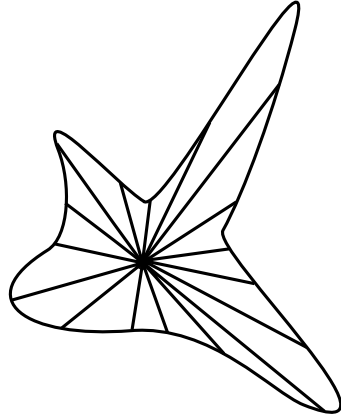


Рис. 4.4: Пример звёздной области на плоскости.

Для двумерного случая мы уже объяснили, что точная форма обязательно является замкнутой. Общий случай ничем не отличается от двумерного:

Лемма 4.2.19. *Точная дифференциальная 1-форма является замкнутой.*

Упражнение 67. *Докажите это.*

Лемма (Пуанкаре⁴). *В звёздной области любая замкнутая C^1 -гладкая дифференциальная 1-форма точна⁵.*

В частности, необходимое условие (4.20) является достаточным для звёздных областей на плоскости.

Доказательство леммы Пуанкаре. Будем считать, что точка p из определения звёздной области находится в начале координат. Пусть ω — замкнутая форма, $\omega = A_1 dx_1 + \dots + A_n dx_n$. Мы хотим найти её потенциал F , зная все его частные производные: $\frac{\partial F}{\partial x_i} = A_i$.

Заметим, что по предложению 4.2.9 для любой точки $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и любой функции $G: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$G(x) - G(0) = \int_{[0,x]} dG = \int_0^1 \left(x_1 \frac{\partial G}{\partial x_1}(tx) + \dots + x_n \frac{\partial G}{\partial x_n}(tx) \right) dt.$$

(мы параметризовали отрезок $[0, x] \subset \mathbb{R}^n$ параметром $t: \gamma(t) = tx$). Пользуясь этим равенством, можно восстановить любую функцию по набору её производных.

⁴Жюль Анри Пуанкаре (1854 – 1912) – математик, физик и философ. Известен значительным вкладом в алгебру, топологию, алгебраическую геометрию, комплексный анализ, теорию чисел, теорию относительности. Является основателем качественной теории динамических систем.

⁵Доказательство теоремы Пуанкаре в общем случае p -форм (которые мы здесь не определяем) и стягиваемых областей можно прочитать в книге В.А. Зорича «Математический анализ», часть 2, М.: изд. МЦНМО, 1998. гл. XV, §4 «Замкнутые и точные формы на многообразии». Рекомендуем также книгу М. Спивака «Математический анализ на многообразиях». - М.: Мир, 1968.

4 Симметрии и законы сохранения

Поэтому естественно определить F таким образом:

$$F(x) := \int_0^1 \sum_{i=1}^n x_i A_i(tx) dt.$$

Нам нужно проверить, что $\frac{\partial F}{\partial x_s} = A_s$. Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_s} &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_s} \sum_{i=1}^n x_i A_i(tx) dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_s} A_i|_{tx} \cdot t + A_s(tx) dt = \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i} A_s|_{tx} \cdot t + A_s(tx) dt = \int_0^1 \frac{d}{dt} (t A_s(tx)) dt = 1 \cdot A_s(x) - 0 \cdot A_s(0) = A_s(x). \end{aligned}$$

Итак, $dF = A_1 dx_1 + \dots + A_m dx_m = \omega$, что и требовалось. \square

4.2.6 Пример замкнутой, но не точной дифференциальной формы

Напоследок приведём пример замкнутой, но не точной формы в области с «дырами».

Рассмотрим функцию «полярный угол» на проколотой плоскости $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Обозначим эту функцию символом φ . Функция φ многозначна: её значение определено с точностью до прибавления $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Но в любом диске, не содержащем нуля, функция φ представляет собой счётное число однозначных функций φ_k , отличающихся друг от друга прибавлением $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим дифференциальную форму $\omega = d\varphi$. Более формально, в каждом диске, не содержащем нуля, мы положим $\omega = d\varphi_k$; это определение не зависит от выбора k , так как функции φ_k отличаются друг от друга на константу, и $d\varphi_n = d\varphi_m$ для любых n, m . По определению, форма $d\varphi$ точна в любом диске, не содержащем нуля (она является дифференциалом функции φ_k). Следовательно, форма $d\varphi$ замкнута в любом диске, не содержащем нуля; значит, замкнута во всём множестве $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Докажем, что форма $d\varphi$ не точна в области $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Действительно, если $d\varphi = dF$ для некоторой функции F , то в любом диске, не содержащем нуля, $F = \varphi_k + C$, то есть функция F отличается от полярного угла на константу. Но такой однозначной функции на проколотой плоскости не существует.

Упражнение 68. Докажите, что форма $\omega = d\varphi$ равна

$$\omega = \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}.$$

4.2.7 Решение пфаффовых уравнений и интегрирующий множитель

Вернемся к решению пфаффовых уравнений на плоскости. Рассмотрим уравнение вида $\omega = 0$, где ω — дифференциальная 1-форма в области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Если форма ω точна ($\omega = dF$), то, как было показано в теореме 4.2.16, функция F постоянна вдоль интегральных кривых нашего уравнения. Это позволяет найти интегральные кривые уравнения.

4.2.7. Решение пфаффовых уравнений и интегрирующий множитель

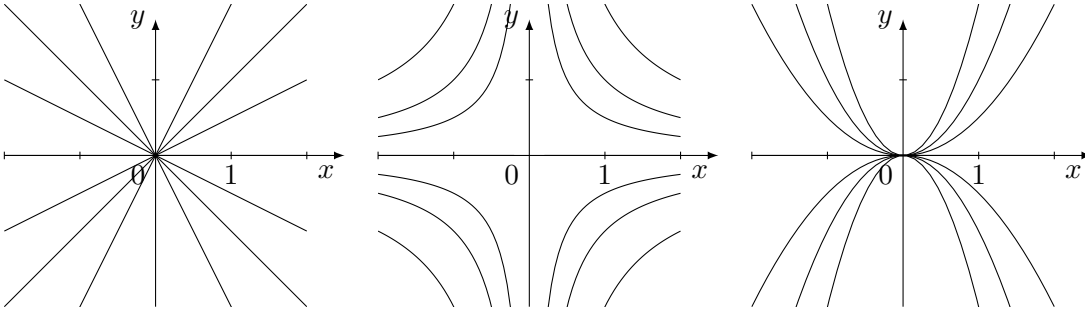


Рис. 4.5: Интегральные кривые уравнения (4.21) для $a = 1$, $a = -1$, $a = 2$

Если форма ω замкнута, то можно разбить область Ω на несколько звездных областей, в каждой из которых применить лемму Пуанкаре и построить функцию F с $dF = \omega$. Способ построения функции F содержится в доказательстве леммы Пуанкаре. Таким образом мы сведем задачу к случаю точной формы и сможем найти интегральные кривые уравнения.

Если форма ω не замкнута, в большинстве случаев её можно домножить на некоторую функцию f так, чтобы форма $f \cdot \omega$ была замкнутой, а затем решить уравнение в полных дифференциалах $f \cdot \omega = 0$ методами предыдущего раздела. Функция f называется *интегрирующим множителем* для уравнения $\omega = 0$.

Подобрать интегрирующий множитель бывает очень сложно. Позже мы увидим, что в окрестности большинства точек интегрирующий множитель существует (см. теорему 7.3.3). Но нет никакого общего алгоритма для его нахождения.

В следующих двух разделах мы рассмотрим два примера уравнений, для которых можно угадать интегрирующий множитель.

4.2.7.1 Линейное уравнение с постоянными коэффициентами

Рассмотрим уравнение вида

$$ax \, dy - y \, dx = 0, \text{ где } a \neq 0 \quad (4.21)$$

то есть $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{ax}$. Последнее уравнение нужно рассматривать в смысле определения 2.2.8.

Умножим обе части уравнения (4.21) на $\frac{y^{a-1}}{x^2}$ (это выражение будет интегрирующим множителем). Мы получим уравнение

$$\frac{ay^{a-1}}{x} dy - \frac{y^a}{x^2} dx = 0,$$

откуда $d\left(\frac{y^a}{x}\right) = 0$. Значит, для любого решения $y(x)$ уравнения (4.21) выполнено $\left(\frac{y^a}{x}\right) = \text{const}$. Таким образом, интегральные кривые содержатся в линиях уровня функции $\left(\frac{y^a}{x}\right)$ — в кривых $y^a = Kx$ (см. рис. 4.5). Каждая такая линия уровня

4 Симметрии и законы сохранения

состоит из двух интегральных кривых пфаффа уравнения: $y^a = Kx, x > 0$ и $y^a = Kx, x < 0$. Точка $(0, 0)$, если она и принадлежит линии уровня (что происходит при $a > 0$), не принадлежит области определения пфаффа уравнения — в ней функции $A(x, y)$ и $B(x, y)$ одновременно обращаются в ноль.

Упражнение 69. *Строго говоря, такое рассуждение работает только при $y > 0$ (иначе число y^a может не быть вещественным). Как выглядит уравнение интегральных кривых в области $y < 0$?*

Замечание 4.2.20. *Внимательный читатель может заметить, что уравнение (4.21) линейно, или что оно однородно. Поэтому его можно решить методами раздела 3.4 или 4.1.1.*

4.2.7.2 Система Лотки—Вольтерры

Система уравнений Лотки—Вольтерры возникает как простейшая модель системы «хищник — жертва» в живой природе. Рассмотрим взаимодействие только двух видов живых существ: «хищники» питаются «жертвами», и больше размножение «жертв» ничем не ограничено; при отсутствии «жертв» «хищники» вымирают.

Если бы хищников не было, скорость размножения жертв была бы пропорциональна их количеству. Количество жертв x подчинялось бы уравнению свободного размножения (см. параграф 1.1.1):

$$\dot{x} = Ax, \quad A > 0.$$

Если бы жертв не было, хищники умирали бы от голода; пусть хищники вымирают от голода экспоненциально быстро:

$$\dot{y} = -Cy, \quad C > 0.$$

Теперь в правые части этих уравнений нужно добавить слагаемые, которые учитывают поедание жертв хищниками. Будем считать, что количество встреч хищников с жертвами пропорционально xy , и каждая такая встреча с некоторой вероятностью заканчивается гибелью жертвы. Пусть рождаемость u хищников линейно зависит от количества съеденных жертв. Получаем такую систему уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax - Bxy, \\ \dot{y} = -Cy + Dxy, \end{cases} \quad (4.22)$$

где $B, D > 0$. Это система уравнений Лотки—Вольтерры.

Найдем фазовые кривые системы Лотки—Вольтерры в положительном квадранте $x > 0, y > 0$ (понятно, что количество хищников и жертв всегда положительно). Выше, в указании к упражнению 49 раздела 3.3.3, предлагается находить фазовые кривые системы Лотки—Вольтерры, переходя к интегральным кривым уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-Cy + Dxy}{Ax - Bxy} = \frac{-\frac{C}{x} + D}{\frac{A}{y} - B}$$

4.2.7. Решение пфаффовых уравнений и интегрирующий множитель

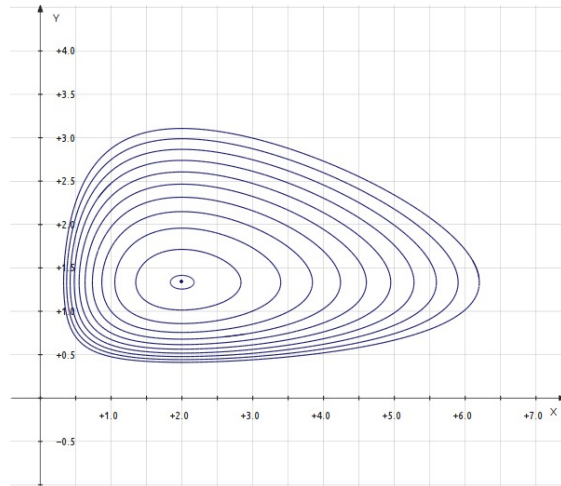


Рис. 4.6: Фазовые кривые уравнения Лотки–Вольтерры для $A = 4$, $B = 3$, $C = 2$, $D = 1$.

с помощью теоремы 3.3.2, а затем применяя метод разделения переменных. Ниже мы найдём фазовые кривые с помощью метода интегрирующего множителя.

Запишем уравнение в виде

$$(Ax - Bxy) dy + (Cy - Dxy) dx = 0$$

Разделим это уравнение на xy (в данном случае $1/(xy)$ — интегрирующий множитель):

$$\left(\frac{A}{y} - B\right) dy + \left(\frac{C}{x} - D\right) dx = 0$$

откуда

$$d(A \ln |y| - By + C \ln |x| - Dx) = 0$$

Значит, в области $x > 0$, $y > 0$ фазовые кривые заданы уравнением

$$y^A e^{-By} x^C e^{-Dx} = k. \quad (4.23)$$

(см. рис. 4.6).

Мы видим, что все фазовые кривые системы замкнуты. Чтобы доказать это, следует заметить, что первый интеграл $y^A e^{-By} x^C e^{-Dx}$ равен нулю на координатных осях и стремится к нулю на бесконечности.

Задача 70. Завершите доказательство того, что все фазовые кривые уравнения замкнуты.

Циклы, которые мы видим на рис. 4.6, можно описать следующим образом: когда количество хищников возрастает, они истребляют жертв и количество жертв убывает. Когда жертв становится слишком мало, их начинает не хватать для пропитания

4 Симметрии и законы сохранения

хищников, и количество хищников начинает убывать. Когда хищников становится достаточно мало, они начинают поедать меньшее количество жертв и количество жертв начинает возрастать. Количество пищи для хищников увеличивается, и хищники размножаются. Цикл замыкается, и все начинается сначала.

Таким образом, система «хищник – жертва» стабильна: не происходит ни неограниченного роста количества животных, ни полного вымирания. При этом количество хищников и жертв колеблется около некоторого *положения равновесия*, которое зависит только от чисел A, B, C, D .

Напомним, что *положение равновесия* (x_0, y_0) автономной системы — это точка (x_0, y_0) , такая что решением уравнения являются функции $x \equiv x_0, y \equiv y_0$. Соответствующая фазовая кривая состоит из одной точки (см. рис. 4.6). Найдём x_0, y_0 . Поскольку $x \equiv x_0, y \equiv y_0$ — решение уравнения, то

$$\begin{cases} Ax_0 - Bx_0y_0 = 0, \\ -Cy_0 + Dx_0y_0 = 0, \end{cases}$$

откуда

$$x_0 = C/D, y_0 = A/B.$$

При изучении систем «хищник – жертва» важно знать, каким будет среднее количество животных на данной территории. Вычислим среднее значение количества хищников и жертв для произвольной фазовой кривой в положительном квадранте.

Определение 4.2.21. Среднее значение периодической функции f за период — это

$$\bar{f} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt, \quad (4.24)$$

где T — длина периода: $f(t + T) = f(t)$ для произвольного t .

Заметим, что мы не знаем ни функций $x(t)$ и $y(t)$, ни длину периода T для этих функций. Поэтому мы не можем просто вычислить интеграл (4.24) для функций $x(t)$ и $y(t)$. Тем не менее, этот интеграл удаётся найти с помощью следующего приёма.

Разделим первое уравнение системы (4.22) на x и проинтегрируем левую и правую часть по отрезку $t \in [0, T]$:

$$\int_0^T \frac{\dot{x}(t) dt}{x(t)} = \int_0^T (A - By(t)) dt.$$

Левая часть после перехода к переменной x превращается в

$$\int_{x(0)}^{x(T)} \frac{dx}{x} = \ln x(T) - \ln x(0) = 0.$$

Последнее равенство следует из того, что функция $x(t)$ периодична с периодом T . Значит,

$$0 = \int_0^T (A - By(t)) dt = AT - B \int_0^T y(t) dt,$$

4.2.7. Решение пфаффовых уравнений и интегрирующий множитель

откуда $\bar{y} = A/B$. Аналогичным образом из второго уравнения системы Лотки—Вольтерры мы получаем, что $\bar{x} = C/D$.

Итак, среднее значение количества хищников и количества жертв за период не зависит от начальных условий и равно равновесному количеству $x_0 = C/D, y_0 = A/B$.

Влияние войны на численность популяции

Во время Первой мировой войны объём отлова рыбы в Адриатическом море резко уменьшился. В результате в уловах возросла доля хищной рыбы. То есть оказалось, что при уменьшении вылова рыбы отношение среднего количества хищников к среднему количеству жертв возрастает.

Чтобы объяснить это явление, Вито Вольтерра в 1925 году и предложил модель системы «хищник – жертва», которую мы только что рассмотрели. Пусть в Адриатическом море только два вида рыбы: «хищники» и «жертвы». Будем считать, что количество выловленной рыбы пропорционально общему количеству рыбы этого вида. Наше уравнение примет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - a)x - Bxy, \\ \dot{y} = (-C - c)y + Dxy, \end{cases} \quad (4.25)$$

где a, c — отношение количества выловленных жертв (соотв., хищников) к общему количеству жертв (соотв., хищников). В такой системе среднее количество жертв равно $\bar{x} = (C + c)/D$, а среднее количество хищников — $\bar{y} = (A - a)/B$. Во время войны константы a и c уменьшаются, так как уменьшается вылов рыбы. Значит, среднее количество жертв становится равно $(C + c - \varepsilon_1)/D$ (уменьшается), а среднее значение количества хищников становится равно $(A - a + \varepsilon_2)/B$ (увеличивается). Таким образом, модель Лотки—Вольтерры объясняет увеличение количества хищных рыб во время войны.

Позднее появились и другие, более точные популяционные модели. Заинтересованному читателю мы предлагаем прочитать работу К. Sigmund'a ⁶, посвященную уравнениям Колмогорова ^{7 8 9} и их роли в современной теории популяций, или работу ¹⁰

⁶<http://homepage.univie.ac.at/Karl.Sigmund/Kolmogorov.pdf>; Kolmogorov's Heritage in Mathematics, Springer Berlin Heidelberg, pp. 177-186, 2007

⁷ Андрей Николаевич Колмогоров (1903 – 1987) — математик, известный своим вкладом в теорию вероятностей, топологию, логику, теорию динамических систем, механику, теорию информации и сложность вычислений.

⁸ Kolmogorov, A. N. (1936) Sulla teoria di Volterra della lotta per l'esistenza. Giorn. Ist. Ital. Attuari 7: pp. 74-80.

⁹ Колмогоров А.Н. Качественное изучение математических моделей динамики популяций / Колмогоров А.Н. // Проблемы кибернетики, вып. 25.— М.:Наука, 1972. С.101-106.

¹⁰The influence of predator saturation effect and competition among predators on predator-prey system dynamics, A.D. Bazykin, F.S. Berezovskaya, G.A. Denisov, Yu.A. Kuznetsov, Ecological Modelling Volume 14, Issues 1-2, November 1981, Pages 39-57.

4.3 Первые интегралы и уравнения Ньютона на прямой

4.3.1 Критерий первого интеграла

В предыдущем параграфе мы, пользуясь теоремой 4.2.16, находили функции, постоянные вдоль интегральных кривых дифференциального уравнения на плоскости — *первые интегралы*. В этом параграфе мы обсудим понятие первого интеграла в более общем случае.

Определение 4.3.1. *Первый интеграл* неавтономного уравнения $\dot{x} = f(t, x)$ в области $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — это функция F на пространстве Ω , постоянная вдоль интегральных кривых этого уравнения. Другими словами, для любого решения $x(t)$ выполнено $F(t, x(t)) = \text{const}$.

Пример 4.3.2. Для точной дифференциальной 1-формы ω , $\omega = dF$, потенциал этой формы F является первым интегралом пфаффова уравнения $\omega = 0$.

Если речь идет об автономном уравнении (возможно, в многомерном пространстве), то естественно дать такое определение:

Определение 4.3.3. *Первый интеграл* автономного уравнения $\dot{x} = f(x)$ в области $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ — это функция F на пространстве $\tilde{\Omega}$, постоянная вдоль фазовых кривых этого уравнения. Другими словами, для любого решения $x(t)$ автономного уравнения выполнено $F(x(t)) = \text{const}$.

Для решения уравнения бывает полезно сначала найти его первый интеграл. Казалось бы, для того, чтобы выяснить, будет ли функция F первым интегралом, нужно сначала найти фазовые (в неавтономном случае — интегральные) кривые уравнения. А если мы уже нашли фазовые кривые, то решить уравнение можно без всяких первых интегралов. Как же может получиться, что мы нашли первый интеграл, не решая уравнения?

Конечно, *угадать* первый интеграл уравнения довольно сложно. Однако *проверить*, что мы угадали его правильно — совсем просто, и для этого не нужно решать уравнение.

В дальнейшем мы сосредоточимся на первых интегралах автономных уравнений. Пусть $\gamma(t)$ — фазовая кривая автономного уравнения $\dot{x} = f(x)$. Функция F постоянна вдоль неё тогда и только тогда, когда производная от функции $F(\gamma(t))$ по t равна нулю. Эту производную можно вычислить как производную от сложной функции, и она будет зависеть не от самой кривой γ , а от касательного вектора $\dot{\gamma}(t)$ к кривой γ . Так как γ — фазовая кривая нашего уравнения, этот вектор нам известен: он равен $\dot{\gamma}(t) = v(\gamma(t))$.

Эти соображения позволяют доказать следующее предложение

Предложение 4.3.4 (Критерий первого интеграла). Пусть $v(x)$ — векторное поле в некоторой области Ω . Пусть функция $F \in C^1(\Omega)$ определена в Ω , и в каждой точке $x \in \Omega$ её производная вдоль вектора $v(x)$ равна нулю: $\mathcal{L}_{v(x)}F = 0$. Тогда функция F является первым интегралом уравнения $\dot{x} = v(x)$.

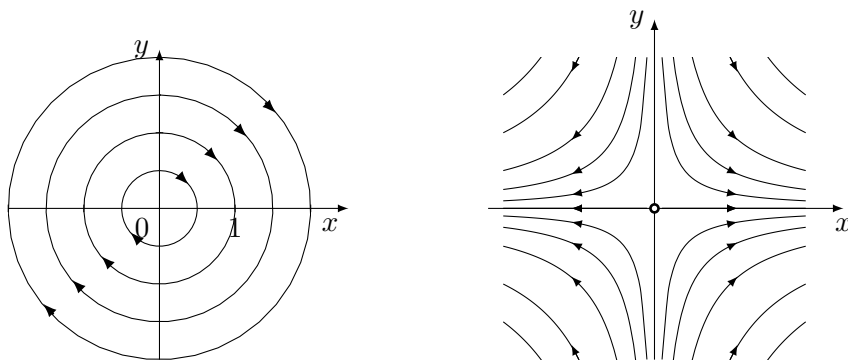


Рис. 4.7: У этих уравнений есть первые интегралы

Если через каждую точку области Ω проходит фазовая кривая векторного поля v , то верно и обратное утверждение: если функция $F \in C^1(\Omega)$ является первым интегралом уравнения $\dot{x} = v(x)$, то $\mathcal{L}_{v(x)}F = 0$.

Доказательство. Пусть $\gamma(t)$ — решение уравнения $\dot{x} = v(x)$. Производная $\frac{d}{dt}F(\gamma(t))$ равна производной функции F вдоль касательного вектора к кривой $\gamma(t)$:

$$\frac{d}{dt}F(\gamma(t)) = \mathcal{L}_{\dot{\gamma}(t)}F = \mathcal{L}_{v(x)}F. \quad (4.26)$$

Значит, если $\mathcal{L}_{v(x)}F = 0$ в любой точке x , то функция F постоянна вдоль фазовых кривых.

Наоборот, пусть функция F постоянна вдоль фазовых кривых уравнения. Проведём фазовую кривую через точку x . Из равенства (4.26) следует, что $\mathcal{L}_{v(x)}F = 0$. \square

Знание первого интеграла позволяет уменьшить размерность фазового пространства на единицу. Если Φ — первый интеграл системы в n -мерном пространстве, то каждая интегральная кривая уравнения содержится в множестве $\Phi(x) = \text{const}$, которое обычно представляет собой $(n - 1)$ -мерную поверхность (поверхность уровня функции Φ). Поэтому достаточно решить уравнение на каждой $(n - 1)$ -мерной поверхности уровня первого интеграла.

Упражнение 71. Найдите полную энергию для уравнений Ньютона $\ddot{x} = -x$ и $\ddot{x} = x$ методами раздела 1.1.3 и проверьте по критерию 4.3.4, что эти функции действительно являются первыми интегралами (см. рис. 4.7).

Упражнение 72. Докажите, что у систем уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = 2y \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - y, \end{cases}$$

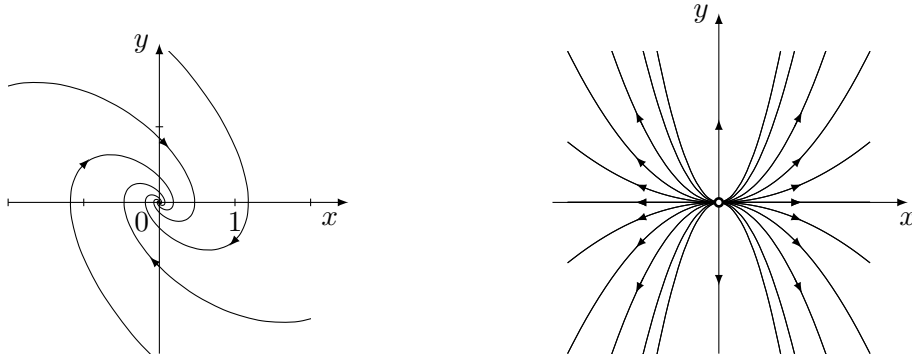


Рис. 4.8: У этих уравнений нет (непостоянных) первых интегралов

фазовые портреты которых изображены на рисунке 4.8, не может быть непостоянных первых интегралов, непрерывных в окрестности нуля.

4.3.2 Уравнения Гамильтона

В механике при изучении движения механической системы с одной степенью свободы часто возникают уравнения следующего вида:

$$\begin{cases} \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \\ \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \end{cases}$$

где $(p, q) \in \mathbb{R}^2$, $H(p, q) \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Например, q — координата материальной точки, p — её импульс. Функцию H называют гамильтонианом¹¹.

Функция H — первый интеграл нашей системы уравнений:

$$\mathcal{L}_{v(x)}H = dH\left(-\frac{\partial H}{\partial q}, \frac{\partial H}{\partial p}\right) = \left(\frac{\partial H}{\partial p}dp + \frac{\partial H}{\partial q}dq\right)\left(-\frac{\partial H}{\partial q}, \frac{\partial H}{\partial p}\right) = -\frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q} + \frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} = 0.$$

Этот первый интеграл называют интегралом энергии.

В многомерном случае (например, для движения систем материальных точек) система уравнений Гамильтона имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \\ \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \end{cases} \quad (4.27)$$

где $(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^{2n}$, H — функция $2n$ переменных $H(p, q) \in C^2(\mathbb{R}^{2n})$.

¹¹Уильям Роуэн Гамильтон (1805 – 1865) — математик, известный своими работами в области комплексного анализа, алгебры, геометрической оптики, классической механики.

Предложение 4.3.5. *Функция H — первый интеграл системы (4.27).*

Доказательство. Доказательство в точности такое же, как и для случая $n = 1$:

$$\mathcal{L}_{v(x)}H = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i \right) = \sum_{i=1}^n \left(-\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} + \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) = 0.$$

□

4.3.3 Уравнения Ньютона на прямой

Напомним, что в разделе 1.1.3 мы уже рассматривали уравнение Ньютона для движения точки на прямой. Мы получили закон сохранения энергии, домножив левую и правую часть уравнения на \dot{x} . Мы приведем более естественный способ решения уравнения Ньютона. Напомним постановку задачи.

Пусть материальная точка движется под действием внешней силы f , причем эта сила зависит только от положения точки. Движение точки определяется вторым законом Ньютона

$$m\ddot{x} = f(x).$$

Введём новую переменную y — скорость материальной точки. Тогда

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \frac{1}{m}f(x) \end{cases}$$

Перейдем, как мы делали в разделе 3.3.2 (теорема 3.3.2), от фазовых кривых этого уравнения к интегральным кривым уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{my}.$$

Запишем последнее уравнение в виде $mydy - f(x)dx = 0$. Дифференциальная форма $\omega = mydy - f(x)dx$ на плоскости точна. Чтобы убедиться в этом, можно проверить замкнутость формы ω и воспользоваться леммой Пуанкаре, но мы поступим проще. Возьмем функцию U — первообразную для функции $(-f)$: $U'(x) = -f(x)$. Тогда $\omega = d(\frac{my^2}{2} + U(x))$, т.е. форма ω точна. Отсюда (в силу теоремы 4.2.16) мы получаем закон сохранения энергии: величина $\frac{my^2}{2} + U(x)$, которая называется полной механической энергией, постоянна вдоль фазовых кривых уравнения.

При некоторых дополнительных предположениях условие $\frac{my^2}{2} + U(x) = \text{const}$ равносильно уравнению Ньютона на прямой:

Предложение 4.3.6. *Пусть $E(x, y) = \frac{my^2}{2} + U(x)$, где функция U гладкая. Положим $f(x) := -U'(x)$. Пусть $x(t)$ — положение материальной точки в момент времени t , функция $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ дважды непрерывно-дифференцируема и локально непостоянна. Пусть точка движется так, что $E(x(t), \dot{x}(t)) = \text{const}$.*

Тогда функция $x(t)$ подчиняется уравнению Ньютона $m\ddot{x} = f(x)$.

4 Симметрии и законы сохранения

Доказательство. Продифференцируем условие $E(x(t), \dot{x}(t)) = \text{const}$. Мы получим

$$0 = \frac{d}{dt} \left(\frac{m\dot{x}^2(t)}{2} + U(x(t)) \right) = \dot{x}(t) \cdot m\ddot{x}(t) - f(x(t)) \cdot \dot{x}(t).$$

Значит, или $\dot{x}(t) = 0$, или $m\ddot{x}(t) = f(x(t))$. Итак, равенство $\ddot{x}(t) = f(x(t))$ выполняется всюду, где $\dot{x}(t) \neq 0$.

В силу непрерывности обеих частей, это равенство выполняется при всех t . Исключение составляет случай, когда $\dot{x}(t) = 0$ на каком-нибудь интервале $t \in (a, b)$ (функция $x(t)$ локально постоянна). Но такое движение материальной точки исключено условием. \square

4.3.4 Уравнения Ньютона для движения в потенциальном поле сил

Пусть материальная точка в \mathbb{R}^n движется в (векторном) *поле сил* f : сила f , действующая на материальную точку, зависит только от её положения $x \in \mathbb{R}^n$. В силу второго закона Ньютона, закон движения точки подчиняется *уравнению Ньютона*

$$m\ddot{x} = f(x).$$

В отличие от одномерного случая, уравнение Ньютона в \mathbb{R}^n может не иметь интеграла энергии.

Определение 4.3.7. Поле сил $f(x)$ в евклидовом пространстве называется *потенциальным*, если существует функция U (*потенциал поля сил, или потенциальная энергия*), для которой $f(x) = -\text{grad } U(x)$.

Потенциальная энергия U определена с точностью до прибавления константы. Итак, уравнение Ньютона для движения в потенциальном поле сил в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n имеет вид

$$m\ddot{x} = -\text{grad } U(x), \tag{4.28}$$

где $U: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $U \in C^1(\mathbb{R}^n)$ — потенциальная энергия.

Предложение 4.3.8. *Полная механическая энергия $E = \frac{1}{2}m(\dot{x}, \dot{x}) + U(x)$ является первым интегралом системы (4.28).*

Доказательство. Если перейти от уравнения Ньютона к системе уравнений первого порядка в \mathbb{R}^{2n} , эта система будет иметь вид

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\frac{1}{m} \text{grad } U. \end{cases}$$

Покажем, что $E(x, y) = \frac{1}{2}m(y, y) + U(x)$ — её первый интеграл. Градиент квадратичной формы (y, y) равен $2y$. Значит, градиент функции E равен $\text{grad } E = (\text{grad } U, my)$: первые n координат этого вектора равны $\text{grad } U$, а следующие n равны

my_1, my_2, \dots, my_n . Осталось вычислить производную функции E вдоль векторного поля:

$$\mathcal{L}_{(y, -\frac{1}{m} \text{grad } U)} E = \left((\text{grad } U, my), \left(y, -\frac{1}{m} \text{grad } U \right) \right) = 0.$$

По критерию первого интеграла (предложение 4.3.4), E является первым интегралом уравнения (4.28). \square

В следующих разделах мы рассмотрим несколько примеров уравнений Ньютона.

4.3.5 Пружинный маятник

Мы уже рассматривали пружинный маятник в разделе 1.1.1. В этом разделе мы покажем, как можно найти те решения, которые мы подобрали в разделе 1.1.2, и доказать, что других нет.

Напомним, что пружинный маятник — это грузик, подвешенный на пружинке. Координатная ось Ox направлена вертикально; начало отсчета выбрано так, чтобы в точке $x = 0$ грузик был в равновесии. Тогда движение грузика описывается уравнением $\ddot{x} = -\frac{k}{m}x$, где m — масса грузика, а k — коэффициент жесткости пружины.

Допустим, коэффициент жесткости пружины равен $k = 1$, а масса грузика равна $m = 1$. Уравнение принимает вид

$$\ddot{x} = -x.$$

Введём новую переменную $y = \dot{x}$:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x. \end{cases}$$

Потенциальная энергия пружины равна $U(x) = \int x dx = \frac{x^2}{2} + c$; константу можно выбирать произвольно, и мы положим $c = 0$. По предложению 4.1.6, полная механическая энергия $E(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$ — первый интеграл системы. Это можно увидеть и по векторному полю системы (см. рис 4.9): векторы поля касаются окружностей с центром в точке 0 , а потому эти окружности являются фазовыми кривыми.

Выясним, в каком направлении движется точка $(x(t), y(t))$ по окружности $x^2 + y^2 = 2E$. Напомним, что y — скорость грузика. Когда она положительна ($y > 0$), значение x должно расти вдоль фазовых кривых, а когда отрицательна — убывать. Другими словами, в верхней полуплоскости движение происходит слева направо, а в нижней — справа налево. Значит, вдоль окружности точка $(x(t), y(t))$ движется по часовой стрелке. Поэтому на рис. 4.9 стрелки на фазовых кривых расставлены правильно.

Но мы пока не знаем решений системы — самих функций $x(t)$ и $y(t)$. Другими словами, мы не знаем, как именно движется точка $(x(t), y(t))$ по окружности $x^2 + y^2 = 2E$.

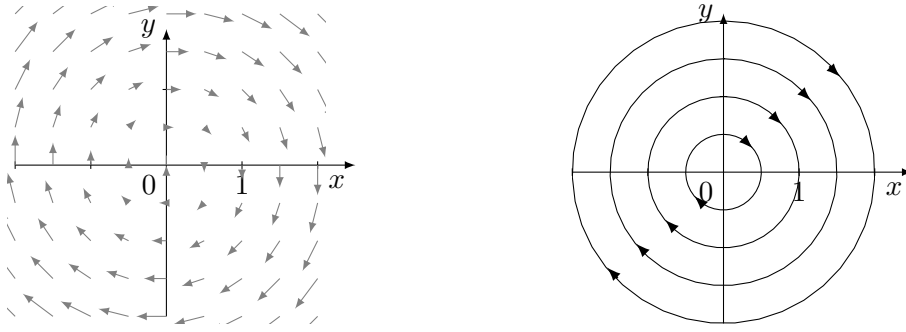


Рис. 4.9: Векторное поле и фазовый портрет для пружинного маятника.

Решение из геометрических соображений.

Заметим, что длины всех векторов поля, касающихся окружности $x^2 + y^2 = 2E$, одинаковы и равны $\sqrt{2E}$. Поэтому движение по окружности $x^2 + y^2 = 2E$ происходит с постоянной скоростью $\sqrt{2E}$. Так как длина окружности равна $2\pi\sqrt{2E}$, то угловая скорость движения равна 1 и точка движется против часовой стрелки. Пусть движение началось в точке (x_0, y_0) , угловая координата которой φ ; тогда $(x_0, y_0) = \sqrt{2E}(\cos \varphi, \sin \varphi)$. В момент времени t мы окажемся в точке $(x(t), y(t)) = \sqrt{2E}(\cos(-t + \varphi), \sin(-t + \varphi))$. Если теперь применить формулы для косинуса и синуса суммы, мы получим

$$(x(t), y(t)) = (x_0 \cos t - y_0 \sin t, x_0 \sin t + y_0 \cos t). \quad (4.29)$$

Это и есть решение уравнения с начальным условием (x_0, y_0) . Его также можно записать так:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

Такая матрица — это матрица поворота на угол t по часовой стрелки. И действительно, точка $(x(t), y(t))$ получается из начального условия (x_0, y_0) поворотом на угол t вокруг нуля по часовой стрелке.

Итак, мы видим, что пружинный маятник движется периодически. Период его колебаний равен 2π и не зависит от амплитуды колебаний.

Решение методом разделения переменных.

Мы знаем, что фазовые кривые лежат на окружностях $x^2 + y^2 = 2E$. Для точки на окружности $y = \pm\sqrt{2E - x^2}$. В полуплоскости $y > 0$ из уравнения $\dot{x} = y$ получаем

$$\dot{x} = \sqrt{2E - x^2}.$$

Применим метод разделения переменных:

$$t - t_0 = \int_{x_0}^x \frac{d\zeta}{\sqrt{2E - \zeta^2}}.$$

Отсюда

$$t - t_0 = \arcsin \frac{x}{\sqrt{2E}} - \arcsin \frac{x_0}{\sqrt{2E}}$$

и

$$x(t) = \sqrt{2E} \sin\left(t - t_0 + \arcsin \frac{x_0}{\sqrt{2E}}\right).$$

Перепишем это равенство в более удобном виде, пользуясь формулой синуса суммы:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sqrt{2E} \cos(t - t_0) \frac{x_0}{\sqrt{2E}} + \sqrt{2E} \sin(t - t_0) \sqrt{1 - \frac{x_0^2}{2E}} = \\ &= x_0 \cos(t - t_0) + y_0 \sin(t - t_0). \end{aligned}$$

У нас получилось то же решение, что и в предыдущем пункте.

Упражнение 73. Доведите это рассуждение до конца, рассмотрев движение в полуплоскости $y < 0$.

Метод, которым мы действовали в этом пункте, можно применять к уравнениям Ньютона произвольного вида: из закона сохранения энергии $\frac{y^2}{2} + U(x) = E$ получается уравнение на прямой

$$\dot{x} = \pm \sqrt{2(E - U(x))}$$

с разделяющимися переменными:

$$t - t_0 = \pm \int_{x_0}^x \frac{d\zeta}{\sqrt{2(E - U(\zeta))}}.$$

Пружинный маятник в общем случае

Если не предполагать, что масса грузика равна 1 и $k = 1$, второй закон Ньютона для пружинного маятника примет вид

$$\ddot{x} = -\omega^2 x. \quad (4.30)$$

Здесь $\omega^2 = k/m$. Изменим единицы измерения времени: введем переменную $\tau = \omega t$. Тогда $\frac{d^2x}{d\tau^2} = -x$. Мы свели задачу к предыдущей. Итак, решение имеет вид

$$x = A \cos \tau + B \sin \tau = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t).$$

Значит, период колебаний маятника равен $\frac{2\pi}{\omega}$.

Фазовый портрет уравнения (4.30) состоит из эллипсов $y^2 + \omega^2 x^2 = 2E$ (см. рис. 4.10). Действительно, при изменении единиц измерения времени скорость меняется в ω раз, и эллипсы переходят в окружности.

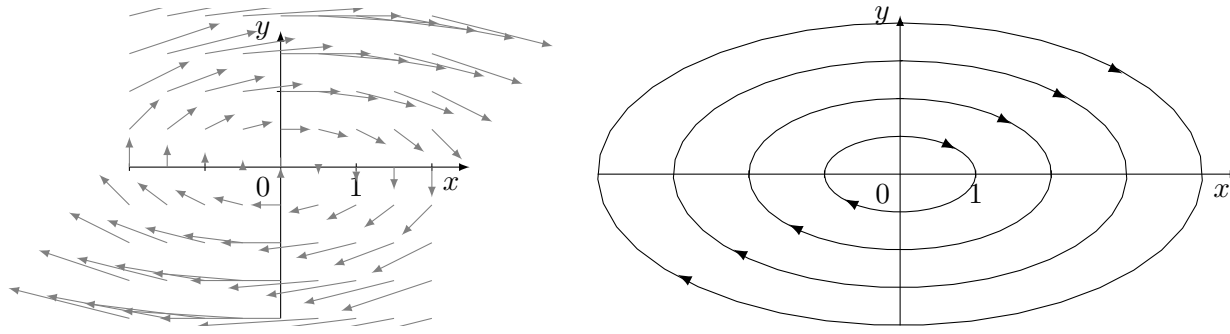


Рис. 4.10: Векторное поле и фазовый портрет пружинного маятника; $k/m = 1/4$

4.3.6 Математический маятник

Рассмотрим математический маятник — грузик массы m , подвешенный на нерастяжимом, несжимаемом и невесомом стержне длины l в поле силы тяжести (см. рис. 4.11 слева). Второй конец стержня закреплен неподвижно в точке O так, что грузик может двигаться только в одной плоскости.

Как мы показали в разделе 1.1.2, уравнение движения маятника имеет вид

$$m\ddot{x} = -m\frac{g}{l}\sin x,$$

где x — угол между направлением стержня и вертикалью. Будем считать, что $g = l = 1$ (мы выберем такие единицы измерения времени и расстояния, чтобы это равенство было выполнено). Уравнение примет вид

$$\ddot{x} + \sin x = 0. \tag{4.31}$$

Положим $y = \dot{x}$. Уравнение $\ddot{x} = -\sin x$ превратится в систему автономных уравнений $\dot{x} = y, \dot{y} = -\sin x$. По закону сохранения энергии, величина $\frac{y^2}{2} - \cos x = E$ постоянна. Этот результат можно получить двумя способами.

Во-первых, можно построить первый интеграл энергии для уравнения (4.31), как мы делали в разделе 4.3.3. В данном случае $\int \sin x dx = -\cos x + c$. Константу можно выбирать произвольно; положим $U(x) = -\cos x$, тогда $E = \frac{\dot{x}^2}{2} - \cos x$ — первый интеграл уравнения.

Во-вторых, можно вспомнить закон сохранения энергии из курса физики. Кинетическая энергия грузика в данном случае равна $\frac{m\dot{x}^2}{2}$, а потенциальная энергия равна mgh , где $h = -\cos x$ — высота, на которой расположен грузик. Закон сохранения энергии наводит на мысль, что выражение $\frac{\dot{x}^2}{2} - \cos x$ должно быть первым интегралом уравнения (4.31). Критерий первого интеграла (предложение 4.3.4) позволяет проверить этот факт, не ссылаясь на закон сохранения энергии.

На рисунке 4.11 изображены линии уровня первого интеграла — кривые $y = \pm\sqrt{C + 2\cos x}$. Мы знаем, что они содержат фазовые кривые системы $\dot{x} = y, \dot{y} = -\sin x$. Рисунок периодичен (не меняется при сдвиге на 2π по горизонтали). Дело

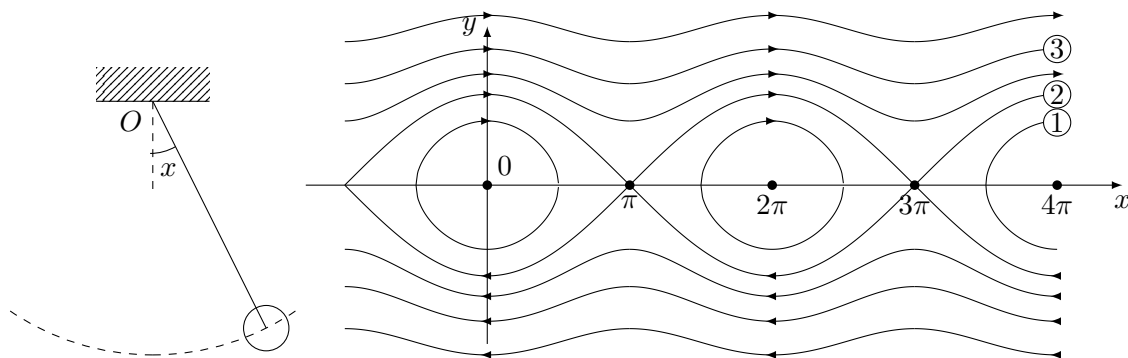


Рис. 4.11: Математический маятник и его фазовые кривые

в том, что координата x — это угол между стержнем и вертикалью, значит, она определена с точностью до прибавления 2π . Строго говоря, множество значений координаты x образует окружность, поэтому картинку правильнее было рисовать на бесконечном цилиндре $x \in S^1, y \in \mathbb{R}$.

На рисунке жирным отмечены положения равновесия $(k\pi, 0)$, в которых векторное поле равно нулю. Если в начальный момент маятник оказался в положении равновесия, то он будет находиться в нём бесконечно долго. Точки $(2\pi n, 0)$ соответствуют нижнему положению равновесия, а $((2n + 1)\pi, 0)$ — верхнему.

Каждая линия уровня, на которой $C \neq 2$, совпадает с фазовой кривой. При $C < 2$ линия уровня замкнута, и маятник раскачивается около нижнего положения равновесия (такая фазовая кривая отмечена на рисунке цифрой ①). При $C > 2$ маятник делает бесконечно много оборотов (качели делают “солнышко”). На рисунке такая фазовая кривая отмечена цифрой ③.

Цифрой ② на рисунке отмечена линия уровня $y = \pm\sqrt{2 + 2\cos x}$, на которой $C = 2$. Она является объединением бесконечного количества фазовых кривых: положений равновесия $x = k\pi, y = 0$ и дуг между положениями равновесия. Каждая дуга соответствует движению, при котором грузик бесконечно долго приближается к верхнему положению равновесия (и в далёком прошлом находился сколь угодно близко к верхнему положению равновесия). Такие фазовые кривые невозможно пронаблюдать как движения математического маятника из-за наличия трения. Но они играют особую роль, так как разделяют области фазового пространства с разным поведением фазовых кривых. Такие кривые называются сепаратрисами.

Изучим поведение фазовых кривых в окрестности положений равновесия.

Начнем с нижнего положения равновесия. В его окрестности фазовые кривые замкнуты, и картинка напоминает картинку для пружинного маятника. Неформальное объяснение таково: уравнение колебаний маятника $\ddot{x} = -\sin x = -x + \frac{x^3}{3!} - \dots$ «в первом приближении» совпадает с уравнением для пружинного маятника $\ddot{x} = -x$, поэтому их фазовые портреты должны быть похожи. В следующем разделе мы формализуем это рассуждение, чтобы изучить колебания математического маятника вблизи нижнего положения равновесия (результат будет применим и в более общем случае).

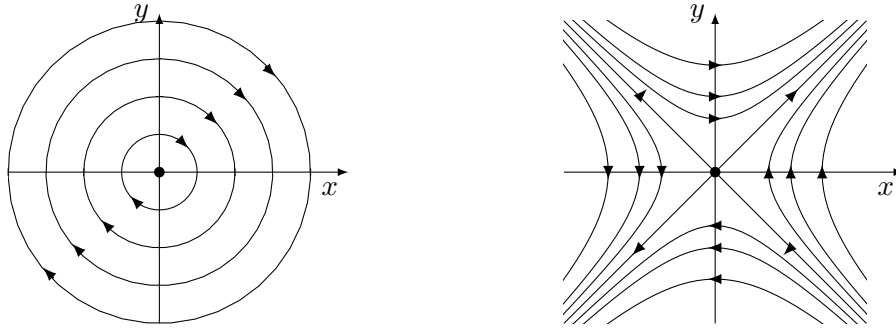


Рис. 4.12: Фазовый портрет в окрестности нижнего и верхнего положения равновесия математического маятника (центр и седло)

Замечание 4.3.9 (Предупреждение). Такой метод — заменить уравнение вблизи положения равновесия на близкое уравнение — работает не всегда. Например, рассмотрим уравнение $\ddot{x} = -x - \dot{x}^3$. Правая часть этого уравнения тоже близка к $-x$ в окрестности положения равновесия $x = 0, \dot{x} = 0$, но фазовый портрет соответствующей системы $\dot{x} = y, \dot{y} = -x - y^3$ совсем не похож на фазовый портрет пружинного маятника. Фазовые кривые этой системы приближаются к нулю, так как величина $x^2 + y^2$ убывает вдоль фазовых кривых (проверьте это!).

Тем не менее, такой метод можно применять в окрестностях положений равновесия для нашей системы. Применим его и для верхнего положения равновесия $(x, y) = (\pi, 0)$. Уравнение $\ddot{x} = -\sin x$ в окрестности точки π запишем следующим образом: обозначив $z := x - \pi$, получим

$$\ddot{z} = -\sin(z + \pi) = \sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \dots,$$

то есть в первом приближении уравнение совпадает с уравнением $\ddot{z} = z$. Фазовый портрет этого уравнения (“седло”) изображен на рис. 4.12. Видно, что он похож на фазовый портрет математического маятника в окрестности точки $(\pi, 0)$. В частности, сепаратрисы обоих уравнений имеют одинаковый угол наклона.

Упражнение 74. Докажите это.

Мы докажем обобщение этого утверждения в следующем разделе, см. предложение 4.3.11.

4.3.7 Малые колебания для уравнения Ньютона на прямой

Вернемся к уравнению Ньютона на прямой в его общем виде. Напомним, что полная механическая энергия является первым интегралом уравнения Ньютона, см. раздел 4.3.3.

4.3.7. Малые колебания для уравнения Ньютона на прямой

Предложение 4.3.10. Пусть $U \in C^2(\mathbb{R})$ — потенциал уравнения Ньютона на прямой

$$\ddot{x} = f(x),$$

то есть $U'(x) = -f(x)$. Пусть функция U имеет локальный минимум в нуле, причем вторая производная функции U в нуле положительна. Положим

$$\omega^2 = U''(0).$$

Тогда в окрестности нуля решения уравнения ведут себя так же, как и для пружинного маятника с частотой ω (см. раздел 4.3.5). Более точно,

- 1) При достаточно малых значениях (x_0, y_0) решение уравнения $\ddot{x} = f(x)$ с начальным условием $x(t_0) = x_0, \dot{x}(t_0) = y_0$ периодично.
- 2) Пусть $T_{(x_0, y_0)}$ — период этого решения. Тогда

$$\lim_{(x_0, y_0) \rightarrow 0} T_{(x_0, y_0)} = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Доказательство. Для начала, как и в разделе 4.3.5, заменой $\tau = \omega t$ сведём задачу к случаю $\omega = 1$. Для простоты будем считать, что $U(0) = 0$: если это не так, мы можем прибавить константу к функции U .

Шаг 1: Фазовая кривая не покидает малую окрестность нуля

Для каждого малого r мы докажем, что если фазовая кривая начинается достаточно близко к нулю, то она не покидает круг $\{x, y \in \mathbb{R} \mid |(x, y)| < r\}$.

Напомним, что функция $U(x)$ имеет локальный минимум в точке 0, и $U(0) = 0$. Выберем окрестность нуля, в которой значения $U(x)$ неотрицательны. Внутри этой окрестности рассмотрим окружность $|(x, y)| = r$ с центром в нуле. Пусть $E(x, y) = U(x) + y^2/2$ — полная механическая энергия системы. Положим $\delta = \min_{|(x, y)|=r} E(x, y)$; тогда $\delta > 0$.

Значит, если фазовая кривая началась в точке (x_0, y_0) , для которой $E(x_0, y_0) < \delta$, она не сможет пересечь окружность $|(x, y)| = r$, ведь функция E постоянна вдоль траекторий. Осталось заметить, что в достаточно малой окрестности нуля $\Omega \subset \{|(x, y)| < r\}$ выполнено $E(x, y) < \delta$, поскольку $E(0, 0) = 0$. Значит, траектория, которая начинается в окрестности Ω , не сможет пересечь окружность $|(x, y)| = r$ и останется внутри нее. Утверждение доказано.

Шаг 2: фазовая кривая, близкая к нулю, делает полный оборот за время, близкое к 2π

Для любого $\tau > 0$ мы найдем окрестность нуля, такую, что если фазовая кривая началась в этой окрестности нуля, то за время $t \in (2\pi - \tau, 2\pi + \tau)$ она сделает полный оборот.

Пусть функция $\varphi(x, y)$ — полярный угол точки (x, y) , то есть угол между векторами (x, y) и $(1, 0)$. Для каждого решения $(x(t), y(t))$ рассмотрим функцию $\psi(t) = \varphi(x(t), y(t))$. Вычислим её производную $\dot{\psi}(t)$ и покажем, что она близка к (-1) для

4 Симметрии и законы сохранения

фазовых кривых, близких к нулю. Строго говоря, функция $\psi(t)$ многозначна (определена с точностью до прибавления $2\pi n, n \in \mathbb{Z}$), но её производная определена однозначно (ср. с рассуждением из раздела 4.2.6).

В правой полуплоскости $\varphi(x, y) = \arctg \frac{y}{x}$, а в левой $\varphi(x, y) = \pi + \arctg \frac{y}{x}$; оба равенства выполнены с точностью до прибавления $2\pi n$. Поэтому производная $\dot{\psi}(t)$ при $x(t) \neq 0$ равна

$$\dot{\psi}(t) = \frac{x(t)\dot{y}(t) - y(t)\dot{x}(t)}{x^2(t) + y^2(t)} = \frac{x(t)f(x(t)) - y^2(t)}{x^2(t) + y^2(t)} = -1 + \frac{x^2(t)(\frac{f(x(t))}{x(t)} + 1)}{x^2(t) + y^2(t)}. \quad (4.32)$$

Для любых x, y выполнено $\frac{x^2}{x^2+y^2} < 1$. Оценим $(\frac{f(x(t))}{x(t)} + 1)$.

Отметим, что $f(0) = -U'(0) = 0$, так как U имеет минимум в нуле; кроме того, $f'(0) = -U''(0) = -1$. Поэтому по определению производной $\frac{f(x)}{x} + 1 = f'(0) + 1 + o(1) = o(1)$ при $x \rightarrow 0$. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем r таким образом, что $|\frac{f(x)}{x} + 1| < \varepsilon$ при $|x| < r$. Имеем $\dot{\psi}(t) \in [-1-\varepsilon, -1+\varepsilon]$ во всех точках фазовой кривой, для которых $|x(t)| < r$. В силу Шага 1, для фазовой кривой, которая начинается достаточно близко к нулю, имеем $\dot{\psi}(t) \in [-1-\varepsilon, -1+\varepsilon]$ при всех t .

Значит, за время $t \in [\frac{2\pi}{1+\varepsilon}, \frac{2\pi}{1-\varepsilon}]$ фазовая кривая, которая началась достаточно близко к нулю, сделает полный оборот: приращение угловой координаты $\varphi(x, y)$ составит ровно -2π . В силу произвольности ε , утверждение доказано.

Шаг 3: фазовая кривая, близкая к нулю, замыкается за один оборот

Докажем, что фазовая кривая, достаточно близкая к нулю, обязательно замкнется, сделав один оборот вокруг нуля. Предположим, что кривая сделала полный оборот и из точки $(x_1, 0)$ пришла в точку $(x_2, 0)$ (где $x_1 > 0, x_2 > 0$), но не замкнулась: $x_1 \neq x_2$. Тогда по закону сохранения энергии $U(x_1) = U(x_2)$. Из условия на вторую производную следует, что у функции U в нуле строгий минимум, поэтому $U(x_1) = U(x_2) > 0$ для положительных x_1, x_2 и $U(0) = 0$. Это противоречит выпуклости функции U , которая следует из равенства $U''(0) > 0$ и непрерывности второй производной.

Мы получили, что для любого $\tau > 0$ если фазовая кривая достаточно близка к нулю, то она делает полный оборот за время $t \in [2\pi-\tau, 2\pi+\tau]$ и при этом замыкается. Утверждение доказано. \square

Упражнение 75. Пользуясь доказанным предложением 4.3.10, вычислите период малых колебаний математического маятника вблизи нижнего положения равновесия.

Мы также приведем (без подробного доказательства) аналогичное утверждение для неустойчивого положения равновесия одномерных уравнений Ньютона.

Предложение 4.3.11. Пусть $U \in C^2(\mathbb{R})$ — потенциал уравнения Ньютона на прямой

$$\ddot{x} = f(x),$$

4.3.7. Малые колебания для уравнения Ньютона на прямой

то есть $U'(x) = -f(x)$. Пусть функция U имеет локальный максимум в нуле, причем вторая производная функции U в нуле отрицательна. Положим

$$k^2 = -U''(0).$$

Тогда в окрестности нуля фазовый портрет является седлом, как и для линейного уравнения $\dot{x} = y, \dot{y} = k^2x$. Более точно,

- 1) Существуют ровно две фазовые кривые, для которых $\lim_{t \rightarrow +\infty} (x(t), y(t)) = 0$, и ровно две фазовые кривые, для которых $\lim_{t \rightarrow -\infty} (x(t), y(t)) = 0$.

Такие четыре кривых называются сепаратрисами.

- 2) Касательные векторы к сепаратрисам такие же, как у линейной системы $\dot{x} = y, \dot{y} = k^2x$, то есть $(\pm 1, \pm k)$.

Доказательство. Будем считать, что $U(0) = 0$. Так как $E = \text{const}$ вдоль фазовых кривых и функция E непрерывна, равенство $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} (x(t), y(t)) = 0$ возможно только если на этой фазовой кривой $E = 0$.

Исследуем нулевую линию уровня энергии — множество $S = \{E(x, y) = 0\} = \{\frac{y^2}{2} = -U(x)\}$ в окрестности нуля. В силу критерия первого интеграла, векторное поле всюду касается линий уровня энергии, кроме точки $(0, 0)$ (где векторное поле нулевое, а дифференциал dE вырожденный). Значит, линии уровня энергии состоят из фазовых кривых уравнения. В частности, множество S состоит из пяти фазовых кривых: одна из них — неподвижная точка $(0, 0)$, остальные задаются уравнениями $y = \pm\sqrt{-2U(x)}, x > 0$ и $y = \pm\sqrt{-2U(x)}, x < 0$. Последние четыре кривые и будут сепаратрисами. Легко убедиться, что вдоль сепаратрис $y = \sqrt{-2U(x)}, x > 0$ и $y = -\sqrt{-2U(x)}, x < 0$ векторное поле направлено от нуля, поэтому на них $\lim_{t \rightarrow -\infty} (x(t), y(t)) = (0, 0)$; на двух других векторное поле направлено к нулю, поэтому $\lim_{t \rightarrow +\infty} (x(t), y(t)) = (0, 0)$.

Напомним, что $U(0) = U'(0) = 0, U''(0) = -k^2$. Поэтому $\sqrt{-2U(x)} = \sqrt{k^2x^2(1 + o(1))} = |x| \cdot (k + o(1))$. Значит, касательные векторы к сепаратрисам в точке 0 равны $(\pm 1, \pm k)$, что и требовалось доказать.

□

4.4 Законы Кеплера

4.4.1 Движение планеты вокруг Солнца. Центральное поле сил

В начале XVII века Иоганн Кеплер сформулировал законы движения планет вокруг Солнца¹², обобщая результаты многочисленных наблюдений своих предшественников, прежде всего Тихо Браге¹³.

- Планеты движутся вокруг Солнца по эллипсам. Один из фокусов эллипса совпадает с Солнцем.
- Площади, которые заметает радиус-вектор планеты за одинаковые промежутки времени, равны.
- Для двух планет, вращающихся вокруг Солнца, отношение квадратов периодов обращения равно отношению кубов больших полуосей их орбит.

В 1686 году Исаак Ньютон вывел формулу для закона всемирного тяготения из законов Кеплера в своем знаменитом труде¹⁴. Мы решим обратную задачу — выведем законы Кеплера из закона всемирного тяготения.

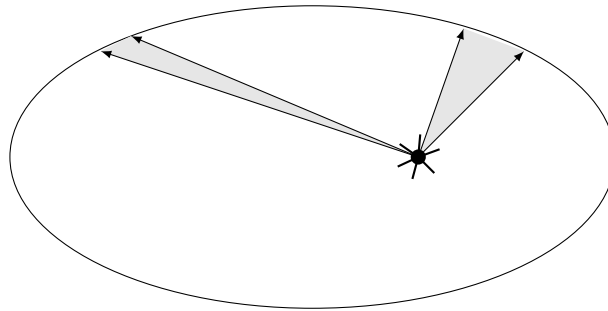


Рис. 4.13: Траектория движения планеты вокруг Солнца и площади, которые заметает радиус-вектор за равные промежутки времени

Солнце мы будем считать неподвижным и расположенным в начале координат. Пусть $x = (x_1, x_2, x_3)$ — радиус-вектор планеты, r — его длина. Тогда по закону всемирного тяготения на планету действует сила

$$f = -G \frac{mM_{\text{Солнца}}}{r^2} e_r \quad (4.33)$$

¹²Иоганн Кеплер (1571 – 1630) — математик, астроном, оптик. Знаменит открытием трех законов движения планет.

¹³Тихо Браге (1546 – 1601) — астроном, известный точнейшими для своего времени астрономическими наблюдениями.

¹⁴I.S.Newton, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, 1686. Перевод с комментариями: Ньютон Исаак, *Математические начала натуральной философии*. — М.: Наука, 1989.

со стороны Солнца. Здесь G — гравитационная постоянная, $M_{\text{Солнца}}$ — масса Солнца, m — масса планеты, r — расстояние от центра планеты до центра Солнца, $e_r = x/r$ — единичный вектор, параллельный x . Величина $k := GM_{\text{Солнца}}$ одинакова для всех планет Солнечной системы. Итак, уравнение движения планеты вокруг Солнца имеет вид

$$\ddot{x} = -\frac{k}{r^2}e_r \quad (4.34)$$

Определение 4.4.1. Говорят, что тело движется в *центральной поле сил*, если сила, действующая на тело, параллельна его радиус-вектору, а её величина зависит только от расстояния тела до точки 0. Такое движение задается уравнением

$$\ddot{x} = f(r)e_r. \quad (4.35)$$

Движение в поле силы тяжести — частный случай движения в центральном поле сил: достаточно положить $f(r) = -\frac{k}{r^2}$.

Упражнение 76. Считая, что планета движется вокруг Солнца по окружности, найдите закон её движения $x(t)$. Проверьте второй и третий законы Кеплера для планет, которые движутся по окружностям.

4.4.2 Законы сохранения для движения в центральном поле сил

В разделе 4.3.4 мы рассматривали уравнения Ньютона $m\ddot{x} = f(x)$ в потенциальном поле сил. Мы выяснили, что это уравнение имеет первый интеграл: полная механическая энергия постоянна.

Центральное поле сил всегда является потенциальным; потенциальная энергия зависит только от r .

Определение 4.4.2. Потенциальной энергией тела единичной массы при движении в центральном поле сил называется функция $U(r)$, для которой $\frac{d}{dr}U(r) = -f(r)$.

Так как градиент функции U (как функции переменной x) равен $\text{grad } U = -f(r)e_r$, эта функция действительно является потенциальной энергией уравнения (4.35) в смысле определения 4.3.7 раздела 4.3.4.

Для планеты, движущейся вокруг Солнца, потенциальная энергия равна $U(r) = -\frac{k}{r}$.

Определение 4.4.3. Кинетической энергией тела единичной массы называется величина $\frac{\langle \dot{x}, \dot{x} \rangle}{2}$.

Следующее предложение следует из предложения 4.3.8 раздела 4.3.4.

Предложение 4.4.4. Для движения в центральном поле сил полная механическая энергия E (сумма кинетической и потенциальной энергии) сохраняется. Другими словами, $E := \frac{1}{2}\langle \dot{x}, \dot{x} \rangle + U(r) = \text{const}$.

Кроме интеграла энергии, у уравнения (4.35) есть еще один первый интеграл.

Предложение 4.4.5. Момент количества движения $\vec{c} = [x, \dot{x}]$ является первым интегралом уравнения (4.35).

Здесь и далее запись $[v, w]$ означает векторное произведение векторов v и w .

Доказательство. Проверим, что $\frac{d}{dt}[x, \dot{x}] = 0$. Воспользуемся формулой

$$\frac{d}{dt}[v(t), w(t)] = [\dot{v}(t), w(t)] + [v(t), \dot{w}(t)].$$

Упражнение 77. Докажите эту формулу, если она вам неизвестна.

Получим $\frac{d}{dt}[x, \dot{x}] = [\dot{x}, \dot{x}] + [x, \ddot{x}] = 0 + [x, f(r)e_r] = 0$, так как векторное произведение параллельных векторов равно нулю. \square

Следствие 4.4.6. Движение в центральном поле сил происходит в плоскости, перпендикулярной (постоянному) вектору момента количества движения \vec{c} .

Доказательство. Действительно, $x \perp [x, \dot{x}] = \vec{c}$. \square

Строго говоря, нужно отдельно рассмотреть случай $\vec{c} = 0$. Тогда $x \parallel \dot{x}$, то есть скорость тела направлена вдоль его радиус-вектора. Из физических соображений ясно, что в этом случае тело будет двигаться по прямой — падать на Солнце или удаляться от него.

Упражнение 78. Дайте строгое обоснование того, что при $\vec{c} = 0$ тело движется вдоль прямой, доказав, что вектор e_r постоянен.

Указание: продифференцируйте выражение $x = re_r$ по t , ср. с леммой 4.4.7 следующего раздела.

Упражнение 79. Найдите закон движения тела, падающего на Солнце по прямой.

4.4.3 Полярная система координат. Второй закон Кеплера для движения в центральном поле сил

Уравнения вида (4.35) удобнее всего решать в полярной системе координат (r, φ) на той плоскости, в которой происходит движение (см. следствие 4.4.6). Будем считать, что эта плоскость совпадает с плоскостью Ox_1x_2 .

Кроме вектора $e_r = x/r$, введём перпендикулярный ему единичный вектор e_φ в плоскости Ox_1x_2 , направленный против часовой стрелки, и вектор $e_z = (0, 0, 1)$.

Перейдём к переменным r, φ . Для этого выразим \dot{x} через \dot{r} и $\dot{\varphi}$.

Лемма 4.4.7. Пусть $x(t) \in \mathbb{R}^2$ — радиус-вектор движущейся точки в момент времени t ; пусть $(r(t), \varphi(t))$ — её полярные координаты. Тогда $\dot{x} = \dot{r}e_r + r\dot{\varphi}e_\varphi$.

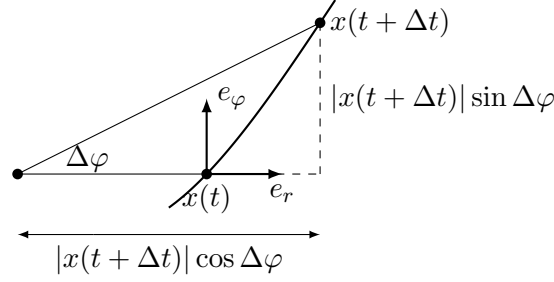


Рис. 4.14: Иллюстрация к доказательству леммы

Доказательство. Геометрическое доказательство

Рассмотрим приращение $\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t)$ (см. рис. 4.14). Проекция этого приращения на вектор e_φ равна $|x(t + \Delta t)| \sin \Delta\varphi$, что примерно равно $r\Delta\varphi$. Проекция приращения на вектор e_r равна $|x(t + \Delta t)| \cos \Delta\varphi - |x(t)|$, что примерно равно $|x + \Delta x| - |x| = \Delta r$. Переход к пределу даёт $\dot{x} = \dot{r}e_r + r\dot{\varphi}e_\varphi$.

Аналитическое доказательство

Так как $x = r(\cos \varphi, \sin \varphi)$, то производная этого вектора по t равна

$$\dot{x} = \dot{r}(\cos \varphi, \sin \varphi) + r(-\dot{\varphi} \sin \varphi, \dot{\varphi} \cos \varphi) = \dot{r}e_r + r\dot{\varphi}e_\varphi.$$

□

Запишем закон сохранения момента количества движения в полярной системе координат.

$$\text{const} = \vec{c} = [x, \dot{x}] = [x, \dot{r}e_r + r\dot{\varphi}e_\varphi] = r^2\dot{\varphi}[e_r, e_\varphi] = r^2\dot{\varphi}e_z,$$

поэтому $|\vec{c}| = r^2\dot{\varphi}$. Оказывается, $r^2\dot{\varphi}$ и есть скорость заметания площади радиус-вектором, и из закона сохранения момента количества движения сразу следует второй закон Кеплера.

Предложение 4.4.8. *Второй закон Кеплера выполнен в любом центральном поле сил.*

Доказательство. Фигура, которую заметает вектор x на отрезке времени $[t_1, t_2]$, ограничена радиус-векторами $x(t_1)$ и $x(t_2)$ и дугой траектории тела $(r(t), \varphi(t))$. Площадь этой фигуры равна

$$S = \frac{1}{2} \int_{\varphi(t_1)}^{\varphi(t_2)} r^2(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} r^2(t) \dot{\varphi} dt = \frac{1}{2} |\vec{c}| \cdot (t_2 - t_1).$$

Значит, за одинаковые отрезки времени вектор x заметает одинаковые площади. Величина $c = |\vec{c}| = r^2\dot{\varphi}$ — величина момента количества движения — равна скорости заметания площади. □

4 Симметрии и законы сохранения

В дальнейшем мы будем рассматривать только случай $c > 0$. Случай нулевого момента количества движения $c = 0$ рассмотрен в упражнении 79 и соответствует движению тела по прямой, а случай $c < 0$ отличается от случая $c > 0$ сменой ориентации системы координат.

4.4.4 Первый закон Кеплера

4.4.4.1 Уравнение эллипса в полярных координатах

Для доказательства первого закона Кеплера удобнее всего перейти к полярным координатам. Нам понадобится уравнение конических сечений в полярных координатах:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}. \quad (4.36)$$

Для полноты изложения мы приведем доказательство того, что уравнение (4.36) при $0 \leq e < 1$ задает эллипс. При $e = 1$ это уравнение задаёт параболу, а при $e > 1$ — гиперболу, но мы не будем это доказывать.

Напомним, что эллипс с фокусами F_1, F_2 — это множество точек, сумма расстояний от которых до F_1 и F_2 постоянна и равна $2a$. Как известно, в декартовых координатах эллипс задаётся уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, где a и b — большая и малая полуось эллипса соответственно. *Эксцентриситет* эллипса — это отношение половины межфокусного расстояния к большой полуоси.

Лемма 4.4.9. *Если $0 \leq e < 1$, то уравнение $r(\varphi) = \frac{p}{1 - e \cos \varphi}$ в полярных координатах задаёт эллипс с эксцентриситетом e , один из фокусов которого находится в начале координат. Его большая и малая полуоси равны $a = \frac{p}{1 - e^2}$ и $b = \sqrt{ap}$ соответственно.*

Доказательство. Рассмотрим эллипс с фокусами $(0, 0)$, $(2f, 0)$ и большой полуосью a . Пусть точка эллипса X имеет полярные координаты (r, φ) , то есть декартовы координаты $(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$. Тогда сумма расстояний от фокусов до точки X равна

$$2a = |F_1 X| + |X F_2| = r + \sqrt{(r \cos \varphi - 2f)^2 + (r \sin \varphi)^2}.$$

Вычтем r из обеих частей и возведем обе части равенства в квадрат. Получим

$$4a^2 - 4ar + r^2 = r^2(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) - 4fr \cos \varphi + 4f^2.$$

Отсюда

$$r = \frac{a^2 - f^2}{a - f \cos \varphi}.$$

Правая часть равенства после сокращения на a имеет вид $r(\varphi) = \frac{p}{1 - e \cos \varphi}$, где $e = f/a$, $p = \frac{a^2 - f^2}{a}$. Значит, исходное уравнение задает эллипс, причем параметр e равен его эксцентриситету f/a — отношению половины межфокусного расстояния к большой полуоси.

Выразим полуоси эллипса через e, p . Так как $f = ae$, имеем $p = a - ae^2$, то есть $a = \frac{p}{1-e^2}$.

Чтобы вычислить длину малой полуоси b , заметим, что верхняя точка эллипса лежит над его центром $(f, 0)$, то есть имеет координаты $X = (f, b)$. Для неё тоже выполнено $|F_1X| + |XF_2| = 2a$, откуда $2\sqrt{b^2 + f^2} = 2a$. Значит,

$$b^2 = a^2 - f^2 = a^2(1 - e^2) = ap. \quad (4.37)$$

□

4.4.4.2 Три доказательства первого закона Кеплера

Мы приведем три доказательства первого закона Кеплера. Первые два доказательства — аналитическое и геометрическое — принадлежат Ричарду Фейнману, см. раздел 4.4.4.3. Аналитическое доказательство, совсем короткое, использует запись эллипса в полярных координатах. Геометрическое доказательство аппелирует непосредственно к определению эллипса. Но эти доказательства работают только для уравнения (4.34).

Третье доказательство (см. раздел (4.4.4.4)) — классическое. Оно не только обосновывает первый закон Кеплера, но и решает задачу о движении материальной точки в любом центральном поле сил, в котором сила зависит только от расстояния до центра. Разные изложения этого доказательства опубликованы в классических учебниках^{15 16}.

Геометрическое доказательство Фейнмана восстановили Дэвид Гудштейн и Джуди Гудштейн по черновикам и записям лекций^{17, 18}. Фейнман рассказывал это доказательство первокурсникам в Калифорнийском технологическом институте (Caltech) в 1964 году — без формул, на рисунках; мы отчасти перевели его на язык формул.

4.4.4.3 Доказательство Фейнмана

Мы найдем уравнение траектории планеты в полярной системе координат, то есть зависимость $r(\varphi)$.

Для начала найдем зависимость $\dot{x}(\varphi)$. Положим $v = \dot{x}$. В силу уравнения (4.34),

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{ke_r}{r^2}.$$

С другой стороны, по закону сохранения момента импульса,

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{c}{r^2}.$$

¹⁵ Арнольд В.И. Математические методы классической механики.

¹⁶ M. W. Hirsch, S. Smale and R. L. Devaney, *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*

¹⁷ “Feynman’s Lost Lecture, The Motion of Planets Around the Sun”, David L. Goodstein and Judith R. Goodstein, W. W. Norton and Company, New York, 1996.

¹⁸ “Feynman Says: “Newton implies Kepler, No Calculus Needed!””, Brian Beckman, *Journal of Symbolic geometry*, 2006, Vol. 1, pp. 57 – 72.

4 Симметрии и законы сохранения

Если разделить первое уравнение на второе (эту операцию мы обсуждали в разделе 3.3.2), получим

$$\frac{dv}{d\varphi} = -\frac{ke_r}{c} = -\frac{k}{c}(\cos \varphi, \sin \varphi).$$

Так как правая часть уравнения зависит только от φ , достаточно проинтегрировать обе части равенства, чтобы найти зависимость $v(\varphi)$:

$$v(\varphi) = \frac{k}{c}(-\sin \varphi, \cos \varphi) + Q = \frac{k}{c}e_\varphi + Q, \quad (4.38)$$

где Q — некоторый постоянный вектор. Повернув при необходимости систему координат, будем считать, что $Q = (0, q)$, $q > 0$.

Замечание 4.4.10. Будем откладывать векторы скорости планеты от начала координат; их концы опишут кривую $\varphi \mapsto v(\varphi)$. Такая кривая называется годографом. Уравнение (4.38) показывает, что годограф для уравнения (4.34) — окружность с центром $Q = (0, q)$, причем конец вектора $v(\varphi)$ соответствует центральному углу φ на этой окружности.

Дальше доказательство раздваивается на геометрическое и аналитическое.

Аналитическое доказательство

Найдем зависимость $r(\varphi)$. В силу леммы 4.4.7, имеем $v = \dot{r}e_r + r\dot{\varphi}e_\varphi$. Поэтому

$$r\dot{\varphi} = (v, e_\varphi) = \frac{k}{c} + (Q, e_\varphi) = \frac{k}{c} - q \cos \varphi.$$

С другой стороны, $\dot{\varphi} = \frac{c}{r^2}$. Значит,

$$r \frac{c}{r^2} = \frac{k}{c} - q \cos \varphi,$$

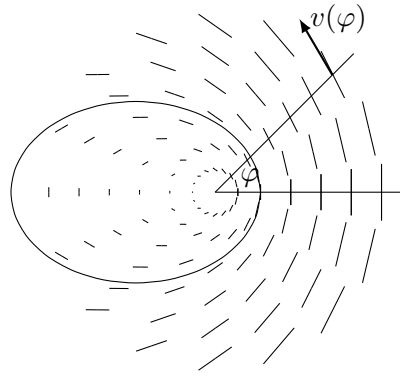
откуда

$$r = \frac{c}{k/c - q \cos \varphi} = \frac{c^2/k}{1 - (qc/k) \cos \varphi},$$

то есть

$$r = \frac{p}{1 - e \cos \varphi}, \quad \text{где } p = \frac{c^2}{k}, \quad e = \frac{qc}{k}. \quad (4.39)$$

При $0 < e < 1$ это уравнение задаёт эллипс (см. лемму 4.4.9), при $e = 1$ — параболу, при $e > 1$ — гиперболу. Значит, тело под воздействием силы притяжения к Солнцу движется по эллипсу, параболе или гиперболе. Траектории движения планет, конечно, эллипсы, так как они должны быть ограниченны. Мы доказали первый закон Кеплера.

Рис. 4.15: Поле направлений Γ , заданное уравнением (4.38).

Геометрическое доказательство

Рассмотрим орбиту планеты $(r(t), \varphi(t))$ с моментом импульса c : $r^2\dot{\varphi} = c$. Мы установили, что вектор скорости этой орбиты, записанный в декартовых координатах, имеет вид (4.38).

Рассмотрим вспомогательное поле направлений Γ на плоскости: в каждой точке луча с полярным углом φ направление будет параллельно вектору $v(\varphi)$. Наша орбита является одной из интегральных кривых этого поля. Поле Γ инвариантно относительно растяжений; тем же свойством обладает и семейство его интегральных кривых. Мы докажем, что среди интегральных кривых поля Γ есть один эллипс с фокусом O . Значит, все интегральные кривые — эллипсы с фокусом O , в том числе и наша орбита планеты.

Запишем уравнение (4.38) в виде

$$v(\varphi) = (0, q) + Re_\varphi, \quad (4.40)$$

где $R = \frac{k}{c}$, $e_\varphi = (-\sin \varphi, \cos \varphi)$.

Когда планета обращается вокруг Солнца, вектор её скорости $v(\varphi)$ делает оборот вокруг нуля; по формуле видно, что для этого должно быть выполнено неравенство $R > q$. Мы увидим, что случай $R > q$ соответствует движению тела по эллипсу, $R = q$ — движению по параболе, $R < q$ — по гиперболе.

Лемма 4.4.11. Пусть $R > q$. Тогда эллипс E с фокусами O и $F = (-q, 0)$ и большой осью R является интегральной кривой поля Γ .

Доказательство. Рассмотрим окружность радиуса R и проведем её радиус OZ с полярным углом φ : $OZ = Re_r = R(\cos \varphi, \sin \varphi)$. Вектор $FZ = (q, 0) + Re_r$ перпендикулярен вектору $v(\varphi)$. Тогда любой перпендикуляр к отрезку FZ параллелен вектору $v(\varphi)$.

Проведем серединный перпендикуляр l_z к отрезку FZ ; пусть X — его пересечение с радиусом OZ .

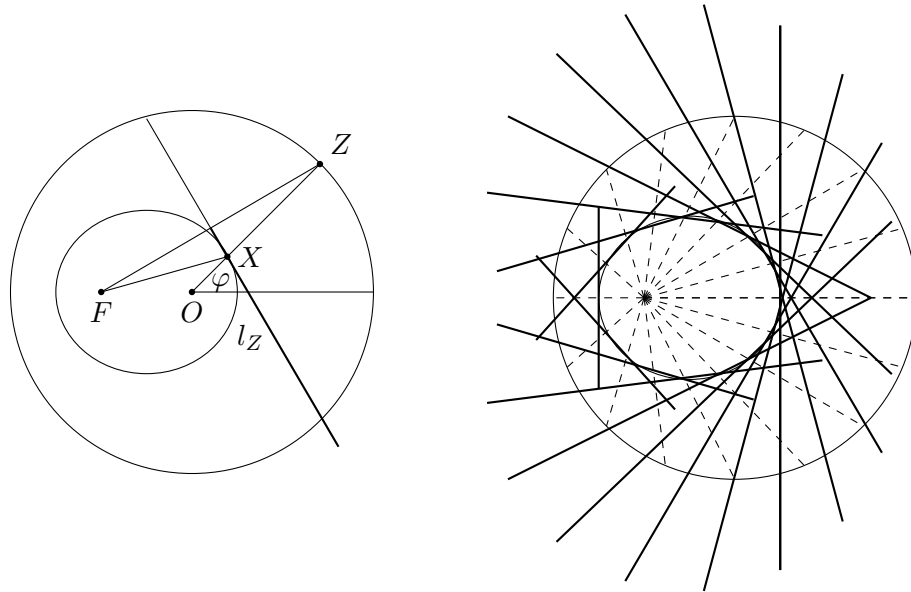


Рис. 4.16: Построение для геометрического доказательства первого закона Кеплера (слева); эллипс как огибающая семейства прямых l_Z (справа).

Точка X принадлежит эллипсу E : по свойству серединного перпендикуляра, $|FX| = |XZ|$, поэтому

$$|OX| + |FX| = |OX| + |XZ| = R.$$

По определению эллипса, это и означает, что точка X лежит на эллипсе E .

Прямая l_Z касается эллипса E в точке X : действительно, для любой точки Y на l_Z , $Y \neq X$, имеем

$$|OY| + |FY| = |OY| + |YZ| > |OZ| = R,$$

а потому точка Y лежит вне эллипса E .

Итак, касательная к эллипсу E в точке X совпадает с l_Z , поэтому она параллельна вектору $v(\varphi)$. Это верно для любого полярного угла φ , то есть для любой точки эллипса. Значит, эллипс E является интегральной кривой поля направлений Γ . \square

Тем самым, доказан первый закон Кеплера.

Замечание 4.4.12. Когда точка Z пробегает окружность радиуса R с центром O , прямые l_Z образуют однопараметрическое семейство. Все прямые этого семейства касаются эллипса E , см. рис. 4.16 справа. Говорят, что эллипс является огибающей этого семейства прямых.

Таким же образом можно доказать, что в случае $R < q$ тело движется по гиперболе.

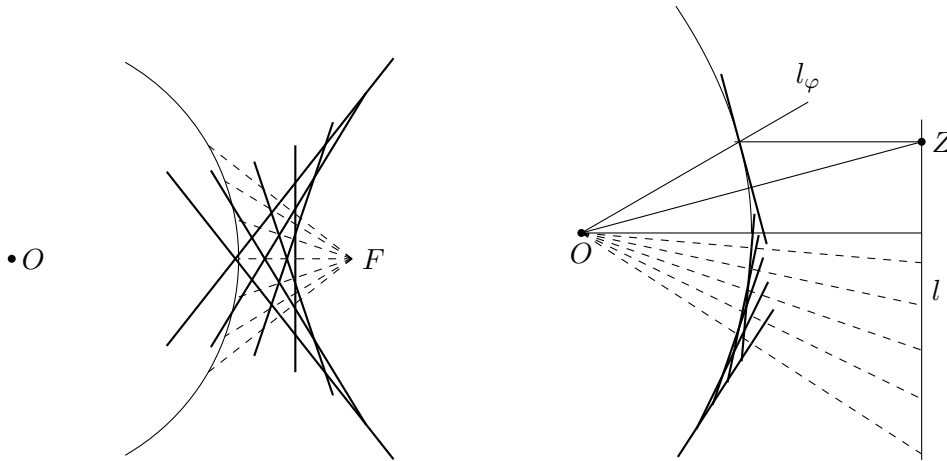


Рис. 4.17: Гипербола как огибающая семейства прямых (слева). Построение для параболы и парабола как огибающая семейства прямых (справа).

Упражнение 80. В случае $R < q$ выведите из уравнения (4.40), что тело движется по гиперболе: проверьте, что гипербола с фокусами $F = (-q, 0)$ и O касается поля направлений (см. рис. 4.17 слева).

Напомним, что гипербола — это множество точек, для которых разность расстояний до фокусов гиперболы постоянна.

Упражнение 81. В случае $R = q$ выведите из уравнения (4.40), что тело движется по параболе.

Напомним, что парабола — это множество точек, равноудаленных от данной точки (фокуса параболы) и данной прямой (директрисы).

Указание (см. рис. 4.17 справа). Проведем любую вертикальную прямую l справа от O — она будет служить директрисой. Проведем прямую l_φ через точку O под углом φ к горизонтали. Проведем отрезок OZ под углом $\varphi/2$ к горизонтали, где точка Z лежит на прямой l . Покажите, что точка пересечения серединного перпендикуляра к OZ и прямой l_φ лежит на параболе с фокусом O и директрисой l , а касательная к параболе совпадает с этим серединным перпендикуляром. Докажите, что эта парабола касается поля направлений Γ .

4.4.4.4 Доказательство с использованием эффективной потенциальной энергии

Идея этого доказательства следующая. У нас есть четыре переменных: $r, \dot{r}, \varphi, \dot{\varphi}$. Мы используем два закона сохранения: закон сохранения энергии и закон сохранения момента количества движения, чтобы выписать соотношение на r, \dot{r} , исключив $\varphi, \dot{\varphi}$. Полученное соотношение на r, \dot{r} окажется первым интегралом для некоторого уравнения Ньютона на прямой $\ddot{r} = \dots$. Таким образом с помощью двух соотношений мы избавимся от двух переменных. Полученное уравнение Ньютона на прямой

4 Симметрии и законы сохранения

можно решить в явном виде. Но так как нам нужна зависимость $r(\varphi)$, а не $r(t)$, нам придется перейти к уравнению на $r(\varphi)$ (точнее, на $\frac{1}{r(\varphi)}$, см. предложение Клеро) и решить его.

Запишем закон сохранения энергии в полярной системе координат. Так как

$$E_{\text{кин.}} = \frac{1}{2} \langle \dot{\vec{r}}, \dot{\vec{r}} \rangle = \frac{1}{2} \langle \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi, \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \rangle = \frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{r^2\dot{\varphi}^2}{2},$$

закон сохранения энергии имеет вид

$$\frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{r^2\dot{\varphi}^2}{2} + U(r) = E.$$

Пользуясь законом сохранения момента импульса $r^2\dot{\varphi} = c$, получим

$$\frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{c^2}{2r^2} + U(r) = E, \quad (4.41)$$

где $c = |\vec{c}|$.

Это уравнение представляет собой закон сохранения энергии для нового уравнения Ньютона $\ddot{r} = -\frac{d}{dr}W(r)$ на прямой, с потенциальной энергией $W(r) = \frac{c^2}{2r^2} + U(r)$. Она называется эффективной потенциальной энергией. По предложению 4.3.6 из раздела 4.3.3, из уравнения (4.41) следует, что r удовлетворяет уравнению Ньютона на прямой

$$\ddot{r} = -W'(r) \quad (4.42)$$

кроме случая, когда r локально постоянно.

Упражнение 82. Рассмотрите случай, когда r локально постоянно (тело движется по окружности). Проверьте, что тогда $W'(r) = 0$, поэтому равенство (4.42) верно и в этом случае.

Итак, для движения тела в центральном поле сил расстояние r от тела до начала координат подчиняется уравнению Ньютона на прямой.

Для движения планет вокруг Солнца $W(r) = -\frac{k}{r} + \frac{c^2}{2r^2}$. График функции W изображён на рис. 4.18 слева. С помощью этого графика можно построить фазовый портрет уравнения (4.42) на плоскости (r, \dot{r}) , см. рис. 4.18 справа; минимуму функции W соответствует движение планеты по окружности, когда $\dot{r} \equiv 0$.

Мы могли бы решить это уравнение Ньютона напрямую, как сделано в конце раздела 4.3.5. Но для доказательства первого закона Кеплера нам нужно найти уравнения траекторий планет — кривых $(r(t), \varphi(t))$ на плоскости Oxy . Для этого удобно перейти от полярной системы координат к системе координат $(\frac{1}{r}, \varphi)$.

Предложение 4.4.13 (Предложение Клеро¹⁹). Пусть тело движется в центральном поле сил с потенциалом $U(r)$. Пусть $c \neq 0$ — его момент импульса, $W(r) = U(r) + \frac{c^2}{2r^2}$ — эффективная потенциальная энергия. Тогда

$$\frac{d^2\rho}{d\varphi^2} = -\frac{1}{c^2} \frac{d}{d\rho} \left[W \left(\frac{1}{\rho} \right) \right], \quad (4.43)$$

¹⁹Алекси Клод Клеро (1713 – 1765) — математик, механик и астроном. В математике известны его работы по математическому анализу и теории дифференциальных уравнений.

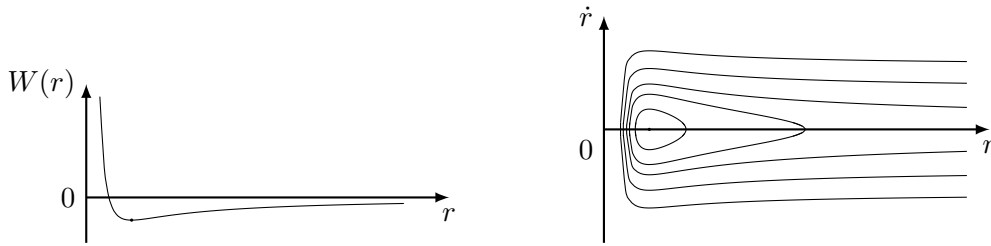


Рис. 4.18: Эффективная потенциальная энергия для движения планет ($k = 1, c = 1$) и фазовый портрет для уравнения (4.42)

где $\rho = \frac{1}{r}$.

Доказательство. Можно было бы сделать замену переменной $\rho = \frac{1}{r}$ в нашем уравнении, а потом перейти от интегральных кривых уравнения $\dot{\rho} = \dots, \dot{\varphi} = \dots$ к фазовым и получить уравнение на $\rho(\varphi)$. Мы поступим проще.

Заметим, что

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \frac{\dot{\rho}}{\dot{\varphi}} = -\frac{\dot{r}}{r^2\dot{\varphi}} = -\frac{\dot{r}}{c} :$$

благодаря закону сохранения импульса, выражения \dot{r} и $\frac{d\rho}{d\varphi}$ оказываются пропорциональны. Поэтому закон сохранения энергии для уравнения (4.42) можно записать так:

$$\frac{\dot{r}^2}{2} + W(r) = E \quad \Rightarrow \quad \frac{c^2}{2} \left(\frac{d\rho}{d\varphi} \right)^2 + W\left(\frac{1}{\rho}\right) = E.$$

Это уравнение имеет вид закона сохранения энергии для уравнения Ньютона на функцию $\rho(\varphi)$. По предложению 4.3.6 из раздела 4.3.3, функция $\rho(\varphi)$ или локально постоянна, или удовлетворяет уравнению Ньютона с потенциалом $\frac{1}{c^2}W$:

$$\frac{d^2\rho}{d\varphi^2} = -\frac{1}{c^2} \frac{d}{d\rho} \left[W\left(\frac{1}{\rho}\right) \right].$$

Во втором случае предложение Клеро доказано. В первом случае планета движется по окружности.

Упражнение 83. Проверьте, что для планеты, движущейся по окружности, предложение Клеро тоже выполнено (правая часть равенства (4.43) равна нулю).

□

Из предложения Клеро в случае потенциала $U = -\frac{k}{r}$ следует, что

$$\frac{d^2\rho}{d\varphi^2} = \frac{k}{c^2} - \rho.$$

Это уравнение отличается от уравнения $\ddot{x} = -x$ для колебаний пружинного маятника только добавлением константы. Решения уравнения $\ddot{x} = -x$ имеют вид

4 Симметрии и законы сохранения

$x(t) = d \cos(t + c)$. Зная это, легко подобрать решения нашего уравнения: они будут иметь вид

$$\rho(\varphi) = \frac{k}{c^2} + D \cos(\varphi + C)$$

для всевозможных значений констант C, D (значение D будет выражаться через полную механическую энергию системы).

Итак,

$$r = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\frac{k}{c^2} + D \cos(\varphi + C)},$$

то есть

$$r = \frac{p}{1 - e \cos \varphi}, \text{ где } p = \frac{c^2}{k}, e = \frac{Dc}{k}. \quad (4.44)$$

Это стандартное уравнение конического сечения в полярных координатах. По лемме 4.4.9, при $|e| < 1$ уравнение (4.44) задаёт эллипс, фокус которого находится в начале координат. При $|e| = 1$ это уравнение задаёт параболу, а при $|e| > 1$ — гиперболу. Итак, тело движется вокруг Солнца по эллипсу, параболе или гиперболу. Траектории планет, конечно, эллипсы, так как для планет расстояние r ограничено.

4.4.5 Третий закон Кеплера

Мы доказали, что планеты движутся вокруг Солнца по эллипсам. Так как мы знаем скорость заметания площади радиус-вектором (она равна c) и общую площадь эллипса (она равна πab , где a и b — полуоси эллипса), то легко вычислить и период обращения планеты.

Предложение 4.4.14. *Для движения планет вокруг Солнца выполняется третий закон Кеплера.*

Доказательство. Площадь эллипса равна πab . Так как скорость заметания площади равна c , получаем, что период обращения планеты равен $T = \frac{\pi ab}{c}$. Значит, отношение квадрата периода к кубу большой полуоси равно

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{\pi^2 b^2}{ac^2}.$$

По равенству (4.37) из леммы 4.4.9, $b^2 = ap$. В силу (4.44) (или соответствующего равенства (4.4.4.3) из доказательства Фейнмана), $p = \frac{c^2}{k}$. Значит,

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{\pi^2 b^2}{ac^2} = \frac{\pi^2 p}{c^2} = \frac{\pi^2}{k}.$$

Эта величина одинакова для всех планет Солнечной системы, поскольку $k = GM_{\text{Солнца}}$ (см. (4.33), (4.34)).

□

4.4.6 Задача трёх тел и пример Ситникова

Законы Кеплера полностью описывают движение двух массивных тел под действием взаимного притяжения. Возникает вопрос: можно ли получить такое же описание для движения трёх массивных тел?

Этот вопрос получил название **задачи трёх тел**. Ответ на него неизвестен. Но качественное описание поведения системы частично получено.

Долгое время считалось, что каждое из попарных расстояний между телами либо ограничено, либо стремится к бесконечности. Контрпример к этой гипотезе построил К. А. Ситников в 1959 году²⁰. Оказывается, что в задаче трёх тел возможны еще и *осцилляторные* движения, когда расстояния между телами колеблются, принимая как сколь угодно малые, так и сколь угодно большие значения. Позже В. М. Алексеев²¹ выдвинул гипотезу, что множество осцилляторных движений имеет меру ноль в пространстве всех движений. Если гипотеза верна, то, неформально говоря, осцилляторные движения возможны только в математической модели движения планет, но на самом деле не встречаются.

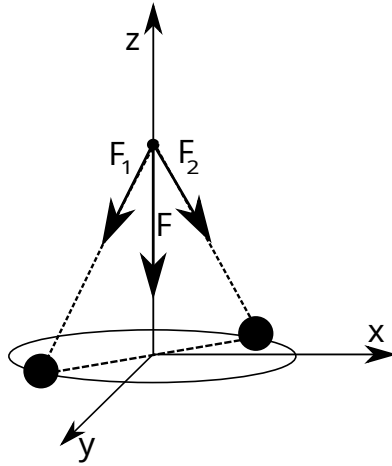


Рис. 4.19: Пример Ситникова

Ситников обнаружил осцилляторные движения, построив специальное возмущение примера, который описан ниже.

Пример 4.4.15 (Пример Ситникова). Две материальные точки, имеющие одинаковую массу 1, движутся по окружности $y^2 + z^2 = 1$ в плоскости Oyz и все время находятся в диаметрально противоположных точках этой окружности. Третья материальная точка имеет пренебрежимо малую массу t (то есть не влияет на движение первых двух). Она движется вдоль оси Ox .

²⁰К.А.Ситников, «Существование осциллирующих движений в задаче n тел», Доклады Академии наук, 1960, том 133, стр. 303-306.

²¹Владимир Михайлович Алексеев (1932 - 1980) — математик, специализировался в теории динамических систем.

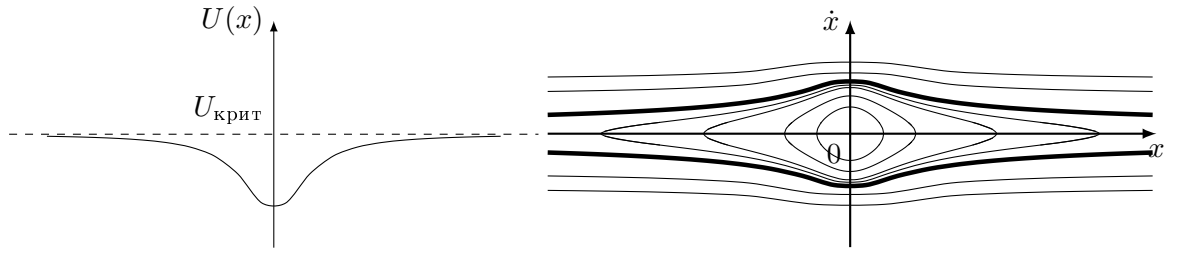


Рис. 4.20: Потенциальная энергия и фазовые кривые для примера Ситникова

Движение первых двух тел нам известно. Пусть третье тело находится в точке $(x, 0, 0)$. Тогда силы f_1 и f_2 , действующие на третье тело со стороны первых двух тел, равны по величине

$$|f_1| = |f_2| = \frac{m}{x^2 + 1}.$$

(мы считаем, что гравитационная постоянная равна 1). Значит, величина равнодействующей силы равна

$$|f| = \frac{2mx}{(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}.$$

Поэтому движение третьего тела описывается уравнением Ньютона на прямой:

$$\ddot{x} + \frac{2x}{(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

По закону сохранения энергии,

$$\frac{\dot{x}^2}{2} - \frac{2}{\sqrt{x^2 + 1}} = const$$

На рисунке изображен график потенциальной энергии и фазовые кривые этого уравнения на плоскости (x, \dot{x}) . Видно, что если в начальный момент времени энергия равна некоторому критическому значению, то при $t \rightarrow +\infty$ и $t \rightarrow -\infty$ тело уходит на бесконечность (соответствующая фазовая кривая выделена жирным). Ситников рассмотрел возмущение примера 4.4.15, когда два больших тела движутся не по круговым орбитам, а по эллиптическим с малым эксцентриситетом. Он доказал, что для значений энергии, близких к критическому, третье тело будет колебаться, уходя все дальше от начала координат — то вверх, то вниз. Это и есть осцилляторное движение тела.

Замечание 4.4.16. Позже Алексеев доказал и более сильное утверждение: что на некотором подмножестве множества начальных условий движение в этом примере описывает подкова Смейла²². Из теоремы Алексеева следует, что движение третьего тела может быть любым: например, существует счетное число периодических движений тела с разными периодами. Также существует движение,

²²Что такое подкова Смейла, мы обсудим в разделе 9.2.

4.4.6. Задача трёх тел и пример Ситникова

при котором тело приходит с бесконечности, делает любое наперед заданное количество колебаний, а потом снова уходит на бесконечность. Подробнее о примере Ситникова см. в книге В.М.Алексеева «Лекции по небесной механике» (Ижевск, 1999). В приложении к этой книге содержится и статья Ситникова.

4.5 Симметрии и первые интегралы дифференциальных уравнений классической механики

В классической механике часто возникают дифференциальные уравнения специального вида. Для таких уравнений можно «более эффективно» использовать симметрии и первые интегралы, чем в разделах 4.1 и 4.3.

4.5.1 Теорема Нётер для уравнений Ньютона

Ранее (см. раздел 4.3.3) мы уже рассматривали уравнения Ньютона на прямой. Напомним, что уравнением Ньютона с потенциальной энергией $U: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ называется уравнение

$$\ddot{x} = -\text{grad } U \quad (4.45)$$

в пространстве \mathbb{R}^n . Напомним, что полная механическая энергия $E = \frac{1}{2}\langle \dot{x}, \dot{x} \rangle + U(x)$ является первым интегралом уравнения Ньютона, см. раздел 4.3.4.

Пусть существует однопараметрическая группа $\{h_s | s \in \mathbb{R}\}$ движений пространства \mathbb{R}^n , которая сохраняет $U(x)$: $U(h_s x) = U(x)$.

Пример 4.5.1. Потенциальная энергия в задаче Кеплера $U(r, \varphi) = -\frac{k}{r}$ инвариантна относительно группы вращений относительно начала координат.

Тогда если $x(t)$ — решение уравнения Ньютона, то $h_{s_0} x(t)$ при любом s_0 — тоже решение. Таким образом, у пространства решений есть *симметрия*. В разделе 4.1 мы видели, что симметрия позволяет уменьшить количество уравнений на 1. Оказывается, в достаточно общем случае (см. следующий раздел) верна теорема Нётер²³, которая по симметрии уравнения позволяет сразу выписать первый интеграл. Для уравнений Ньютона в потенциальном поле она формулируется так:

Теорема 4.5.2 (Частный случай теоремы Нётер). Пусть однопараметрическая группа движений пространства \mathbb{R}^n , $\{h_s | s \in \mathbb{R}\}$, сохраняет потенциал $U(x)$ уравнения Ньютона, и векторное поле $w(x) = \frac{d}{ds}|_{s=0} h_s(x)$ — генератор группы симметрий h_s . Пусть $w \in C^2(\mathbb{R}^n)$. Тогда $\langle \dot{x}, w(x) \rangle$ — первый интеграл уравнения Ньютона.

Доказательство. Условие сохранения потенциала означает, что функция U постоянна вдоль орбит группы симметрий. Но эти орбиты — фазовые кривые поля w . Поэтому $\mathcal{L}_w U(x) = 0$ (по критерию первого интеграла), то есть

$$0 = \frac{d}{ds} U(h_s(x)) \Big|_{s=0} = \left\langle \frac{\partial U}{\partial x}(x), \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} h_s(x) \right\rangle = \left\langle \frac{\partial U}{\partial x}(x), w(x) \right\rangle \quad (4.46)$$

Здесь мы применили формулу дифференцирования сложной функции к композиции $U(h_s(x))$.

Теперь нам понадобятся сведения о поле w . Так как h_s — движение пространства, его можно представить в виде $h_s(x) = O_s x + b_s$, где O_s — ортогональный линейный

²³Амалия Эмми Нётер (1882 – 1935) — математик, известна своим вкладом в абстрактную алгебру, вариационное исчисление и теоретическую физику.

4.5.1. Теорема Нётер для уравнений Ньютона

оператор, и $b_s \in \mathbb{R}^n$. Следующая лемма показывает, как устроен генератор такой группы.

Лемма 4.5.3. Пусть h_s — однопараметрическая группа движений: $h_s(x) = O_s x + b_s$, где O_s — ортогональный линейный оператор. Тогда её генератор $w(x) = \left. \frac{dh_s}{ds} \right|_{s=0} x$ — аффинное векторное поле $w(x) = Ax + b$ с кососимметрическим оператором $A = \left. \frac{dO_s}{ds} \right|_{s=0}$.

Доказательство. Доказательство основано на следующем свойстве ортогональных операторов:

Предложение 4.5.4. Если $s \mapsto O_s$ — гладкое отображение, и все операторы O_s ортогональны, то $\left. \frac{d}{ds} O_s \right|_{s=0}$ — кососимметричный оператор.

Доказательство. В силу ортогональности O_s , $\langle O_s x, O_s y \rangle = \langle x, y \rangle$, и

$$0 = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \langle O_s x, O_s y \rangle = \left\langle \left. \frac{dO_s}{ds} \right|_{s=0} x, y \right\rangle + \langle x, \left. \frac{dO_s}{ds} \right|_{s=0} y \rangle$$

для любых x, y , так что $\left. \frac{dO_s}{ds} \right|_{s=0}$ — кососимметричный оператор. \square

Так как $w(x) = \left. \frac{dh_s}{ds} \right|_{s=0}(x) = \left. \frac{dO_s}{ds} \right|_{s=0}(x) + \left. \frac{db_s}{ds} \right|_{s=0}$, из этого предложения сразу следует лемма. \square

Теперь закончим доказательство теоремы. Вычислим производную выражения $\langle \dot{x}, w(x) \rangle$ по t вдоль траектории $x(t)$:

$$\frac{d}{dt} \langle \dot{x}, w(x) \rangle = \langle \ddot{x}, w(x) \rangle + \langle \dot{x}, \frac{d}{dt}(Ax + b) \rangle = \left\langle -\frac{\partial U}{\partial x}, w(x) \right\rangle + \langle \dot{x}, Ax \rangle = 0.$$

Первое слагаемое равно нулю в силу (4.46), а второе — по лемме 4.5.3. Значит, $\langle \dot{x}, w(x) \rangle$ — первый интеграл. \square

Пример 4.5.5. Если потенциальная энергия не зависит от первой координаты (группа сдвигов вдоль первой координаты $h_s(x) = x + s \cdot (1, 0, \dots, 0)$ сохраняет потенциальную энергию), то первый интеграл имеет вид $\langle \dot{x}, \left. \frac{dh_s}{ds} x \right\rangle = \langle \dot{x}, (1, 0, \dots, 0) \rangle = \dot{x}_1$, то есть первая координата скорости постоянна.

Например, для тела, брошенного под углом к горизонту, $U(x, h) = mgh$ не зависит от x , и горизонтальная составляющая скорости постоянна.

Пример 4.5.6. Если потенциальная энергия инвариантна относительно группы вращений вокруг оси Oz ,

$$h_s = \begin{pmatrix} \cos s & -\sin s & 0 \\ \sin s & \cos s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

то $\left. \frac{dh_s}{ds} \right|_{s=0} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ и первый интеграл имеет вид $\langle v, (-x_2, x_1, 0) \rangle = -v_1 x_2 + v_2 x_1$. Значит, $[v, r]_3 = \text{const}$: третья координата векторного произведения v на вектор $r = (x_1, x_2, x_3)$ постоянна.

Если потенциальная энергия инвариантна относительно всех вращений, то все компоненты вектора $[v, r]$ постоянны. Величина $K = [v, r]$ называется моментом количества движения (или моментом импульса, кинетическим моментом), а теорема Нётер влечет закон сохранения момента импульса.

В частности, в задаче Кеплера потенциал $U = -\frac{k}{r}$ инвариантен относительно всех вращений, а потому момент импульса постоянен. Этот факт мы использовали в главе 4.4 «Законы Кеплера».

4.5.2 (*) Лагранжев формализм. Теорема Нётер

Этот и следующий параграф носят дополнительный характер. Материал этих двух параграфов входит в стандартные курсы вариационного исчисления и механики, см. книгу В.И. Арнольда «Математические методы классической механики», М., Наука, 1989, §20, стр. 81.

Многие уравнения, возникающие в физике, можно записать в лагранжевой форме, то есть в виде принципа наименьшего действия. Один из примеров — принцип Ферма в геометрической оптике: свет между двумя точками движется по наискорейшему пути. В общем случае, лагранжева форма — другая форма записи (тех же) уравнений движения, но она бывает более удобна.

Пусть $L: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкая функция переменных $x \in \mathbb{R}^n, p \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}$. Эта функция называется *лагранжианом*. Для любой кривой $t \mapsto q(t) \in \mathbb{R}^n$, *действием* вдоль неё называется интеграл $\int_{t_0}^{t_1} L(q(t), \dot{q}(t), t) dt$. Моменты времени t_0, t_1 мы будем считать фиксированными.

Лагранжева форма уравнений движения (Принцип наименьшего действия).

Движение происходит по такой гладкой кривой $t \mapsto q(t) \in \mathbb{R}^n$, что функционал $q(t) \mapsto S(q(t)) = \int_{t_0}^{t_1} L(q, \dot{q}, t) dt$ (функционал действия), определенный на множестве гладких кривых с фиксированными концами $q(0), q(1)$, достигает минимума именно на этой кривой:

$$S(q(t)) = \int_{t_0}^{t_1} L(q(t), \dot{q}(t), t) dt \rightarrow \min \quad (4.47)$$

Как мы увидим позже, если в качестве лагранжиана взять $L(q, p, t) = \frac{1}{2} \langle p, p \rangle - U(q)$ (разность кинетической и потенциальной энергии), то это условие будет равносильно уравнению Ньютона.

Получим из условия (4.47) явное уравнение на $q(t)$ — *уравнение Эйлера-Лагранжа*. Следующая теорема — одна из ключевых теорем вариационного исчисления.

Теорема 4.5.7. (Уравнение Эйлера-Лагранжа) *Рассмотрим функционал действия (4.47), соответствующий гладкому лагранжиану $L: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.*

Если на гладкой кривой $q(t)$, $q(0) = q_0, q(1) = q_1$, функционал S принимает меньшее значение, чем на остальных кривых с концами q_0, q_1 , то эта кривая удовлетворяет уравнению Эйлера-Лагранжа

$$\left. \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial p} \right|_{(t, q(t), \dot{q}(t))} = \left. \frac{\partial L}{\partial q} \right|_{(t, q(t), \dot{q}(t))},$$

4.5.2. (*) Лагранжев формализм. Теорема Нётер

где $\frac{d}{dt}$ — полная производная по времени.

Доказательство. Если кривая $q(t)$ даёт минимум функционала S , то при изменении $q(t)$ функционал не уменьшится. Подставим в него гладкую кривую вида $q(t) + \varepsilon\varphi(t)$ с теми же концами; тут φ — любая гладкая функция с $\varphi(t_0) = \varphi(t_1) = 0$. Тогда у отображения $\varepsilon \mapsto S(q(t) + \varepsilon\varphi(t))$ должен быть минимум при $\varepsilon = 0$, а потому его производная по ε должна быть равна нулю при $\varepsilon = 0$:

$$0 = \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} S(q(t) + \varepsilon\varphi(t)) = \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \int_{t_0}^{t_1} L(q + \varepsilon\varphi, \dot{q} + \varepsilon\dot{\varphi}, t) dt = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial q} \varphi + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{\varphi} \right) dt.$$

В этом равенстве производные $\frac{\partial L}{\partial q}, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial p}$ надо понимать как частные производные функции L по первой и второй переменной, в которые затем подставляется $(q(t), \dot{q}(t), t)$. Для краткости мы писали q, \dot{q} и т.д. вместо $q(t), \dot{q}(t)$.

Теперь разобьём интеграл на два слагаемых и возьмем второй интеграл по частям:

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial q} \varphi dt + \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{\varphi} dt = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \varphi \Big|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \varphi dt$$

Внеинтегральный член равен нулю, так как $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$. Интеграл должен быть равен нулю для любой функции φ с условием $\varphi(t_0) = \varphi(t_1) = 0$, поэтому

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q},$$

что и требовалось. □

Упражнение 84. Проверьте, что если в качестве лагранжиана взять функцию $L(q, p, t) = \frac{1}{2} \langle p, p \rangle - U(q)$ (разность кинетической и потенциальной энергии), то уравнение Эйлера-Лагранжа сведется к уравнению Ньютона $\ddot{x} = -\text{grad } U$.

Решение упражнения. Правая часть уравнения Эйлера-Лагранжа равна $\frac{\partial L}{\partial q} \Big|_{(q, \dot{q}, t)} = -\frac{\partial U}{\partial q}(q, \dot{q}, t)$. Производная лагранжиана по второй переменной равна $\frac{\partial L}{\partial p} = \frac{d}{dp} \frac{1}{2} \langle p, p \rangle = p$. Когда мы вычислим значение этой производной в точке $(q(t), \dot{q}(t), t)$, мы получим $\dot{q}(t)$. Итак, уравнение Эйлера-Лагранжа приняло вид $\ddot{q} = -\frac{\partial U}{\partial q}$.

Уравнение Эйлера-Лагранжа — это дифференциальное уравнение второго порядка на функцию $q(t)$ (или система из двух уравнений первого порядка на функции $q, p = \dot{q}$). Если лагранжиан не зависит от времени, у уравнения Эйлера-Лагранжа есть первый интеграл.

Теорема 4.5.8. Если гладкий лагранжиан L не зависит от времени, то уравнение Эйлера-Лагранжа имеет первый интеграл вида $I = (p, \frac{\partial L}{\partial p}) - L$.

Доказательство. Продифференцируем это выражение вдоль решения уравнения Эйлера-Лагранжа $(q(t), \dot{q}(t))$:

$$\frac{d}{dt} I(q, \dot{q}) = \left(\ddot{q}, \frac{\partial L}{\partial p}(q, \dot{q}) \right) + \left(\dot{q}, \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial p}(q, \dot{q}) \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q}(q, \dot{q}), \dot{q} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial p}(q, \dot{q}), \ddot{q} \right).$$

Так как $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q}$, такая производная равна нулю. □

Упражнение 85. Какой первый интеграл получается из этой теоремы для уравнения Ньютона?

Ответ: первый интеграл энергии.

Пример 4.5.9 (Вывод уравнения хода лучей из принципа Ферма). В разделе 3.2.5 мы исследовали ход лучей на плоскости с показателем преломления $\nu(y)$, зависящим только от вертикальной координаты. Мы приводили принцип Ферма: **луч света из точки A в точку B идёт по пути, по которому время прохождения между любыми двумя близкими точками минимально**. В терминах вариационного исчисления, кривая $\gamma(t) = (t, y(t))$, по которой движется свет, доставляет минимум функционала

$$T(\gamma) = \int_{\gamma} \nu(y) d\gamma = \int_0^1 \nu(y(t)) \sqrt{1 + (\dot{y}(t))^2} dt$$

Функционалу T соответствует лагранжиан $L(y, \dot{y}) = \nu(y) \sqrt{1 + \dot{y}^2}$, не зависящий от времени. Мы не будем выписывать уравнение Эйлера-Лагранжа для такого лагранжиана. Вместо этого сразу выпишем его первый интеграл:

$$\dot{y} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - L = \dot{y} \frac{\nu(y) \dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} - \nu(y) \sqrt{1 + \dot{y}^2} = \nu(y) \frac{\dot{y}^2 - 1 - \dot{y}^2}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} = -\frac{\nu(y)}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}}.$$

Итак, луч света движется по кривым, для которых $\frac{\nu(y)}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} = c$. Другими словами,

$$\dot{y} = \pm \sqrt{\frac{\nu^2(y) - c^2}{c^2}} = \pm \frac{1}{|c|} \sqrt{\nu^2(y) - c^2}$$

Смена знака в правой части уравнения соответствует смене знака c , поэтому мы можем также написать

$$\dot{y} = \frac{1}{c} \sqrt{\nu^2(y) - c^2}$$

А это и есть уравнение хода лучей (см. раздел 3.2.5).

Теперь мы сформулируем и докажем теорему Нётер для случая лагранжиана, не зависящего от времени. Она даёт ещё один первый интеграл уравнения Эйлера-Лагранжа в случае, если лагранжиан инвариантен относительно какой-нибудь однопараметрической группы диффеоморфизмов.

Заметим, что если диффеоморфизм h действует на кривую $q(t)$, то к точке $q(t)$ применяется отображение h , а к касательному вектору $\dot{q}(t)$ — его дифференциал dh . Поэтому естественно дать такое определение: образ лагранжиана под действием диффеоморфизма h — это лагранжиан

$$h_* L(q, p) := L(h(q), dh(p)).$$

Теорема 4.5.10 (Теорема Нётер). Пусть гладкий лагранжиан L не зависит от времени. Пусть h_s — однопараметрическая группа диффеоморфизмов, сохраняющих лагранжиан: $(h_s)_*L(q, p) = L(q, p)$, то есть

$$L(q, p) = L(h_s q, (Dh_s)|_q p) \quad (4.48)$$

(где D — дифференциал h_s по пространственным переменным²⁴). Пусть w — генератор группы h_s . Тогда

$$\left\langle \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, w(q) \right\rangle$$

— первый интеграл уравнения Эйлера–Лагранжа.

Замечание 4.5.11. Для уравнения Ньютона из теоремы Нётер следует теорема 4.5.2. Действительно, $L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}\langle \dot{q}, \dot{q} \rangle - U(q)$. Если группа h_s — это группа движений, то она всегда сохраняет кинетическую энергию $\langle \dot{q}, \dot{q} \rangle$, так как $\langle Dh_s \dot{q}, Dh_s \dot{q} \rangle = \langle O_s \dot{q}, O_s \dot{q} \rangle = \langle \dot{q}, \dot{q} \rangle$ в силу изометричности O_s . Поэтому в теореме Нётер достаточно требовать сохранения $U(x)$.

Первый интеграл $\langle \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, w(q) \rangle$ примет такой же вид, как в теореме 4.5.2, если заметить, что $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \dot{q}$.

Доказательство теоремы Нётер. Сначала продифференцируем условие $(h_s)_*L(q, p) = \text{const}$ по s при $s = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} L(h_s q, (Dh_s)|_q p) = \left\langle \frac{\partial L}{\partial q}, \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} h_s(q) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial L}{\partial p}, \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} (Dh_s)|_q p \right\rangle = \\ &= \left\langle \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial p}, w(q) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial L}{\partial p}, Dw(q)p \right\rangle. \end{aligned}$$

В последнем равенстве мы воспользовались уравнением Эйлера – Лагранжа, а также поменяли порядок дифференцирования. Если теперь в это условие подставить $q(t)$, $\dot{q}(t)$ вместо q, p , мы получим

$$0 = \left\langle \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, w(q(t)) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, Dw|_{q(t)} \dot{q}(t) \right\rangle.$$

Но последнее выражение равно производной предполагаемого первого интеграла по t вдоль кривой $q(t)$:

$$\frac{d}{dt} \left\langle \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, w(q(t)) \right\rangle = \left\langle \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, w(q(t)) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, Dw|_{q(t)} \dot{q}(t) \right\rangle$$

Значит, оно равно нулю. Итак, мы показали, что $\langle \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, w(q(t)) \rangle$ постоянно вдоль кривой q , то есть является первым интегралом. □

²⁴Мы пишем D вместо d , чтобы подчеркнуть, что по s дифференцирование не производится.

4.5.3 (*) Гамильтонов формализм. Теорема Лиувилля

Этот параграф предполагает знакомство читателя с теорией дифференциальных форм.

Кроме лагранжева формализма, есть эквивалентная форма записи уравнений движения — гамильтонов формализм. Уравнения Гамильтона мы уже выписывали в разделе 4.3.2.

Рассмотрим систему координат $(p_1, p_2, \dots, p_n, q_1, q_2, \dots, q_n)$ в $2n$ -мерном пространстве. Первые n переменных называются (обобщенными) импульсами, а следующие n — координатными переменными. Они соответствуют функции $q(t)$ из лагранжева формализма. Уравнение движения определяется гладкой функцией Гамильтона $H: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ и имеет вид

$$\begin{cases} \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \\ \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}. \end{cases} \quad (4.49)$$

Для уравнений Ньютона в качестве H надо брать полную механическую энергию $E = \frac{1}{2}\langle \vec{p}, \vec{p} \rangle - U(\vec{r})$. Тогда из второго уравнения видно, что p_i — это производная q_i : $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = p_i$. Поэтому p_i и называют импульсами.

Каков геометрический смысл формулы (4.49)? Рассмотрим 2-форму $\omega = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i$. Другими словами, возьмем кососимметричную билинейную 2-форму в \mathbb{R}^{2n} («кососкалярное произведение»), заданную матрицей $M = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$: $\omega(v, w) = v^T M w$. Оказывается, что в каждой точке вектор $(-\frac{\partial H}{\partial q_i}, \frac{\partial H}{\partial p_i})$ двойственен к линейному функционалу dH относительно формы ω .

Определение 4.5.12. Рассмотрим дифференциальную 2-форму ω на чётномерной поверхности. В каждой точке x она задаёт *двойственность* — отождествление $J: T_x \mathbb{R}^{2n} \rightarrow T_x^* \mathbb{R}^{2n}$ касательного пространства с кокасательным. А именно, вектору v касательного пространства можно поставить в соответствие линейный функционал $J_v: w \mapsto \omega(v, w)$ на касательном пространстве.

2-форма называется *невыврожденной*, если отображение J в каждой точке взаимно однозначно.

Определение 4.5.13. *Косым градиентом*²⁵ функции H относительно формы ω называется вектор $\text{sgrad } H$, двойственный к дифференциалу H : $\text{sgrad } H := J^{-1}dH$.

Для формы $\sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i$ мы получаем, что $\text{sgrad } H = (-\frac{\partial H}{\partial q_i}, \frac{\partial H}{\partial p_i})$.

Упражнение 86. Проверьте это.

Итак, гамильтоново уравнение (4.49) означает, что движение происходит вдоль векторного поля, в каждой точке равного косому градиенту функции H . Такое описание системы (4.49) не использует координат, поэтому оно позволяет определить

²⁵Он называется так из-за аналогии с обычным градиентом $\text{grad } F$, который двойственен дифференциалу dF относительно скалярного произведения.

4.5.3. (*) Гамильтонов формализм. Теорема Лиувилля

понятие гамильтоновой системы на любом многообразии, а не только на \mathbb{R}^{2n} . В общем случае ω — произвольная невырожденная и замкнутая дифференциальная 2-форма: $d\omega = 0$.

Лемма 4.5.14. *Функция H является первым интегралом уравнения (4.49).*

Доказательство. Посчитаем производную функции H вдоль векторного поля $\text{sgrad } H$: $L_{\text{sgrad } H} H = dH(\text{sgrad } H) = \omega(\text{sgrad } H, \text{sgrad } H) = 0$, так как форма ω кососимметрическая. \square

Кососкалярное произведение ω естественным образом задаёт на функциях кососимметричную операцию — *скобку Пуассона*:

$$[F_1, F_2] := \mathcal{L}_{\text{sgrad } F_1} F_2 = \omega(\text{sgrad } F_1, \text{sgrad } F_2)$$

Мы дадим формулировку теоремы Лиувилля — важнейшего результата гамильтоновой механики.

Определение 4.5.15. Говорят, что первые интегралы F_1, F_2 гамильтонова уравнения находятся в инволюции, если $[F_1, F_2] = 0$.

Определение 4.5.16. Говорят, что первые интегралы F_1, F_2 дифференциального уравнения независимы, если их дифференциалы dF_1, dF_2, \dots, dF_n линейно независимы в каждой точке Ω .

Теорема 4.5.17 (Теорема Лиувилля). *Если у гамильтоновой системы в области $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n}$ есть n независимых первых интегралов $F_1 = H, F_2, \dots, F_n$ в инволюции, то она полностью интегрируется.*

Усиление этой теоремы — теорема Лиувилля–Арнольда — включает геометрическое описание таких гамильтоновых систем и способ, позволяющий их проинтегрировать.²⁶

Обычно, чтобы решить систему дифференциальных уравнений в \mathbb{R}^{2n} , нужно $2n-1$ первых интегралов; но для решения гамильтоновой системы достаточно найти всего n первых интегралов в инволюции.

Пример 4.5.18. Для решения уравнений Кеплера в \mathbb{R}^4 нам хватило двух первых интегралов — интеграла энергии $E = \frac{1}{2}\langle v, v \rangle - U(r)$ и интеграла момента импульса $r^2 \dot{\varphi}$. Эти интегралы находятся в инволюции. Действительно, для уравнения Ньютона полная энергия является гамильтонианом, а *любой первый интеграл находится в инволюции с гамильтонианом*:

$$[H, F] = \mathcal{L}_{\text{sgrad } H} F = \mathcal{L}_{v(x)} F = 0$$

в силу критерия первого интеграла (здесь $v(x)$ — гамильтоново векторное поле, соответствующее гамильтониану H).

²⁶ Полную формулировку и доказательство можно найти в книге В.И.Арнольд, «Математические методы классической механики», М., Наука, 1989, §49, стр. 238.

4.6 Задачи к главе 4

Симметрии и замена переменной

- Нарисуйте поле направлений для уравнения $\dot{x} = 2t$. Найдите его образ под действием отображений:
 - $(x, t) \mapsto (t, x)$ (ср. с рассуждениями из раздела 3.2.2);
 - $(x, t) \mapsto (x^2, t)$.

Каким уравнениям соответствуют полученные поля направлений?

- Решите следующие однородные уравнения:

a) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$;

c) $\frac{dy}{dx} = \frac{3x+5y}{5x+3y}$;

b) $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$;

d) $\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{y^2}{x^2}$,

и нарисуйте их интегральные кривые.

- Найдите и нарисуйте фазовые кривые систем

a)

$$\dot{x} = 2x + y, \quad \dot{y} = -x + 2y \quad (4.50)$$

b)

$$\dot{x} = x^2 - y^2, \quad \dot{y} = 2xy. \quad (4.51)$$

В следующих двух задачах мы вводим на плоскости Oxy комплексную координату $z = x + iy$. Уравнение $\dot{z} = v(z)$ на плоскости — это то же самое, что система уравнений $\dot{x} = \operatorname{Re} v(x + iy)$, $\dot{y} = \operatorname{Im} v(x + iy)$.

- Какие из следующих уравнений являются однородными? Найдите фазовые кривые тех, которые являются однородными, и нарисуйте их.

(a) $\dot{z} = z$;

(d) $\dot{z} = z^n, \quad n \in \mathbb{Z}$;

(b) $\dot{z} = \lambda z$;

(e) $\dot{z} = z + z^3$;

(c) $\dot{z} = z^2$;

(f) $\dot{z} = z + z^2 \bar{z}$.

- Какие из следующих уравнений имеют вращательную симметрию? Решите те, которые имеют, и нарисуйте их фазовые портреты.

(a) $\dot{z} = z$;

(c) $\dot{z} = z^2 \bar{z}$;

(b) $\dot{z} = z^2$;

(d) $\dot{z} = (a + i)z - z^2 \bar{z}, \quad a = -1; 0; 1$.

Последнее семейство уравнений демонстрирует знаменитую бифуркацию Андронова²⁷ – Хопфа²⁸.

6. Подберите подходящую замену переменных и решите уравнения:

a) $y' = (x + y)^{10} - 1$;

b) $y' = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 2x}{2y}$;

c) $y' = x \exp(y/x) + y/x$.

7. Пусть поле направлений уравнения $y' = f(x, y)$ инвариантно относительно группы $(x, y) \mapsto (e^{\alpha t}x, e^{\beta t}y)$ для некоторых α, β . Такие уравнения называются *квазиоднородными*.

Какая замена позволяет решить квазиоднородное уравнение? Как понять по уравнению, что оно является квазиоднородным?

Уравнение $y' = P + Qy + Ry^2$, где P, Q, R — функции t , называют *уравнением Риккати*. В следующих задачах предлагается решить несколько уравнений Риккати.

8. Решите уравнение $y' = xy + e^{-x^2/2}y^2$.

Указание: это уравнение Бернулли.

9. Решите уравнение $y' = y^2 + 2yt^2 + t^4 - 2t + 1$.

Указание: выделите полный квадрат в правой части.

10. Решите уравнение $\dot{x} = x^2 + t^{-2}$.

Указание: это квазиоднородное уравнение.

11. Следуя графу Якопо Риккати и Даниилу Бернулли, решите уравнение $\dot{x} = x^2 + t^m$, если $m = -4k/(2k - 1)$.

Дифференциальные формы

12. а) Пусть f и g — выпуклые функции. Докажите, что области $f(x) + g(y) < c$ на плоскости выпуклы.

б) Выведите отсюда, что фазовые кривые уравнения Лотки–Вольтерры ограничивают выпуклые области на плоскости.

²⁷Александр Александрович Андронов (1901 – 1952) — физик, механик и математик, известный своим вкладом в теорию динамических систем, в том числе в исследование автоколебаний и бифуркаций. Создатель теории структурной устойчивости.

²⁸Эберхард Фредерик Фердинанд Хопф (1902 – 1983) — математик и астроном, один из основоположников эргодической теории. Работал также в теории бифуркаций, теории уравнений в частных производных, дифференциальной геометрии.

4 Симметрии и законы сохранения

13. При каких значениях параметров a, b, c, d следующие формы являются точными на \mathbb{R}^2 :

(a) $\omega = y dx + ax dy$;

(c) $\omega = (F(x) + ay) dx + (G(y) + bx) dy$;

(b) $\omega = (ax + by) dx + (cx + dy) dy$;

(d) $\omega = axy dx + (bx^2 + cy^2) dy$?

14. Какие из следующих дифференциальных форм являются точными на \mathbb{R}^2 ? Для каждой точной формы решите соответствующее пфаффово уравнение $\omega = 0$ и нарисуйте его интегральные кривые.

(a) $y dx + x dy$;

(e) $2xy dx + (x^2 - 3y^2) dy$;

(b) $(x + y) dx + (x + 2y) dy$;

(f) $(3x^2 + y^2 - 1) dx + 2xy dy$;

(c) $(x + y) dx + (x - 2y) dy$;

(d) $-2x dx + (2y + 3y^2) dy$;

(g) $(2xy + y^2 - y) dx + (x^2 + 2xy - x) dy$.

Указание: рисуя линии уровня функции $f(x, y)$, полезно разложить эту функцию на множители и начать с нулевой линии уровня $f(x, y) = 0$.

15. Для формы $\omega = (5x^3y + 2y^2) dx + (2x^4 + 3xy) dy$ подберите интегрирующий множитель и решите пфаффово уравнение $\omega = 0$.

Указание: попробуйте подобрать интегрирующий множитель вида $x^a y^b$.

16. Пусть замкнутая гладкая кривая γ ограничивает выпуклую область Ω и обходит её по часовой стрелке. Докажите, что интеграл от формы $x dy + y dx$ вдоль γ равен площади области Ω .

А чему равен этот интеграл, если кривая незамкнута?

Указание: параметризируйте кривую абсциссой; какой вид примет интеграл?

17. а) Запишите в декартовых координатах дифференциалы функций r (полярный радиус) и φ (полярный угол).

б) Чему равны интегралы $\int_{S^1} dr$ и $\int_{S^1} d\varphi$, где S^1 — единичная окружность?

18. Какие из следующих дифференциальных форм ω на $\mathbb{R}^2 \setminus 0$ являются замкнутыми? Точными? Решите соответствующие пфаффовы уравнения $\omega = 0$.

(a) $\omega = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{y}{x^2 + y^2} \right) dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{x}{x^2 + y^2} \right) dy$;

(b) $\omega = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \right) dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \right) dy$;

(c) $\omega = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^2} \right) dy$;

Указание: в полярных координатах формы записываются гораздо проще.

19. а) Какие выражения вида $x^k y^l$ являются интегрирующими множителями для формы $\alpha y dx + \beta x dy$?
- б) Найдите интегрирующий множитель для уравнения $y dx + 2x dy = x^7 y^5 (2y dx + x dy)$ и решите его.

Указание: пользуясь предыдущим пунктом, найдите выражение, которое будет интегрирующим множителем и для левой, и для правой части.

Первые интегралы

20. Нарисуйте эскизы фазовых портретов уравнений Ньютона, потенциальная энергия для которых задана графиками, показанными на рис. 4.21.
21. Существует ли непостоянный первый интеграл у системы

$$\dot{x} = x^2 - 1, \quad \dot{y} = y^2 - 1, \quad (4.52)$$

непрерывный (а) в первом квадранте?

(б) во втором квадранте?

Указание: нарисуйте фазовый портрет этого уравнения.

22. Найдите и нарисуйте фазовые кривые уравнения Ньютона на плоскости (x, y) , $y = \dot{x}$:
- (а) $\ddot{x} = x^2 - 1$;
- (б) $\ddot{x} = x - x^3$;
- (с) $\ddot{x} = -x + x^3$.

23. а) Нарисуйте фазовые кривые системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x + x^2 \end{aligned}$$

Найдите периоды малых колебаний вблизи положений равновесия и углы наклона сепаратрис.

- б) Будет ли полная энергия предыдущей системы убывать вдоль фазовых кривых возмущенной системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x + x^2 - 0.1y \end{aligned}$$

Нарисуйте фазовый портрет этой системы.

- с) (*) (Уравнение Фишера-Колмогорова-Петровского-Пискунова) В 1937 году Рональд Фишер предложил следующее уравнение:

$$u_t = u_{xx} + u(1 - u).$$

для описания распространения в популяции некоторых аллелей (форм гена). Это уравнение в частных производных: в нем участвуют производные по x и t неизвестной функции $u(t, x)$.

Выясните, при каких c это уравнение допускает решения вида $u(x, t) = f(x - ct)$, где функция f ограничена и $f(-\infty) = 1, f(+\infty) = 0$.

Решение такого вида называют *бегающей волной*: график функции $u(\cdot, t)$ сохраняет форму, но движется со скоростью c . Величина c — скорость движения волны.

24. а) Нарисуйте фазовые кривые системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -x + x^3. \end{aligned} \tag{4.53}$$

Найдите периоды малых колебаний и углы наклона сепаратрис.

- б) Найдите решение этой системы с начальным условием $(0, \frac{1}{\sqrt{2}})$.
 с) Выясните, при каких начальных условиях вида $(0, a)$ решение уравнения периодическое, а при каких — нет. Как ведет себя решение, если оно не периодическое?

Законы Кеплера

25. Некто решил построить копию Солнечной системы, уменьшенную в 10000 раз, которая движется за счет силы тяжести так же, как настоящая. Какие массы планет и Солнца ему придется выбрать? А если он хочет, чтобы его копия двигалась в 100 раз быстрее настоящей?
26. Комета движется вокруг Солнца по сильно вытянутой эллиптической траектории. В какой точке траектории кометы её скорость максимальна? Минимальна?
27. Луна делает полный оборот вокруг Земли за 28 дней. Во сколько раз расстояние от центра Земли до Луны больше, чем высота геостационарной орбиты?
28. Камень начал движение с нулевой начальной скоростью и падает на Солнце с расстояния, равного расстоянию от Солнца до Земли. За какое время он долетит до Солнца? Влиянием планет пренебречь.

Указание: для решения этой задачи не нужно даже знать расстояние от Земли до Солнца. Воспользуйтесь третьим законом Кеплера.

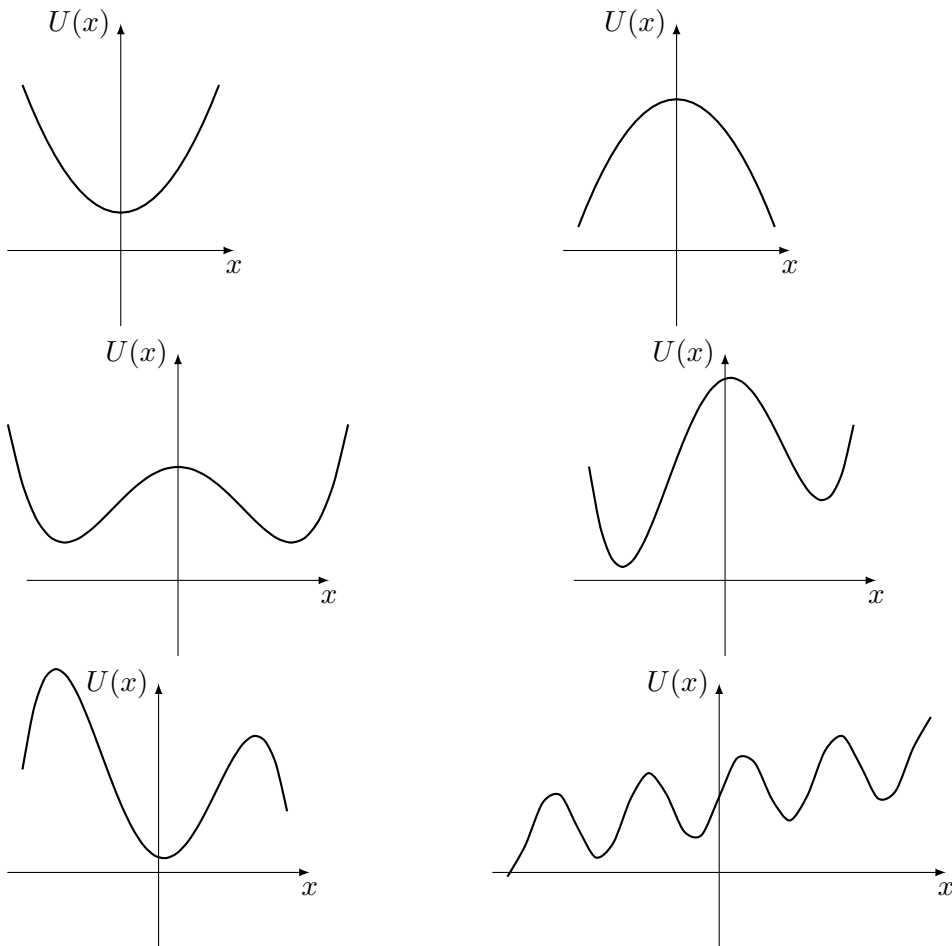


Рис. 4.21: Рисунок к задаче 20.

4 Симметрии и законы сохранения

29. Пусть космический корабль достиг скорости v_0 на расстоянии r_0 от Солнца и выключил двигатели. Какова должна быть величина v_0 , чтобы он покинул Солнечную систему и улетел на бесконечность? Имеет ли значение направление v_0 ?

Докажите, что существует предел скорости корабля $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t)$, и найдите его. Влиянием других небесных тел, кроме Солнца, пренебречь.

Указание: воспользуйтесь законом сохранения энергии.

30. Выясните, по каким траекториям может двигаться тело в центральном поле сил, если сила равна по модулю $|F(r)| = k/r^3$ и направлена к началу координат. Может ли движение тела быть ограниченным (в будущем)? А периодическим?

Указание: воспользуйтесь предложением Клеро.

31. Тот же вопрос, если сила равна по модулю $|F(r)| = k/r^2$ и направлена от начала координат.

32. Тот же вопрос, если сила равна по модулю $|F(r)| = kr$ и направлена к началу координат.

Не стоит использовать предложение Клеро. Запишите уравнение движения в декартовой системе координат, оно окажется очень простым.

4.6.1 Ответы к некоторым задачам

- 6. Следует сделать замены (а) $u = x + y$, (б) $u = x^2 + y^2$ или $u = x^2 + y^2 - 1$, (с) $u = y/x$.
- 7. Условие квазиоднородности уравнения $y' = f(x, y)$: $f(c^\alpha x, c^\beta y) = c^{\beta-\alpha} f(x, y)$. При замене $u = yx^{-\beta/\alpha}$ получается уравнение с разделяющимися переменными $u' = \frac{1}{x}(f(1, u) - \frac{\beta}{\alpha}u)$.
- 8. $y(x) = -\frac{e^{x^2/2}}{x-c}$, а также $y(x) = 0$.
- 9. $y(t) = \operatorname{tg}(t+c) - t^2$
- 10. $x(t) = \frac{1}{t} \frac{\alpha - \beta C t \sqrt{5}}{1 - C t \sqrt{5}}$, где $\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $\beta = -\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

5 Линейные уравнения и системы

5.1 Системы линейных уравнений: общий случай

Линейные дифференциальные системы уравнений — это системы, правая часть которых линейна по фазовой переменной. Линейные системы проще нелинейных и могут использоваться для их качественного исследования (см. уравнение в вариациях, раздел 7.2.2).

Линейные *автономные* системы допускают точное решение, см. раздел 5.3. По сути дела, теория этих систем является главой линейной алгебры.

Линейные уравнения высших порядков сводятся к линейным системам, но поскольку некоторые рассуждения и выкладки получаются проще, мы рассмотрим их отдельно, в разделе 5.2.

5.1.1 Определения

Пусть $\text{End}(\mathbb{R}^n)$ — пространство линейных операторов из \mathbb{R}^n в себя.

Упражнение 87. Докажите, что $\text{End}(\mathbb{R}^n)$ — векторное пространство, и найдите $\dim \text{End}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

Рассмотрим непрерывное отображение $A: I \rightarrow \text{End}(\mathbb{R}^n)$, где $I \subset \mathbb{R}$ — открытый интервал на прямой (конечный или бесконечный). Другими словами, для любого значения $t \in I$ определен линейный оператор $A(t): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, и линейные операторы непрерывно зависят от t . Если в пространстве \mathbb{R}^n фиксировать координаты, можно выписать матрицы операторов $A(t)$: $A(t) = (a_{kl}(t))_{0 \leq k, l \leq n}$, где коэффициенты $a_{kl}(t)$ — непрерывные функции времени.

Определение 5.1.1. Система n линейных однородных уравнений — это система уравнений вида

$$\dot{x} = A(t)x, \quad (5.1)$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$, а отображение $A: \mathbb{R} \rightarrow \text{End}(\mathbb{R}^n)$, $t \mapsto A(t)$, непрерывно. Эту систему также можно записать в виде $\dot{x}_k = \sum a_{kl}(t)x_l$.

Соответствующая задача Коши — это уравнение (5.1) с начальными условиями

$$x(t_0) = x_0. \quad (5.2)$$

Заметим, что правая часть уравнения (5.1) непрерывна по t, x и липшицева по x , поэтому применима локальная теорема о существовании и единственности 2.4.3.

Хотя решение уравнения всегда существует, линейные неавтономные системы, как правило, *не решаются*. Это относится даже к такой простой системе, как

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ t & 0 \end{pmatrix} x.$$

Эта система эквивалентна уравнению Эйри¹:

$$\ddot{u} = tu.$$

¹Сэр Джордж Биддель Эйри (1801 – 1892) — математик и астроном. Основные работы относятся к области астрономии, небесной механики и оптики.

5.1.2. Глобальная теорема существования решения линейной системы

Слова “не решаются” надо понимать не в том смысле, что уравнение Эйри и другие подобные системы мы пока не научились решать. Эти слова означают, что *не существует* формул, которые выражают решения линейных неавтономных систем через их коэффициенты с помощью элементарных функций, алгебраических операций (включая решение алгебраических уравнений), логарифмирования, потенцирования, дифференцирования, интегрирования (без параметра).

Неавтономные линейные системы, которые не удаётся решить, мы можем исследовать только качественно.

Случай, когда оператор A постоянен (система уравнений автономна), проще общего. В разделе 5.3 мы найдем общее решение линейной системы для постоянной матрицы A .

5.1.2 Глобальная теорема существования решения линейной системы

Теорема 5.1.2. *Рассмотрим систему n линейных однородных уравнений*

$$\dot{x} = A(t)x \quad (5.3)$$

Пусть $A: I \rightarrow \text{End}(\mathbb{R}^n)$ — отображение класса C^1 . Тогда все решения этой системы определены на всем интервале I .

Замечание 5.1.3. *На самом деле в теореме 5.1.2 достаточно потребовать непрерывности отображения A . Но так теорема лучше приспособлена к тому, чтобы в ее доказательстве воспользоваться теоремой о непрерывности фазового потока.*

Замечание 5.1.4. *Следует пояснить, что такое “отображение класса C^1 ” в применении к отображениям в пространство $\text{End}(\mathbb{R}^n)$. Мы можем просто сказать, что в фиксированной системе координат все компоненты $a_{ij}(t)$ матриц операторов $A(t)$ — C^1 -гладкие функции времени. Но так как $\text{End}(\mathbb{R}^n)$ — векторное пространство, мы также можем сказать, что C^1 -гладкое отображение $A: I \rightarrow \text{End}(\mathbb{R}^n)$ — это C^1 -гладкая кривая в векторном пространстве $\text{End}(\mathbb{R}^n)$.*

*Доказательство теоремы 5.1.2.*² Возьмем любой отрезок $[a, b] \subset I$. У системы $\dot{x} = A(t)x$ есть одно замечательное решение, определенное на всем отрезке $[a, b]$: $x(t) \equiv 0$. Значит, отображение потока $g^{a,b}$ определено в нуле. По глобальной теореме о непрерывности фазового потока (теорема 2.4.29), отображение потока $g^{a,b}$ определено и непрерывно в малой окрестности каждой точки своей области определения; значит, оно определено в некоторой δ -окрестности нуля.

Итак, любое решение ψ с начальным условием $|\psi(a)| < \delta$ определено на всем отрезке $[a, b]$. Поэтому мы можем построить решение ξ с любым начальным условием $\xi(a) = x_0$, определенное на отрезке $[a, b]$, следующим образом. Возьмем решение ψ с начальным условием $\psi(a) = x_0\alpha$ для достаточно малого α , так что $|x_0\alpha| < \delta$,

²В учебниках можно найти много доказательств этой теоремы. Все они требуют тех или иных выкладок. Приведенное ниже чисто словесное доказательство найдено С.Ю.Яковенко, когда он работал вместе с Ю.С.Ильяшенко над книгой “Лекции по теории аналитических дифференциальных уравнений.”

и положим $\xi(t) = \alpha^{-1}\psi(t)$. Из линейности уравнения легко получить, что такая функция ξ тоже будет решением уравнения.

По теореме единственности, это и есть единственное решение уравнения с начальным условием $\xi(a) = x_0$. Значит, решение с любым начальным условием определено на любом отрезке $[a, b] \subset I$, следовательно, на всем I . \square

5.1.3 Фундаментальная система решений

Рассмотрим множество всех непрерывных вектор-функций $x: I \rightarrow \mathbb{R}^n$. Это множество имеет естественную структуру векторного пространства над \mathbb{R} : вектор-функции можно складывать и умножать на вещественные числа. Роль нуля в этом пространстве играет вектор-функция, тождественно равная нулю.

Упражнение 88. Проверьте, что описанное множество действительно является векторным пространством.

Определение линейной независимости в этом векторном пространстве даётся так же, как и в любом векторном пространстве:

Определение 5.1.5. Отображения $\varphi_1, \dots, \varphi_n: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ называются линейно независимыми, если их линейные комбинации с ненулевыми коэффициентами ненулевые: из равенства

$$\lambda_1\varphi_1(t) + \dots + \lambda_n\varphi_n(t) = 0 \text{ при всех } t \in I$$

следует $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.

Линейность дифференциального уравнения влечет следующее свойство для пространства его решений.

Предложение 5.1.6. Линейная комбинация решений уравнения (5.1) тоже является его решением.

Доказательство. Если ψ_1 и ψ_2 — решения уравнения (5.1), то для их линейной комбинации $\lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2$ выполнено

$$\frac{d}{dt}(\lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2) = \lambda_1\dot{\psi}_1 + \lambda_2\dot{\psi}_2 = \lambda_1A(t)\psi_1 + \lambda_2A(t)\psi_2 = A(t)(\lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2),$$

что и требовалось доказать. \square

Следствие 5.1.7. Отображение потока g^{t_1, t_2} линейного уравнения $\dot{x} = A(t)x$ линейно.

Доказательство. Пусть решения ψ_1 и ψ_2 удовлетворяют начальным условиям $\psi_1(t_1) = x_1$, $\psi_2(t_2) = x_2$. Тогда их линейная комбинация $\psi = \lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2$ является решением уравнения с начальным условием $\psi(t_1) = \lambda_1x_1 + \lambda_2x_2$. Другими словами,

$$\lambda_1g^{t_1, t}(x_1) + \lambda_2g^{t_1, t}(x_2) = g^{t_1, t}(\lambda_1x_1 + \lambda_2x_2).$$

Это и означает, что $g^{t_1, t}$ — линейное отображение для любого t . \square

Предложение 5.1.6 означает, что множество решений уравнения (5.1) — векторное подпространство \mathcal{L} в пространстве непрерывных отображений из I в \mathbb{R}^n . В разделе 3.4.1 мы показали, что решения линейного одномерного уравнения образуют *одномерное* векторное пространство. Оказывается, решения n -мерного линейного уравнения образуют n -мерное векторное пространство.

Теорема 5.1.8 (Теорема об изоморфизме). *В условиях теоремы 5.1.2, пространство решений \mathcal{L} системы $\dot{x} = A(t)x$ имеет размерность n и изоморфно пространству начальных условий \mathbb{R}^n . Для любого решения $\varphi \in \mathcal{L}$ и любого $a \in I$ отображение*

$$\varphi \mapsto \varphi(a) \tag{5.4}$$

определено и является изоморфизмом $\mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Доказательство. Отображение φ определено на всем пространстве \mathcal{L} по теореме 5.1.2. Это отображение линейно по определению.

По теореме 5.1.2, любому начальному условию соответствует глобально определенное решение, поэтому отображение φ сюръективно (отображение НА). Заметим, что правая часть линейного уравнения непрерывна и липшицева по x , так как она линейна по x . Значит, к этому уравнению применима теорема существования и единственности (теорема 2.4.3). Поэтому каждому начальному условию соответствует не более одного решения, и отображение φ инъективно.

Следовательно, отображение φ — изоморфизм. \square

Определение 5.1.9. *Фундаментальной системой решений* называется базис в пространстве решений \mathcal{L} .

Преыдущая теорема показывает, что фундаментальная система решений линейной системы в \mathbb{R}^n состоит из n вектор-функций. Из определения следует, что любое другое решение системы является линейной комбинацией этих n вектор-функций.

Замечание 5.1.10. *Возникает естественный вопрос: зачем одно и то же понятие называть двумя именами примерно одинаковой длины (“фундаментальная система решений” и “базис в пространстве решений”)? Дело в том, что понятие фундаментальной системы решений возникло раньше (XVIII век), чем были развиты концепции линейной алгебры (вторая половина XIX века). Поэтому термин “фундаментальная система” возник, стал привычным и дошел до наших дней.*

Пусть в пространстве \mathbb{R}^n фиксирован базис $\{e^j\}$.

Определение 5.1.11. Пусть $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ — фундаментальная система решений уравнения $\dot{x} = A(t)x$. Тогда **фундаментальная матрица решений** — это матрица $X(t)$, столбцами которой являются координаты решений $\varphi_j(t)$ в базисе $\{e^j\}$.

Ясно, что фундаментальная матрица решений определена неоднозначно: она зависит от выбора фундаментальной системы решений. Кроме того, она меняется при замене базиса. Ниже мы докажем простейшие свойства фундаментальной матрицы решений.

Предложение 5.1.12. *Фундаментальная матрица решений невырождена при любом фиксированном t .*

Доказательство. Если при $t = a$ фундаментальная матрица решений вырождена, то её столбцы линейно зависимы. Значит, значения фундаментальной системы решений $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ при $t = a$ линейно зависимы. По теореме об изоморфизме, сами функции $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ тоже линейно зависимы и не могут образовывать базис в пространстве решений. \square

Предложение 5.1.13. *Фундаментальная матрица решений удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению $\dot{X} = A(t)X$.*

Доказательство. Пусть j -й столбец матрицы X — это координаты решения φ_j . Тогда j -й столбец матрицы \dot{X} — это координаты вектора $\dot{\varphi}_j$, а j -й столбец матрицы $A(t)X$ равен $A(t)\varphi_j$.

Так как $\dot{\varphi}_j = A(t)\varphi_j$, получаем, что j -й столбец матрицы \dot{X} равен j -му столбцу матрицы $A(t)X$, что и требовалось доказать. \square

Предложение 5.1.14. *Если X — фундаментальная матрица решений, то общее решение системы $\dot{x} = A(t)x$ имеет вид Xc , где $c \in \mathbb{R}^n$ — постоянный вектор.*

Доказательство. Пусть $c = (c_1, \dots, c_n)$, тогда Xc — это линейная комбинация столбцов матрицы X с коэффициентами c_j . Так как столбцы матрицы X образуют базис в пространстве решений, всевозможные их линейные комбинации — это все решения уравнения $\dot{x} = A(t)x$. \square

Предложение 5.1.15. *Любые две фундаментальные матрицы решений одной системы, X и Y , связаны соотношением*

$$X = YC,$$

где C — постоянная матрица.

Доказательство. Столбцы матрицы X — решения системы $\dot{x} = Ax$, поэтому по предыдущему предложению они равны Yc_1, Yc_2, \dots, Yc_n для некоторых постоянных векторов c_j . Значит, $X = YC$, где c_j — столбцы матрицы C . \square

Напомним, что матрица перехода от базиса e_j к базису f_j — это матрица C , по столбцам которой записаны координаты векторов f_j в базисе $\{e_j\}$.

Предложение 5.1.16. *При замене базиса фундаментальная матрица X заменяется на $Y = C^{-1}X$, где C — матрица перехода от старого базиса к новому.*

Доказательство. k -й столбец матрицы Y должен быть координатной записью того же решения, что k -й столбец матрицы X , но в новом базисе. Как известно из курса линейной алгебры, чтобы вычислить координаты вектора в новом базисе, надо применить к столбцу его координат в старом базисе матрицу C^{-1} . Это и означает, что $Y = C^{-1}X$. \square

5.1.4. Определитель Вронского и формула Лиувилля – Остроградского

Напомним, что отображение потока g^{t_1, t_2} уравнения $\dot{x} = A(t)x$ линейно, см. следствие 5.1.7.

Предложение 5.1.17. *Если X – фундаментальная матрица решений уравнения $\dot{x} = A(t)x$, то матрица отображения потока g^{t_1, t_2} уравнения $\dot{x} = A(t)x$ имеет вид $X(t_2)X(t_1)^{-1}$.*

Доказательство. Пусть $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ – фундаментальная система решений, которая соответствует фундаментальной матрице X . Матрица $X(t)$ переводит k -й базисный вектор e_k в свой k -й столбец – вектор $\varphi_k(t)$. Значит, матрица $X(t_2)X(t_1)^{-1}$ переводит вектор $\varphi_k(t_1)$ в вектор $\varphi_k(t_2)$:

$$X(t_2)X(t_1)^{-1}\varphi_k(t_1) = X(t_2)e_k = \varphi_k(t_2).$$

Отображение потока g^{t_1, t_2} тоже переводит вектор $\varphi_k(t_1)$ в вектор $\varphi_k(t_2)$. Так как векторы $\varphi_k(t_1)$ для $k = 1, 2, \dots, n$ образуют базис, отображение потока имеет матрицу $X(t_2)X(t_1)^{-1}$. \square

5.1.4 Определитель Вронского и формула Лиувилля – Остроградского

Определение 5.1.18. *Определитель Вронского³ для системы $\dot{x} = A(t)x$ – это определитель фундаментальной матрицы её решений:*

$$W(t) = \det X(t). \quad (5.5)$$

Определитель Вронского зависит от выбора фундаментальной системы решений; по предложению 5.1.15, при другом выборе фундаментальной системы решений определитель Вронского меняется в константу раз. По предложению 5.1.16, при замене координат он тоже меняется в константу раз. Итак, определитель Вронского для системы $\dot{x} = A(t)x$ корректно определен с точностью до домножения на константу.

Определитель Вронского показывает, как меняется ориентированный объем под действием отображения потока g^{t_1, t_2} уравнения $\dot{x} = A(t)x$.

Лемма 5.1.19. *Отображение потока g^{t_1, t_2} уравнения $\dot{x} = A(t)x$ увеличивает ориентированный объем в $\frac{W(t_2)}{W(t_1)}$ раз.*

Доказательство. Это следует из предложения 5.1.17. Определитель матрицы отображения потока равен $\det(X(t_2)X^{-1}(t_1)) = \frac{W(t_2)}{W(t_1)}$, поэтому отображение потока увеличивает объем в $\frac{W(t_2)}{W(t_1)}$ раз. \square

На первый взгляд кажется, что вычислить определитель Вронского еще сложнее, чем решить систему $\dot{x} = A(t)x$: ведь чтобы вычислить определитель фундаментальной матрицы, надо сначала найти эту матрицу. На самом деле определитель Вронского вычисляется совсем просто.

³Юзеф Мария Вроньский (1776 – 1853), философ-мистик и математик. Как математик известен в основном благодаря определителю Вронского.

Теорема 5.1.20. (Лиувилль⁴, Остроградский⁵)

Определитель Вронского для решений системы $\dot{x} = A(t)x$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{W} = \operatorname{tr} A(t)W. \quad (5.6)$$

Такое уравнение мгновенно решается методом разделения переменных:

Следствие 5.1.21. Определитель Вронского для решений системы $\dot{x} = A(t)x$ имеет вид $W(t) = W(0) \exp \int_0^t a(\tau) d\tau$, где $a(t) = \operatorname{tr} A(t)$.

Доказательство теоремы 5.1.20. Теорема следует из того, что определитель произведения матриц равен произведению определителей, и из леммы об определителе «почти единичной» матрицы (см. ниже). Имеем:

$$\begin{aligned} W(t+h) &= \det X(t+h) = \det (X(t) + \dot{X}(t)h + o(h)) = \\ &= \det [(E + A(t)h + o(h))X(t)] = \det (E + A(t)h + o(h)) W(t). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Заметим, что $\det (E + A(t)h + o(h)) = \det (E + A(t)h) + o(h)$; действительно, определитель является многочленом от элементов матрицы, поэтому изменение элементов матрицы на величину порядка $o(h)$ изменит определитель на величину порядка $o(h)$. Нам осталось доказать следующую лемму:

Лемма 5.1.22. Для любой матрицы A выполнено $\det(E + Ah) = 1 + h \operatorname{tr} A + o(h)$.

С помощью этого равенства мы завершаем выкладку (5.7) и получаем, что $W(t+h) = W(t)(1 + \operatorname{tr} A(t)h + o(h))$, откуда $\dot{W}(t) = \operatorname{tr} A(t)W(t)$. \square

Доказательство леммы 5.1.22. Докажем лемму сначала для случая матриц порядка 2. Пусть $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Тогда

$$\det(E + Ah) = 1 + (1 + ah)(1 + dh) - bch^2 = 1 + h \operatorname{tr} A + O(h^2).$$

При $n = 2$ лемма доказана. В общем случае доказательство аналогично. А именно, любое слагаемое в выражении для определителя матрицы $E + Ah$, которое содержит хотя бы один внедиагональный элемент, содержит и еще один внедиагональный элемент, и поэтому имеет порядок $O(h^2)$. Следовательно, вклад $O(h)$ в определитель дает только произведение диагональных элементов матрицы $E + Ah$:

$$(1 + a_{11}h) \dots (1 + a_{nn}h) = 1 + \sum a_{ii}h + O(h^2) = 1 + h \operatorname{tr} A + o(h).$$

\square

⁴Жозеф Лиувилль (1821 – 1882) — математик, известный своими работами по комплексному анализу, теории чисел, математической физике и теории интегрирования.

⁵Михаил Васильевич Остроградский (1801 – 1861) — математик, механик и педагог. Наиболее известны его работы по вариационному исчислению, теории интегрирования, математической физике и классической механике.

5.1.5 Линейные неоднородные системы. Метод вариации постоянных

Пусть отображение $A: I \rightarrow \text{End}(\mathbb{R})$ и вектор-функция $b: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ непрерывны на интервале $I \subset \mathbb{R}$. Система

$$\dot{x} = A(t)x + b(t) \quad (5.8)$$

называется *неоднородной системой линейных уравнений*.

Правая часть системы непрерывна и липшицева по x , поэтому для уравнения применима теорема существования и единственности (теорема 2.4.3). Как мы уже отмечали, линейные однородные системы, как правило, не решаются. Но если такая система уже решена, соответствующая неоднородная система решается всегда.

Начнем с замечания, которое справедливо для любых линейных неоднородных уравнений и систем: алгебраических, дифференциальных и других. *Общее решение линейной неоднородной системы — это сумма общего решения однородной системы и частного решения неоднородной.*

Частное решение неоднородной системы — это какое-то одно её решение.

Предложение 5.1.23. *Все решения неоднородной системы (5.8) продолжаются на интервал I .*

Общее решение неоднородной системы (5.8) — это сумма общего решения однородной системы $\dot{x} = A(t)x$ и частного решения неоднородной системы (5.8).

Другими словами, для любого фиксированного решения $x_{\text{част}}$ уравнения (5.8), мы можем получить все решения этого уравнения как суммы $x(t) = \varphi(t) + x_{\text{част}}(t)$, где φ — всевозможные решения однородного уравнения $\dot{x} = A(t)x$.

Доказательство. Пусть $x_{\text{част}}(t)$ — решение уравнения (5.8), и пусть $\varphi(t)$ — решение однородного уравнения. Тогда их сумма $x(t) = x_{\text{част}}(t) + \varphi(t)$ является решением неоднородного уравнения, поскольку

$$\dot{x}(t) = \dot{\varphi}(t) + \dot{x}_{\text{част}}(t) = A(t)\varphi(t) + A(t)x_{\text{част}}(t) + b(t) = A(t)x(t) + b(t).$$

Докажем, что все решения неоднородного уравнения имеют такой вид. Для любого решения неоднородного уравнения $x(t)$ положим $\varphi(t) = x(t) - x_{\text{част}}(t)$. Получим

$$\dot{\varphi}(t) = \dot{x}(t) - \dot{x}_{\text{част}}(t) = A(t)x(t) + b(t) - A(t)x_{\text{част}}(t) - b(t) = A(t)(x(t) - x_{\text{част}}(t)) = A(t)\varphi(t)$$

на пересечении областей определения решений x и $x_{\text{част}}$, поэтому $\varphi(t)$ является решением однородного уравнения $\dot{x} = A(t)x$.

Таким образом, равенство $x(t) = \varphi(t) + x_{\text{част}}(t)$ выполнено на пересечении областей определения решений x и $x_{\text{част}}$. Осталось показать, что все решения уравнения (5.8) продолжаются на I . Действительно, любые два решения x и $x_{\text{част}}$ с пересекающимися областями определения можно продолжить на объединение их областей определения, пользуясь формулой $x(t) = \varphi(t) + x_{\text{част}}(t)$ там, где определено только одно из этих решений. С другой стороны, по теореме существования решений, области определения разных решений уравнения $\dot{x} = A(t)x + b(t)$ покрывают весь интервал I . Поэтому любое решение этого уравнения продолжается на весь интервал I . \square

Это предложение показывает, что решения уравнения $\dot{x} = A(t)x + b(t)$ образуют аффинное пространство, ср. с разделом 3.4.

В силу предыдущего предложения, нам достаточно подобрать одно решение неоднородного уравнения. В некоторых случаях это можно сделать почти без выкладок, см. раздел 5.2.5, 5.3.6. В любом случае предложение 5.1.23 многое говорит о пространстве решений неоднородного уравнения, особенно если решения однородного уравнения известны.

В общем случае для решения неоднородного уравнения применяют следующий *метод вариации постоянной*.

Предположим, что нам известна фундаментальная система решений X для однородной системы $\dot{x} = A(t)x$. Пусть $X(t)$ — фундаментальная матрица решений, тогда по предложению 5.1.13 выполнено

$$\dot{X} = A(t)X \tag{5.9}$$

Решение неоднородной системы (5.8) мы будем искать в виде $Xc(t)$. Подставим $x(t) = X(t)c(t)$ в систему (5.8):

$$\dot{X}c + X\dot{c} = AXc + b.$$

В силу (5.9), первые слагаемые в обеих частях взаимно уничтожаются. Поэтому

$$X\dot{c} = b.$$

Фундаментальная матрица X обратима по предложению 5.1.12. Значит,

$$\dot{c} = X^{-1}b,$$

а из этого уравнения всегда можно найти $c(t)$, просто проинтегрировав правую часть. Так мы найдем $c(t)$ с точностью до прибавления постоянного вектора, а само решение $x(t) = Xc(t)$ — с точностью до прибавления произвольной вектор-функции вида Xc_0 , то есть произвольного решения однородного уравнения. Это полностью согласуется с предложением 5.1.23.

Название метода происходит от того, что в формуле для решения однородного уравнения $x(t) = X(t)c$ мы заменяем постоянный вектор c переменным (то есть *варьируем постоянную*).

5.2 Лине́йные уравнения высших порядков

5.2.1 Сведение к системе уравнений

Линейное уравнение порядка n — это уравнение вида

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \dots + a_0(t)x = 0, \tag{5.10}$$

5.2.1. Сведение к системе уравнений

где функции $a_j: I \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывны на интервале I вещественной прямой. Уравнение (5.10) сводится к системе уравнений первого порядка по общей схеме, описанной в разделе 2.3.2. А именно, положим:

$$y_1 = x, y_2 = \dot{x}, \dots, y_n = x^{(n-1)}.$$

Тогда

$$\dot{y} = A(t)y \tag{5.11}$$

где матрица оператора A имеет вид

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ -a_0(t) & -a_1(t) & -a_2(t) & \dots & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix} \tag{5.12}$$

Начальное условие для системы (5.12)

$$y(t_0) = y^0$$

соответствует следующему начальному условию для уравнения (5.10):

$$x(t_0) = y_1^0, \dot{x}(t_0) = y_2^0, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = y_n^0. \tag{5.13}$$

Поэтому справедлива следующая теорема существования и единственности для линейных неавтономных уравнений, которая сразу следует из теоремы 5.1.2.

Теорема 5.2.1. *Для C^1 -гладких функций $a_j: I \rightarrow \mathbb{R}$ уравнение (5.10) с начальным условием (5.13) имеет единственное решение, определенное на интервале I .*

На самом деле, достаточно потребовать непрерывности функций a_j , ср. с замечанием 5.1.3.

Справедлива также следующая теорема об изоморфизме, которая сразу следует из теоремы 5.1.8.

Теорема 5.2.2. *Пространство решений уравнения (5.10) — n -мерное векторное пространство, изоморфное пространству начальных условий.*

Поэтому для того, чтобы решить уравнение (5.10), достаточно найти n линейно независимых его решений — фундаментальную систему решений. Остальные решения будут линейными комбинациями этих решений.

Следующие два раздела повторяют материал разделов 5.1.4 и 5.1.5 для уравнений высших порядков.

5.2.2 Определитель Вронского и формула Лиувилля-Остроградского

Определение 5.2.3. Определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ x_1' & \dots & x_n' \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(n-1)} & \dots & x_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

называется *определителем Вронского* для системы функций x_j и обозначается $W(x_1, \dots, x_n)$.

В частности, определитель Вронского фундаментальной системы решений уравнения (5.10) — это определитель Вронского соответствующей фундаментальной системы решений для системы уравнений (5.11), (5.12).

По формуле Лиувилля-Остроградского, определитель Вронского фундаментальной системы решений уравнения (5.10) $W(t) := W(x_1(t), \dots, x_n(t))$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{W} = -a_{n-1}(t)W,$$

поскольку след матрицы (5.12) равен $-a_{n-1}(t)$. Это позволяет легко найти $W(t)$.

Выполнен следующий критерий линейной независимости решений уравнения (5.10).

Предложение 5.2.4. *Набор из n решений x_1, \dots, x_n уравнения (5.10) является фундаментальной системой решений тогда и только тогда, когда определитель Вронского $W(x_1, \dots, x_n)$ не обращается в ноль хотя бы в одной точке. В этом случае определитель Вронского нигде не обращается в ноль.*

Доказательство. Для линейно зависимых решений уравнения (5.10) определитель Вронского тождественно равен нулю, поскольку столбцы матрицы (5.14) линейно зависимы.

Если же решения уравнения (5.10) линейно независимы, то есть являются фундаментальной системой решений, то определитель Вронского совпадает с определителем Вронского соответствующего набора решений уравнения $\dot{x} = A(t)x$ и нигде не обращается в 0 по предложению 5.1.12. \square

Какие функции могут служить фундаментальной системой решений для линейного уравнения порядка n ?

Ответ даёт следующее предложение.

Предложение 5.2.5. *Любые n функций $x_j: I \rightarrow \mathbb{R}$ класса C^n , для которых определитель Вронского $W(x_1(t), \dots, x_n(t))$ не равен нулю при всех $t \in I$, являются фундаментальной системой решений некоторого уравнения порядка n на отрезке I с непрерывными коэффициентами.*

Доказательство показывает, как выписывать уравнение порядка n по фундаментальной системе решений.

5.2.3. Линейные неоднородные уравнения. Метод вариации постоянных

Доказательство. Фиксируем $t \in I$ и выпишем $n + 1$ векторов вида

$$v_0 = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, v_1 = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \\ \dots \\ x_n'(t) \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} x_1''(t) \\ x_2''(t) \\ x_3''(t) \\ \dots \\ x_n''(t) \end{pmatrix}, \dots, v_n = \begin{pmatrix} x_1^{(n)}(t) \\ x_2^{(n)}(t) \\ x_3^{(n)}(t) \\ \dots \\ x_n^{(n)}(t) \end{pmatrix} \quad (5.15)$$

в пространстве \mathbb{R}^n . Первые n векторов из этого списка линейно независимы, так как иначе определитель Вронского $W(x_1, \dots, x_n)$ был бы равен нулю. Значит, векторы v_0, \dots, v_{n-1} образуют базис в \mathbb{R}^n . Поэтому вектор v_n можно единственным образом представить в виде линейной комбинации векторов v_0, \dots, v_{n-1} . Пусть $-a_j(t)$ — коэффициенты этой линейной комбинации. Тогда $v_n = -a_{n-1}(t)v_{n-1} - a_{n-2}(t)v_{n-2} - \dots - a_0v_0$, то есть

$$x_j^{(n)} = -a_{n-1}(t)x_j^{(n-1)} - a_{n-2}(t)x_j^{(n-2)} - \dots - a_0(t)x_j$$

для всех $1 \leq j \leq n$ и всех $t \in I$. Итак, функции x_j являются решениями уравнения

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \dots + a_0(t)x = 0.$$

Осталось доказать, что коэффициенты a_j разложения вектора v_n по векторам v_0, \dots, v_{n-1} непрерывно зависят от времени. Действительно, коэффициенты векторов v_j — непрерывные функции по t , так как $x_j \in C^n$. Метод Крамера позволяет выписать явные алгебраические выражения для a_j через коэффициенты векторов v_j . Как легко убедиться, в знаменателях этих выражений оказывается определитель Вронского $W(x_1(t), \dots, x_n(t))$, который не обращается в 0. Значит, a_j являются непрерывными функциями времени. \square

5.2.3 Линейные неоднородные уравнения. Метод вариации постоянных

Линейным неоднородным уравнением порядка n называется уравнение вида

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_n(t)x = b(t). \quad (5.16)$$

Если линейное однородное уравнение (5.10) решено, то соответствующее неоднородное уравнение (5.16) всегда можно решить методом вариации постоянных.

Соответствующая система линейных уравнений имеет вид:

$$\dot{y} = A(t)y + \tilde{b}(t), \quad (5.17)$$

где $A(t)$ — та же матрица, что и в (5.12), а $\tilde{b}(t) = (0, 0, \dots, b(t))^t$.

Пусть x_1, \dots, x_n — фундаментальная система решений однородного уравнения (5.10),
и

$$Y = \begin{pmatrix} x_1, \dots & x_n \\ \vdots & \\ x_1^{(n-1)} & \dots & x_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

— соответствующая фундаментальная матрица решений системы (5.12). В соответствии с методом вариации постоянных для систем (см. раздел 5.1.5), общее решение системы (5.17) имеет вид $y = Yc(t)$, где вектор-функция $c(t) = (c_1(t), \dots, c_n(t))^t$ находится из уравнения

$$\dot{c} = Y^{-1}\tilde{b}. \quad (5.18)$$

Учитывая связь между уравнением (5.16) и системой (5.17) получаем, что решение уравнения (5.16) имеет вид

$$x(t) = x_1(t)c_1(t) + \dots + x_n(t)c_n(t). \quad (5.19)$$

Можно сказать, что мы взяли формулу для общего решения однородного уравнения $x = c_1x_1 + \dots + c_nx_n$ и *провариировали постоянную*, заменив постоянный вектор $c = (c_1, \dots, c_n)^t$ переменным; отсюда происходит название метода.

5.2.4 Решение линейных уравнений высших порядков с постоянными коэффициентами

Мы переходим к случаю, когда линейное уравнение порядка n удаётся полностью решить — случаю постоянных коэффициентов.

Рассмотрим уравнение вида

$$a_nx^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_0x = 0, \quad (5.20)$$

где a_j — константы. Любое решение уравнения — линейная комбинация фундаментальной системы решений.

Мы будем искать фундаментальные решения уравнения (5.20) в виде $x(t) = e^{\lambda t}$. Для начала введем удобные обозначения.

Пусть $p := \frac{d}{dt}$ — отображение пространства функций в себя, которое определено для дифференцируемых функций и каждой функции ставит в соответствие её производную: $pf = f' = \dot{f}$. Отображение, область определения и область значений которого — некоторые пространства функций, часто называют *оператором*. Пусть p^n — это оператор p , применённый n раз: $p^n f = f^{(n)}$. Для любого многочлена $M(z) = m_nz^n + m_{n-1}z^{n-1} + \dots + m_0$ с вещественными коэффициентами положим

$$M(p) := m_np^n + m_{n-1}p^{n-1} + \dots + m_0.$$

Эта формула определяет *дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами* $M(p)$. Запись вида $M(p)x(t)$ означает результат применения дифференциального оператора $M(p)$ к функции $x(t)$.

Заметим, что уравнение (5.20) можно записать в виде $L(p)x(t) = 0$, где $L(z) := z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0$.

Определение 5.2.6. Многочлен $L(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0$ называется *характеристическим многочленом* уравнения (5.20).

Упражнение 89. Докажите, что этот многочлен совпадает с характеристическим многочленом матрицы (5.12) с точностью до знака.

5.2.4. Решение линейных уравнений высших порядков с постоянными коэффициентами

Выясним, как оператор $M(p)$ действует на экспоненту $e^{\lambda t}$.

Лемма 5.2.7. *Для любого многочлена M выполнено равенство*

$$M(p)e^{\lambda t} = M(\lambda)e^{\lambda t}. \quad (5.21)$$

Доказательство. Сначала проверим это равенство для всех одночленов $M(p) = p^k$:

$$p^k e^{\lambda t} = (e^{\lambda t})^{(k)} = \lambda^k e^{\lambda t} = M(\lambda)e^{\lambda t}.$$

Так как обе части равенства (5.21) линейны по M , утверждение выполнено и для любой линейной комбинации одночленов, то есть для любого многочлена. \square

В частности, если λ — корень характеристического многочлена $L(z)$, то $L(p)e^{\lambda t} = 0$. Но условие $L(p)x(t) = 0$ — это и есть уравнение (5.20)! Значит, функция $x(t) = e^{\lambda t}$ является решением уравнения (5.20).

Это соображение позволяет найти фундаментальную систему решений в случае, когда характеристический многочлен $L(z)$ имеет n различных вещественных корней $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Предложение 5.2.8. *Пусть характеристический многочлен $L(z)$ имеет n различных вещественных корней $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Тогда система решений $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t}$ будет фундаментальной для уравнения (5.20).*

Доказательство. Из предыдущей леммы следует, что функции $e^{\lambda_j t}$ будут решениями уравнения (5.20). Осталось проверить, что они линейно независимы.

Лемма 5.2.9. *Если числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ различны, то функции $e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}$ линейно независимы над \mathbb{R} .*

Доказательство с помощью метода “деления с дифференцированием”. Утверждение докажем индукцией по n . База $n = 1$ очевидна. Пусть утверждение верно для любого набора из $n - 1$ различных чисел $\lambda_1 \dots \lambda_{n-1}$. Пусть

$$\alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + \alpha_n e^{\lambda_n t} \equiv 0. \quad (5.22)$$

Продифференцируем это равенство:

$$\alpha_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + \alpha_n \lambda_n e^{\lambda_n t} \equiv 0$$

Домножим первое тождество на λ_n и вычтем его из второго:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k (\lambda_k - \lambda_n) e^{\lambda_k t} \equiv 0$$

В силу предположения индукции, $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$. Тогда из равенства (5.22) следует, что $\alpha_n = 0$. Итак, из равенства (5.22) следует, что все числа α_j нулевые. Значит, функции $e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}$ линейно независимы над \mathbb{R} . \square

Доказательство с помощью определителя Ван дер Монда. Докажем, что функции $g_1(t) = e^{\lambda_1 t}, \dots, g_n(t) = e^{\lambda_n t}$ линейно независимы. Если бы эти функции были линейно зависимы, то их значения в точках $1, 2, \dots, n$ были бы линейно зависимыми векторами. Значит, достаточно доказать, что матрица

$$\begin{pmatrix} g_1(1) & g_1(2) & \dots & g_1(n) \\ g_2(1) & g_2(2) & \dots & g_2(n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_n(1) & g_n(2) & \dots & g_n(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & e^{2\lambda_1} & \dots & e^{n\lambda_1} \\ e^{\lambda_2} & e^{2\lambda_2} & \dots & e^{n\lambda_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e^{\lambda_n} & e^{2\lambda_n} & \dots & e^{n\lambda_n} \end{pmatrix}$$

имеет максимальный ранг. Но определитель этой матрицы совпадает с определителем Ван дер Монда для $x_j = e^{\lambda_j}$ и, как известно, равен

$$\left| \begin{pmatrix} x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \right| = \prod_{i < j} (x_j - x_i) \neq 0,$$

что и требовалось. □

Тем самым, доказано и предложение 5.2.8. □

На самом деле, функции $e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}$ линейно независимы над \mathbb{R} и в том случае, когда какие-то из чисел λ_j комплексные. Чтобы работать с комплексно-значными функциями, нам понадобятся следующие определения.

Определение 5.2.10. Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ — комплексно-значная функция. Производной функции f называется функция

$$f'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

(если такой предел существует).

Упражнение 90. Пространство \mathbb{C} — это двумерное векторное пространство над \mathbb{R} . Проверьте, что это определение совпадает со стандартным определением производной вектор-функции.

Упражнение 91. Докажите, что $f'(t) = \frac{d}{dt} \operatorname{Re} f + i \frac{d}{dt} \operatorname{Im} f$.

Определение 5.2.11. Комплексная экспонента — это сумма комплексного степенного ряда $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.

Для комплексных экспонент верна знаменитая формула Эйлера:

$$e^{(x+iy)} = e^x (\cos y + i \sin y).$$

Её геометрическое доказательство приведено в разделе 3.1.2.

5.2.4. Решение линейных уравнений высших порядков с постоянными коэффициентами

Упражнение 92. Докажите формулу Эйлера, пользуясь определением комплексной экспоненты и разложением функций e^x , $\cos x$, $\sin x$ в ряды Тейлора.

Упражнение 93. Проверьте, что $\frac{d}{dt}e^{\lambda t} = \lambda e^{\lambda t}$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Эти определения позволяют разобраться со случаем, когда характеристический многочлен $L(z)$ имеет n различных комплексных корней.

Предложение 5.2.12. Пусть характеристический многочлен $L(z)$ имеет n различных комплексных корней $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Тогда комплексно-значные функции $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t}$ являются независимыми над \mathbb{C} решениями уравнения (5.20).

Определение линейной независимости функций над \mathbb{C} полностью аналогично определению 5.1.5.

Доказательство дословно повторяет доказательство предложения 5.2.8: функции $e^{\lambda t}$ удовлетворяют дифференциальному уравнению (5.20), если производные считать в смысле определения 5.2.10, и оказываются линейно независимыми над \mathbb{C} . Но нас интересуют вещественные фундаментальные системы решений, поэтому система решений $e^{\lambda t}$ нам не подходит.

Заметим, что многочлен $L(z)$ имеет вещественные коэффициенты. Значит, если $L(\lambda) = 0$, то $L(\bar{\lambda}) = \overline{L(\lambda)} = 0$. Поэтому все невещественные корни многочлена L разбиваются на пары сопряжённых. То есть его корни имеют следующий вид:

$$\{\lambda_k\}_{k=1}^l \cup \{\mu_k \pm i\nu_k\}_{k=1}^r,$$

где μ_k, ν_k и λ_k вещественны и $2r + l = n$.

Предложение 5.2.13. Пусть характеристический многочлен уравнения (5.20) имеет различные корни: l вещественных, $\lambda_k, 1 \leq k \leq l$, и r пар комплексно сопряжённых: $\mu_s \pm i\nu_s, 1 \leq s \leq r$; $n = l + 2r$. Тогда функции

$$e^{\lambda_k t}, k \leq l \quad e^{\mu_s t} \cos \nu_s t, \quad e^{\mu_s t} \sin \nu_s t, s \leq r \quad (5.23)$$

образуют фундаментальную систему решений уравнения (5.20) над \mathbb{R} .

Доказательство. Предложение 5.2.12 показывает, что функции

$$e^{\lambda_k t}, k \leq l, \quad e^{(\mu_s \pm i\nu_s)t}, s \leq r, \quad (5.24)$$

являются линейно независимыми (над \mathbb{C}) решениями уравнения (5.20). Так как этот набор состоит из n функций, эти функции образуют базис в n -мерном пространстве решений уравнения (5.20), то есть фундаментальную систему решений. По формуле Эйлера,

$$e^{\mu_s t} \cos \nu_s t = \frac{1}{2}(e^{(\mu_s + i\nu_s)t} + e^{(\mu_s - i\nu_s)t}), \quad e^{\mu_s t} \sin \nu_s t = \frac{1}{2i}(e^{(\mu_s + i\nu_s)t} - e^{(\mu_s - i\nu_s)t}). \quad (5.25)$$

Поэтому система из n функций (5.23) отличается от базиса (5.24) невырожденной линейной заменой. Значит, набор вещественных функций (5.23) тоже является базисом в пространстве решений уравнения (5.20), то есть фундаментальной системой решений. \square

Мы полностью рассмотрели случай, когда характеристический многочлен не имеет кратных корней. Но если у него есть кратные корни, система $e^{\lambda_j t}$ уже не является фундаментальной, так как в наборе $e^{\lambda_j t}$ нет n различных функций.

Наводящее соображение. В некотором смысле, корень кратности 2 — это два совпавших корня кратности 1. Когда эти корни еще не совпали, но очень близки, им соответствуют решения $e^{\lambda_1 t}$ и $e^{\lambda_2 t}$. Разность этих решений тоже является решением уравнения (5.20). Правда, эта разность стремится к нулю, когда λ_1 и λ_2 сближаются. Поделим её на $\lambda_1 - \lambda_2$. У выражения $\frac{e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t}}{\lambda_2 - \lambda_1}$ уже есть ненулевой предел: он равен

$$\lim_{\lambda_2 \rightarrow \lambda_1} \frac{e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t}}{\lambda_2 - \lambda_1} = te^{\lambda_1 t}.$$

Поэтому естественно ожидать, что для кратного корня λ решением уравнения будет функция $te^{\lambda t}$.

Пример 5.2.14. Возьмём уравнение $\ddot{x} = 0$. У его характеристического многочлена z^2 есть кратный корень 0. Решением уравнения является, кроме функции $\varphi_1(t) = e^{0 \cdot t} \equiv 1$, функция $\varphi_2(t) = te^{0 \cdot t} = t$.

В общем случае этот факт можно проверить с помощью *формулы сдвига*, который позволяет легко вычислять производные от выражений вида $t^k e^{\lambda t}$.

Лемма 5.2.15 (Формула сдвига). *Для любого многочлена L и для любой достаточно гладкой функции f выполнено равенство*

$$L(p) \left(f(t)e^{\lambda t} \right) = e^{\lambda t} L(p + \lambda) f(t).$$

Левая часть равенства — результат применения дифференциального оператора $L(p)$ к функции $f(t)e^{\lambda t}$; правая часть — произведение экспоненты на результат применения дифференциального оператора $L(p + \lambda)$ к функции $f(t)$.

Доказательство. Заметим, что формула сдвига линейна по L . Поэтому её достаточно доказать для многочленов вида $L(z) = z^k$. Это утверждение мы докажем индукцией по k ; функция f предполагается C^k -гладкой. Для $k = 0$ утверждение тривиально.

База индукции: $k = 1$, $L(z) = z$. Получаем $p(f(t)e^{\lambda t}) = (f(t)e^{\lambda t})' = e^{\lambda t}(f'(t) + \lambda f(t)) = e^{\lambda t}(p + \lambda)f(t)$, что и требовалось.

Шаг индукции. Пусть утверждение для $L(p) = p^k$ уже доказано. Тогда для $L(p) = p^{k+1}$ получаем:

$$p^{k+1}(f e^{\lambda t}) = p^k(e^{\lambda t}(p + \lambda)f(t)) = e^{\lambda t}(p + \lambda)^k(p + \lambda)f(t) = e^{\lambda t}(p + \lambda)^{k+1}f(t).$$

В первом равенстве мы воспользовались утверждением базы индукции, во втором — предположением индукции. \square

Следующее предложение позволяет найти k решений уравнения (5.20), соответствующих корню характеристического многочлена кратности k .

5.2.4. Решение линейных уравнений высших порядков с постоянными коэффициентами

Предложение 5.2.16. Пусть λ — корень характеристического многочлена, имеющий кратность k . Тогда функции

$$e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \dots, t^{k-1}e^{\lambda t}$$

являются решениями уравнения (5.20).

Доказательство. Так как λ — корень кратности k , то $L(z) = M(z)(z - \lambda)^k$ для некоторого многочлена M . Применим формулу сдвига. Для $r \leq k - 1$

$$L(p)(t^r e^{\lambda t}) = e^{\lambda t} L(p + \lambda)t^r = e^{\lambda t} M(p + \lambda)p^k(t^r) = 0,$$

так как $p^k(t^r) = (t^r)^{(k)} = 0$. Это и значит, что функция $t^r e^{\lambda t}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (5.20). \square

Применяя это предложение для всех (простых и кратных) корней характеристического многочлена, мы найдем n независимых комплексных решений уравнения — комплексную фундаментальную систему решений. Следующее предложение позволяет находить вещественную фундаментальную систему решений для уравнения (5.20) с вещественными коэффициентами.

Предложение 5.2.17. Пусть характеристический многочлен уравнения (5.20) имеет комплексные корни $\mu_s \pm i\nu_s$ кратностей K_s , $s \leq r$, и вещественные корни λ_m , $m \leq l$, кратностей K'_m . Тогда функции

$$t^k e^{\mu_s t} \cos(\nu_s t), \quad k < K_s, s \leq r, \quad (5.26)$$

$$t^k e^{\mu_s t} \sin(\nu_s t), \quad k < K_s, s \leq r, \quad (5.27)$$

$$t^k e^{\lambda_m t} \quad k < K'_m, m \leq l \quad (5.28)$$

образуют фундаментальную систему решений для уравнения (5.20).

Доказательство. Заметим, что суммарное количество этих функций равно $2 \sum K_s + \sum K'_m$, то есть сумме кратностей всех корней многочлена L . По основной теореме алгебры, эта величина равна n — степени многочлена L . Итак, в системе n функций.

Все функции вида $t^k e^{\lambda_m t}$ и $t^k e^{(\mu_s \pm i\nu_s)t}$ являются решениями уравнения в силу предыдущего предложения. Равенство (5.25) показывает, что функции (5.26), (5.27) тоже являются решениями уравнения. Осталось доказать, что наша система функций линейно независима.

Так как функции (5.26) и (5.27) являются линейными комбинациями функций $t^k e^{(\mu_s \pm i\nu_s)t}$, достаточно доказать следующую лемму.

Лемма 5.2.18. Для любых попарно различных комплексных чисел λ_j система функций

$$\begin{aligned} & e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, \dots, t^{k_1} e^{\lambda_1 t}; \\ & e^{\lambda_2 t}, te^{\lambda_2 t}, \dots, t^{k_2} e^{\lambda_2 t}; \\ & \dots \\ & e^{\lambda_n t}, te^{\lambda_n t}, \dots, t^{k_n} e^{\lambda_n t} \end{aligned} \quad (5.29)$$

линейно независима над \mathbb{C} .

Лемма доказывается с помощью метода “деления с дифференцированием”.

Доказательство. Доказательство проводится индукцией по n .

База индукции: $n = 1$. Линейная независимость функций $e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, t^2 e^{\lambda_1 t}, \dots$ следует из линейной независимости мономов $1, t, \dots, t^m$.

Шаг индукции. Предположим противное, тогда линейная комбинация следующего вида равна нулю:

$$e^{\lambda_1 t} P_1(t) + \dots + e^{\lambda_n t} P_n(t) \equiv 0,$$

где P_j — некоторые многочлены.

Разделим это выражение на $e^{\lambda_n t}$ и будем дифференцировать, пока последнее слагаемое — многочлен $P_n(t)$ — не превратится в ноль. Выражение примет вид

$$(e^{(\lambda_1 - \lambda_n)t} P_1(t))^{(k)} + (e^{(\lambda_2 - \lambda_n)t} P_2(t))^{(k)} + \dots + 0 \equiv 0,$$

где $k = \deg P_n$. В левой части стоит комбинация $(n - 1)$ выражений вида $e^{\mu_j t} Q_j(t)$. Каждое такое выражение не равно нулю: k -я производная функции может быть равна нулю только тогда, когда функция — многочлен.

Мы получили нетривиальную линейную комбинацию $n - 1$ выражений вида $e^{\mu_j t} Q_j(t)$, равную нулю. Это противоречит предположению индукции. □

Тем самым, доказано и предложение 5.2.17. □

5.2.5 Линейные уравнения высших порядков со специальной правой частью

Рассмотрим неоднородное линейное уравнение порядка n с постоянными коэффициентами:

$$L(p)x = f(t) \tag{5.30}$$

Его можно решить методом вариации постоянной и получить формулу для решения, содержащую интегралы. Но если функция $f(t)$ имеет специальный вид — является линейной комбинацией *квазимногочленов* — решение можно получить гораздо проще и без интегрирования.

Определение 5.2.19. Квазимногочленом называется произведение многочлена p на экспоненту $e^{\mu x}$, $\mu \in \mathbb{C}$. Число μ называется показателем квазимногочлена, а степень p — степенью квазимногочлена.

Пространство квазимногочленов степени не выше m с показателем μ над \mathbb{C} мы обозначим $K_m^\mu(\mathbb{C})$.

Сначала сделаем следующее простое наблюдение.

Предложение 5.2.20. Если функция x_1 является решением уравнения $L(p)x = f_1$, а функция x_2 является решением уравнения $L(p)x = f_2$, то функция $x = x_1 + x_2$ является решением уравнения $L(p)x = f_1 + f_2$.

5.2.5. *Линейные уравнения высших порядков со специальной правой частью*

Доказательство. Действительно, $L(p)x = L(p)x_1 + L(p)x_2 = f_1 + f_2 = f$. \square

Теперь мы будем заниматься только случаем, когда в правой части уравнения стоит квазимногочлен. Если правая часть является суммой квазимногочленов с разными показателями, можно воспользоваться предыдущим предложением.

Чтобы найти все решения неоднородного уравнения $L(p)x = f(t)$, нужно найти одно частное решение этого уравнения и прибавить к нему всевозможные решения соответствующего однородного уравнения $L(p)x = 0$ (см. предложение 5.1.23). Поэтому нам достаточно научиться находить одно частное решение неоднородного уравнения $L(p)x = f(t)$, где f — квазимногочлен.

Определение 5.2.21. Уравнение $L(p)x = f$, где $f(t) \in K_m^\mu(\mathbb{C})$ — квазимногочлен, называется *нерезонансным*, если показатель квазимногочлена μ не является корнем характеристического многочлена L . В противном случае уравнение называется *резонансным*.

Теорема 5.2.22 (о нерезонансном случае). *Пусть уравнение (5.30) нерезонансное и $f(t) \in K_m^\mu(\mathbb{C})$ — квазимногочлен степени m . Тогда у него есть решение, принадлежащее пространству $K_m^\mu(\mathbb{C})$. Такое решение единственно и имеет степень ровно m .*

Итак, уравнение имеет частное решение, которое является квазимногочленом с тем же показателем и той же степени, что и правая часть.

Пользуясь этой теоремой, можно искать решение уравнения (5.30) с неопределёнными коэффициентами: подставить в уравнение квазимногочлен $x(t) \in K_m^\mu(\mathbb{C})$ общего вида и подобрать коэффициенты этого многочлена, чтобы уравнение превращалось в равенство.

Доказательство. Положим $x = q(t)e^{\mu t}$ и применим формулу сдвига (лемма 5.2.15):

$$L(p)(q(t)e^{\mu t}) = e^{\mu t}L(p + \mu)q(t).$$

Пусть $f(t) = r(t)e^{\mu t}$. Тогда $x(t)$ является решением уравнения если и только если $L(p + \mu)q(t) = r(t)$. Осталось доказать такое предложение. Пусть \mathcal{P}_n — пространство многочленов степени не выше n .

Предложение 5.2.23. *Если многочлен M имеет ненулевой свободный член, то оператор $M(p)$ задаёт изоморфизм пространства \mathcal{P}_n на себя.*

Так как λ не является корнем многочлена L , свободный член многочлена $M(x) := L(x + \lambda)$ ненулевой. Поэтому из предложения будет следовать, что отображение $L(p + \lambda)$ в пространстве \mathcal{P}_n обратимо, то есть у уравнения $L(p + \lambda)q(t) = r(t)$ есть единственное решение степени $\deg q = \deg r = m$. Это доказывает теорему 5.2.22.

Доказательство предложения. Пусть $M(p) = m_0 + m_1p + \dots + m_kp^k$, $m_0 \neq 0$. Заметим, что отображение p и его степени понижают степень многочлена. Поэтому в сумме

$$M(p)q(t) = m_0q(t) + m_1\frac{d}{dt}q(t) + \dots + m_k\frac{d^k}{dt^k}q(t)$$

5 Лине́йные уравнения и системы

все слагаемые, кроме первого, имеют степень меньше n , а первое слагаемое имеет степень n . Значит, многочлен $M(p)q(t)$ имеет степень n .

Отсюда следует, что оператор $M(p)$ сохраняет степень многочлена, поэтому никакой ненулевой многочлен он не может переводить в ноль. Значит, оператор $M(p)$ задаёт изоморфизм. \square

\square

Чтобы пояснить, почему случай, когда μ является корнем характеристического многочлена, называется резонансным, приведём такой пример.

Пример 5.2.24. Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + x = \sin \omega t = \frac{1}{2i}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}).$$

Это уравнение описывает пружинный маятник, к которому прикладывают периодически изменяющуюся внешнюю силу $f(t) = \sin \omega t$. Характеристический многочлен уравнения имеет вид $L(z) = z^2 + 1$, его корни равны $\pm i$. Поэтому нерезонансный случай — это случай $\omega \neq 1$. Предыдущая лемма показывает, что решением уравнения будет линейная комбинация экспонент $e^{i\omega t}$ и $e^{-i\omega t}$, то есть линейная комбинация $\sin \omega t$ и $\cos \omega t$. Такую линейную комбинацию легко найти методом неопределённых коэффициентов. Положим $x(t) = a \sin \omega t + b \cos \omega t$ и подставим это выражение в уравнение. Получим

$$-a\omega^2 \sin \omega t - b\omega^2 \cos \omega t + a \sin \omega t + b \cos \omega t = \sin \omega t,$$

откуда $b = 0$, $a = \frac{1}{1-\omega^2}$, и

$$x_{\text{част}}(t) = \frac{\sin \omega t}{1 - \omega^2}.$$

Значит, маятник колеблется с постоянной амплитудой $\frac{1}{1-\omega^2}$, а период колебаний такой же, как и у внешней силы. При подходе к резонансу $\omega = \pm 1$ амплитуда растёт.

Общее решение уравнения является суммой частного решения $x_{\text{част}}$ и общего решения однородного уравнения $\ddot{x} = -x$:

$$x(t) = \frac{\sin \omega t}{1 - \omega^2} + c \cos t + d \sin t.$$

то есть представляет собой сумму колебания с частотой, равным частоте внешней силы, и колебания с собственной частотой (с которой система колеблется в отсутствие внешней силы).

Если же $\omega = \pm 1$ (резонансный случай), то легко проверить, что общим решением будет функция

$$x(t) = \mp \frac{t}{2} \cos t + c \cos t + d \sin t.$$

При $t \rightarrow \infty$ амплитуда таких колебаний стремится к бесконечности.

Итак, при подходе к резонансу амплитуда колебаний пружинного маятника увеличивается. Это соответствует понятию резонанса, принятому в физике. Когда на механическую систему воздействует периодически меняющаяся внешняя сила, частота которой близка к собственной частоте системы, эта система *входит в резонанс*: амплитуда её колебаний резко возрастает. Известно, что перед мостом колонне солдат дают команду «идти не в ногу»: иначе, если ритм их шага будет близок к резонансному значению, мост может разрушиться.

Как же решать уравнение в резонансном случае, когда μ является одним из корней характеристического многочлена? Ответ на этот вопрос даёт следующая теорема.

Теорема 5.2.25. *(о резонансном случае) Рассмотрим уравнение $L(p)x = f$ с правой частью $f \in K_m^\mu(\mathbb{C})$. Пусть показатель μ является корнем характеристического многочлена L кратности k (если μ — не корень L , то мы считаем $k = 0$). Тогда существует единственный квазимногочлен $g \in K_m^\mu(\mathbb{C})$, для которого функция $x = t^k g(t)$ является решением уравнения (5.30).*

Итак, у уравнения есть решение, которое является квазимногочленом с тем же показателем, что и правая часть, но его степень на k выше, чем степень правой части.

Доказательство. В случае $k = 0$ утверждение теоремы следует из теоремы 5.2.22. Пусть $k > 0$. Без ограничения общности можно считать, что $\mu = \lambda_1$; положим $L(z) =: (z - \mu)^k M(z)$. По формуле сдвига

$$M(p)(p - \mu)^k (q(t)e^{\mu t}) = e^{\mu t} M(p + \mu) p^k q(t).$$

Значит, $x(t) = q(t)e^{\mu t}$ является решением уравнения если и только если $M(p + \mu) p^k q(t) = r(t)$. По предложению 5.2.23, оператор $M(p + \mu)$ в \mathcal{P}_m обратим. Значит, существует единственный многочлен $s(t)$, для которого $M(p + \mu)(s(t)) = r(t)$ и $\deg s = m$. Таким образом, осталось решить уравнение $p^k q(t) = s(t)$, то есть

$$\frac{d^k}{dt^k} q(t) = s(t), \tag{5.31}$$

где $q \in \mathcal{P}_{m+k}$, $s \in \mathcal{P}_m$. Для этого достаточно k раз проинтегрировать равенство (5.31). Степень полученного многочлена q будет ровно $m + k$. Он будет определен неоднозначно: прибавление к q любого многочлена степени не выше $k-1$ не нарушает равенство. Поэтому можно найти многочлен q , не содержащий одночленов степени ниже k . Он имеет вид $t^k \tilde{q}$. Решение уравнения имеет вид $t^k \tilde{q} e^{\mu t}$, что и требовалось. \square

5.2.6 Метод комплексных амплитуд

Научившись решать линейные уравнения с одним квазимногочленом в правой части, мы, тем самым, научились находить решения линейных уравнений с суммой квазимногочленов в правой части (см. предложение 5.2.20). Это позволяет решать уравнения, в правой части которых стоит произведение квазимногочлена на синус

или косинус. Действительно, такая правая часть является суммой двух квазимногочленов, поскольку

$$\sin \omega t = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}, \quad \cos \omega t = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2i}.$$

Однако для вещественного оператора L уравнения

$$L(p)x = Q(t)e^{\alpha t} \cos \beta t \quad \text{и} \quad L(p)x = Q(t)e^{\alpha t} \sin \beta t \quad (5.32)$$

с вещественным многочленом Q и вещественными α и β решаются проще. Заметим, что для $f(t) := Q(t)e^{(\alpha+i\beta)t}$ выполнено

$$Q(t)e^{\alpha t} \cos \beta t = \operatorname{Re} f(t), \quad Q(t)e^{\alpha t} \sin \beta t = \operatorname{Im} f(t).$$

Пусть $z(t) = x(t) + iy(t)$ — решение уравнения

$$L(p)z = f(t). \quad (5.33)$$

Если две комплексные функции равны, то равны их действительные и мнимые части. Из (5.33) следует

$$L(p)x = \operatorname{Re} f(t) = Q(t)e^{\alpha t} \cos \beta t, \quad L(p)y = \operatorname{Im} f(t) = Q(t)e^{\alpha t} \sin \beta t,$$

то есть $x(t) = \operatorname{Re} z(t)$ и $y(t) = \operatorname{Im} z(t)$ — решения уравнений (5.32).

Итак, чтобы решить уравнения (5.32), достаточно решить уравнение (5.33) с *комплексным* квазимногочленом в правой части, а затем взять вещественную и мнимую часть решения. В этом и состоит *метод комплексных амплитуд*.

Следующий пример объясняет происхождение названия метода. Рассмотрим вещественное уравнение

$$L(p)x = \sin \omega t \quad (5.34)$$

Например, такой вид имеет уравнение $\ddot{x} + x = \sin \omega t$ движения пружинного маятника под воздействием внешней периодической силы $f(t) = \sin \omega t$, которое мы рассматривали ранее. В соответствии с методом комплексных амплитуд, заменим уравнение (5.34) на уравнение

$$L(p)z = e^{i\omega t}. \quad (5.35)$$

В нерезонансном случае, когда $L(i\omega) \neq 0$, частное решение уравнения (5.35) имеет вид

$$z_{\text{част}} = ce^{i\omega t},$$

где $c = \frac{1}{L(i\omega)}$. Пусть $c = re^{i\varphi}$ — тригонометрическая форма записи комплексного числа c . Тогда частное решение уравнения (5.34) равно

$$x_{\text{част}} = \operatorname{Im} ce^{i\omega t} = r \sin(\omega t + \varphi).$$

Число c называется *комплексной амплитудой* решения $x_{\text{част}}$. Система колеблется с амплитудой $r = |c|$, равной модулю комплексной амплитуды c . Частота колебаний равна частоте внешней силы. Колебание системы *сдвинуто по фазе* относительно внешней силы $f(t) = \sin \omega t$; сдвиг фазы $\varphi = \arg c$ равен аргументу комплексной амплитуды. Итак, комплексная амплитуда содержит информацию об амплитуде и фазе решения.

5.2.7 (*)Рекуррентные последовательности

В этом разделе рассмотрены линейные рекуррентные последовательности, то есть такие, каждый член которых линейно выражается через предыдущие одной и той же формулой, независимо от номера члена:

$$x_{k+n} = a_{n-1}x_{k+n-1} + \dots + a_0x_k, \quad k \geq 0. \quad (5.36)$$

Задача состоит в том, чтобы указать формулу общего члена последовательности, а также научиться находить последовательность (5.36) с данным начальным условием x_0, x_1, \dots, x_{n-1} . Первая задача параллельна нахождению общего решения линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами, вторая — задаче Коши для таких уравнений. Однако рекуррентные последовательности вошли в математику гораздо раньше, чем дифференциальные уравнения.

Следующая задача придумана итальянским ученым Фибоначчи⁶, жившим в 13-м веке.

Некто приобрел пару новорожденных кроликов и поместил их в огороженный со всех сторон загон. Сколько пар кроликов будет через год, если считать, что каждая пара кроликов со второго месяца жизни каждый месяц дает в качестве приплода новую пару кроликов?

Эта задача эквивалентна такой задаче: *Найдите сумму первых 12 членов последовательности, заданной рекуррентным соотношением*

$$x_{k+2} = x_{k+1} + x_k, \quad (5.37)$$

с начальным условием: $x_0 = 0, x_1 = 1$. Задачу проще решать в общем виде: Последовательность, удовлетворяющую соотношению (5.37), назовём последовательностью Фибоначчи. Найдите формулу для общего члена последовательности Фибоначчи.

Решение этой обобщенной задачи о кроликах было получено Де Муавром. На современном языке оно звучит так.

Пространство всех последовательностей Фибоначчи линейно и двумерно. Базис в нем образуют две геометрические прогрессии. Чтобы найти знаменатели этих прогрессий, надо подставить геометрическую прогрессию $\{q^k\}$ в уравнение (5.37). Получится условие $q^{k+2} = q^{k+1} + q^k$, из которого в нетривиальном случае $q \neq 0$ следует *характеристическое уравнение*

$$q^2 = q + 1,$$

откуда можно найти q . Итак, две геометрические прогрессии, которые удовлетворяют уравнению (5.37) — это $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k$ и $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k$. Любая последовательность Фибо-

⁶Леонардо Пизанский (1170 – 1250) — один из самых ярких математиков средневековой Европы. Кроме знаменитой задачи о кроликах, известен как автор книги “*Libro Abaci*”, в которой популяризовал позиционную десятичную систему счисления.

5 Линейные уравнения и системы

наччи есть линейная комбинация этих двух:

$$x_k = c_1 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^k + c_2 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^k.$$

Чтобы найти общий член последовательности Фибоначчи с начальным условием $x_0 = 0, x_1 = 1$, найдем c_1 и c_2 , исходя из начального условия:

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0, \\ c_1 \frac{1 - \sqrt{5}}{2} + c_2 \frac{1 + \sqrt{5}}{2} &= 1, \end{aligned}$$

откуда

$$c_1 = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \quad c_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Окончательно,

$$x_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^k - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^k \right).$$

(формула Бине).

Удивительно, что решение чисто целочисленной задачи выражается через иррациональности!

Общая теория рекуррентных последовательностей изложена ниже в задачах.

1. Докажите, что пространство вещественных последовательностей, удовлетворяющих соотношению (5.36), линейно над \mathbb{R} и n -мерно. Докажите, что пространство комплексных последовательностей, удовлетворяющих соотношению (5.36), линейно над \mathbb{C} . Какова его размерность над \mathbb{C} ?
2. Докажите, что каждому начальному условию x_0, \dots, x_{n-1} соответствует одна и только одна последовательность, удовлетворяющая соотношению (5.36) (мы будем называть ее решением уравнения (5.36)).
3. Характеристическим многочленом для соотношения (5.36) называется многочлен

$$q^n - a_{n-1}q^{n-1} - \dots - a_0 = 0. \quad (5.38)$$

Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — корни этого многочлена. Докажите, что если эти корни различны, то геометрические прогрессии $(\lambda_j)^k$ образуют базис в пространстве всех решений уравнения (5.36).

В частности, надо показать, что эти прогрессии линейно независимы.

Как и в случае дифференциальных уравнений, базис в пространстве решений называется *фундаментальной системой решений*.

5.2.7. (*) Рекуррентные последовательности

4. Пусть многочлен L имеет m различных корней $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ кратностей K_1, \dots, K_m . Докажите, что в качестве фундаментальной системы решений уравнения (5.36) можно взять

$$\begin{aligned} \lambda_1^k, k\lambda_1^k, \dots, k^{K_1-1}\lambda_1^k, \\ \dots \\ \lambda_m^k, k\lambda_m^k, \dots, k^{K_m-1}\lambda_m^k. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Если эти корни вещественны, найденная фундаментальная система вещественна, если комплексные — комплексна.

В частности, надо показать, что система (5.39) при различных λ_j линейно независима.

5. Рассмотрим последовательности, удовлетворяющие неоднородному рекуррентному соотношению

$$x_{k+n} = a_{n-1}x_{k+n-1} + \dots + a_0x_k + b_{k+n}. \quad (5.40)$$

Докажите, что общее решение уравнения (5.40) равно частному решению этого уравнения плюс общее решение соответствующего однородного.

6. Рекуррентные последовательности со специальной неоднородностью в виде дискретного квазимногочлена:

$$x_{k+n} = a_{n-1}x_{k+n-1} + \dots + a_0x_k + f(k+n), \quad (5.41)$$

где f — квазимногочлен, решаются так же, как линейные неоднородные уравнения со специальной правой частью. Если показатель квазимногочлена f не является корнем характеристического многочлена (5.38), говорят, что уравнение (5.40) нерезонансно; в противном случае оно резонансно.

Докажите, что в нерезонансном случае решение уравнения (5.40) с дискретным квазимногочленом в правой части имеет частное решение в виде дискретного квазимногочлена с тем же показателем и той же степени.

7. Докажите, что в резонансном случае уравнение (5.40) имеет решение в виде квазимногочлена с тем же показателем λ , что и в правой части, и со степенью, равной сумме степени правой части и кратности λ как корня характеристического многочлена (5.38).

8. Найдите рекуррентные последовательности, удовлетворяющие соотношениям:

- $x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2}, x_0 = 0, x_1 = 1.$
- $x_{n+2} = 2x_{n+1} - x_n, x_0 = x_1 = 1.$
- $x_{n+2} = x_{n-1} - x_n, x_0 = 0, x_1 = 1.$
- $x_{n+2} = -x_n, x_0 = 0, x_1 = 1$
- $x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + x_{n-3} + 1, x_0 = x_1 = x_2 = 0.$

$$f) x_{n+3} = x_n, x_0 = 0, x_1 = -1, x_2 = 1.$$

9. Бактерии первого вида делятся на две каждую четную минуту. Бактерия второго вида каждую нечетную минуту пожирает одну бактерию первого вида (если они есть) и немедленно делится на две. Если есть нечего, то бактерия второго вида умирает. Выживет или вымрет колония бактерий, в которой в начальный момент имеется миллиард бактерий первого вида и одна второго вида? Если вымрет, то за сколько часов?

5.2.8 (*) Уравнения Эйлера в задачах

Уравнения Эйлера имеют вид:

$$t^n x^{(n)} + a_{n-1} t^{n-1} x^{(n-1)} + \dots + a_0 x = 0. \quad (5.42)$$

Теория уравнений Эйлера параллельна двум изложенным выше теориям: линейных уравнений и линейных рекуррентных последовательностей.

Характеристическим многочленом уравнения (5.42) называется

$$L(\lambda) = \lambda(\lambda - 1) \dots (\lambda - n + 1) + a_{n-1} \lambda(\lambda - 1) \dots (\lambda - n + 2) + \dots + a_0. \quad (5.43)$$

1. Пусть характеристический многочлен (5.43) имеет попарно различные вещественные корни $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Докажите, что уравнение (5.42) имеет фундаментальную систему решений

$$x_1(t) = t^{\lambda_1}, \dots, x_n(t) = t^{\lambda_n}.$$

В случае комплексного $\lambda = \alpha + i\beta$ функция t^λ определяется так:

$$t^\lambda = e^{\lambda \ln t} = |\lambda|^\alpha (\cos \beta \ln t + i \sin \beta \ln t).$$

2. Найдите характеристический многочлен уравнения

$$\left(t \frac{d}{dt}\right)^2 x + x = 0.$$

3. Пусть

$$L(\lambda) = \lambda^n + b_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + b_0$$

— характеристический многочлен (5.43) уравнения (5.42). Докажите, что тогда уравнение (5.42) имеет вид:

$$\left(t \frac{d}{dt}\right)^n x + b_{n-1} \left(t \frac{d}{dt}\right)^{n-1} x + \dots + b_0 x = 0. \quad (5.44)$$

4. Решите уравнение

$$t^2 \ddot{x} + t \dot{x} - n^2 x = 0$$

при каждом целом неотрицательном n .

5.2.8. (*) Уравнения Эйлера в задачах

5. Докажите, что уравнение (5.44) переходит в уравнение

$$x^{(n)} + b_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + b_0x = 0$$

при замене $t = \ln \tau$.

6. Выведите теорию уравнений Эйлера из теории линейных уравнений высших порядков с помощью предыдущей задачи.

5.3 Линейные системы с постоянными коэффициентами

5.3.1 Экспонента линейного оператора как решение линейного дифференциального уравнения

Мы уже пользовались некоторыми понятиями линейной алгебры: понятием векторного пространства, линейной независимости, базиса, размерности, линейного оператора и его матрицы, определителя и следа. Напомним другие определения из линейной алгебры, которые нам понадобятся.

Собственный вектор оператора A — вектор $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\xi \neq 0$, для которого $A\xi = \lambda\xi$ для некоторого числа λ . Это число λ называется **собственным значением** оператора A .

Характеристический многочлен оператора A — многочлен $p(\lambda) = \det(A - \lambda E)$. Собственные значения оператора A являются корнями его характеристического многочлена, поэтому количество собственных значений равно степени этого многочлена — размерности пространства. Если характеристический многочлен имеет корень кратности k , говорят, что оператор A имеет собственное значение (алгебраической) кратности k .

Собственный базис оператора A — набор собственных векторов, которые образуют базис. Так как собственные векторы с разными собственными значениями линейно независимы, любой оператор с различными вещественными собственными значениями имеет собственный базис. В собственном базисе оператор становится диагональным.

5.3.1.1 Основная теорема теории линейных автономных систем

Определение 5.3.1. *Линейным автономным дифференциальным уравнением* называется уравнение вида $\dot{x} = Ax$, где $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — линейный оператор.

Пример 5.3.2. В одномерном случае получается уравнение вида $\dot{x} = ax$, а в двумерном случае — система уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases} \quad (5.45)$$

На рисунке 5.1 изображены фазовые портреты нескольких векторных полей вида (5.45). На самом деле, для любой невырожденной 2×2 -матрицы A ($\det A \neq 0$) фазовый портрет векторного поля $v(x) = Ax$ имеет один из этих четырех видов.

Цель этого параграфа — найти уравнение траекторий линейных векторных полей в общем виде, то есть решить уравнение

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (5.46)$$

В одномерном случае уравнение имеет вид $\dot{x} = ax$, и его решения — функции вида $\varphi(t) = e^{at}\varphi(0)$. Оказывается, эта формула верна и в общем случае.

Напомним определение экспоненты линейного оператора, которое даётся в курсе линейной алгебры.

5.3.1. Экспонента линейного оператора как решение линейного дифференциального уравнения

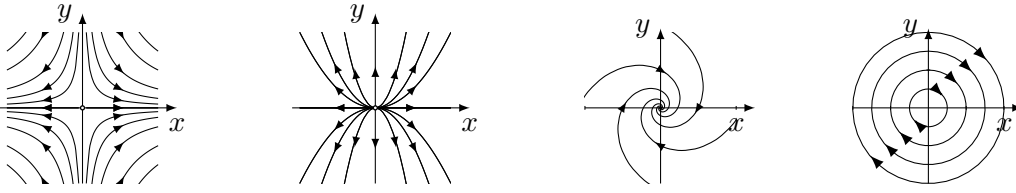


Рис. 5.1: Седло, узел, фокус и центр

Определение 5.3.3. Экспонентой линейного оператора A называется сумма ряда

$$e^A := E + A + \frac{A^2}{2!} + \dots + \frac{A^k}{k!} + \dots \quad (5.47)$$

Ниже мы докажем, что этот ряд всегда сходится.

Теорема 5.3.4 (Основная теорема). Матрица e^{At} является фундаментальной матрицей решений уравнения (5.46). Любое решение $\varphi(t)$ уравнения (5.46) имеет вид

$$\varphi(t) = e^{At}\varphi(0). \quad (5.48)$$

Отображение потока за время t уравнения (5.46) совпадает с линейным оператором e^{At} .

Здесь $\varphi(0)$ — n -мерный вектор, а e^{At} — экспонента оператора $A \cdot t$.

Формула в правой части равенства (5.48) очень ёмкая; в частности, она описывает все четыре картинки на рис. 5.1. В более высоких размерностях число возможных картинок гораздо больше, но все они описываются формулой (5.48). Впрочем, чтобы её применять, надо уметь вычислять экспоненты операторов.

Пример 5.3.5. Пусть матрица A в базисе e^1, \dots, e^n диагональна, и на диагонали стоят числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Тогда соответствующая линейная система имеет вид $\dot{x}_1 = \lambda_1 x_1$, $\dot{x}_2 = \lambda_2 x_2$, и т.д. Поэтому в качестве фундаментальной системы решений можно взять набор вектор-функций

$$\{e^{\lambda_1 t} e^1, \dots, e^{\lambda_n t} e^n\}$$

В базисе e^1, \dots, e^n решения имеют координаты $(e^{\lambda_1 t}, 0, \dots, 0)$, $(0, e^{\lambda_2 t}, 0, \dots, 0)$, и т.д. Значит, фундаментальная матрица решений в этом базисе — диагональная матрица с коэффициентами $e^{\lambda_i t}$ на диагонали. Заметим, что она совпадает с e^{At} .

Если у оператора нет кратных собственных значений, то у него есть собственный базис — базис из собственных векторов. В собственном базисе матрица оператора диагональна, поэтому экспоненту оператора можно найти так же, как в примере 5.3.5. В случае, если собственный базис комплексный, этот метод требует дополнительных пояснений (см. раздел 5.3.2). Случай, когда у оператора есть кратные собственные значения и нет собственного базиса, сложнее; он рассмотрен в разделе 5.3.5.

Неполное доказательство основной теоремы. Нам нужно доказать, что функция

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} \varphi(0)$$

является решением уравнения (5.46). Продифференцируем это равенство:

$$\dot{\varphi}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k t^{k-1}}{(k-1)!} \varphi(0) = A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} \varphi(0) = A\varphi(t)$$

откуда $\dot{\varphi} = A\varphi$.

Подставляя начальные условия $e^1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$, $e^2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$ и т.д., мы получаем, что вектор-функции $e^{At}e^1$, $e^{At}e^2$, и т.д. являются линейно независимыми решениями уравнения, то есть фундаментальной системой решений. Но если матрицу применить к вектору e^k , мы получим её k -й столбец. Поэтому координаты решений — в точности столбцы матрицы e^{At} . Это и значит, что e^{At} является фундаментальной матрицей решений линейного уравнения.

Отображение потока уравнения (5.46) переводит точку x_0 в значение $x(t)$, где $x(t) = e^{At}x_0$ — решение с начальным условием x_0 . Значит, отображение потока — это отображение $x_0 \mapsto e^{At}x_0$, что и требовалось. □

Нам осталось доказать два предложения:

Предложение 5.3.6. *Ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} \tag{5.49}$$

сходится для любого оператора A .

Предложение 5.3.7. *Сумма ряда (5.49) дифференцируема, и ряд можно дифференцировать почленно: производная суммы ряда равна сумме ряда, составленного из производных от членов ряда (5.49).*

Сначала нужно понять, в каком смысле мы будем говорить о сходимости ряда из операторов. Операторы в \mathbb{R}^n образуют n^2 -мерное векторное пространство. Мы введем в нем метрику и будем рассматривать сходимость ряда относительно этой метрики.

В пространстве операторов есть несколько естественных метрик, но они все эквивалентны (то есть последовательность сходится в смысле одной метрики тогда и только тогда, когда она сходится в смысле другой). Мы введем метрику, связанную с операторной нормой $\|A\|$.

5.3.1. Экспонента линейного оператора как решение линейного дифференциального уравнения

5.3.1.2 Норма линейного оператора

Пусть в \mathbb{R}^n определено скалярное произведение (x, y) . Нормой вектора евклидова пространства $x \in \mathbb{R}^n$ называется его скалярный квадрат $|x| = \sqrt{(x, x)}$.

Определение 5.3.8. Норма оператора $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — это его максимальный коэффициент растяжения:

$$\|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{|Ax|}{|x|}. \quad (5.50)$$

Лемма 5.3.9. Норма $\|A\|$ корректно определена (то есть максимум в (5.50) достигается).

Доказательство. Если растянуть вектор x в λ раз, дробь $\frac{|Ax|}{|x|}$ не изменится: ведь $|A(\lambda x)| = |\lambda| \cdot |Ax|$ и $|\lambda x| = |\lambda| \cdot |x|$. Поэтому

$$\max_{x \neq 0} \frac{|Ax|}{|x|} = \max_{S^{n-1}} |Ax|,$$

где $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1\}$ — единичная сфера.

Легко доказать (сделайте это!), что функция $x \mapsto |Ax|$ непрерывна. Так как единичная сфера — компакт, эта функция ограничена и принимает своё максимальное значение на сфере, что и требовалось доказать. \square

Лемма 5.3.10. Пространство линейных операторов $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ с метрикой $\rho(A, B) = \|A - B\|$ полно (всякая последовательность Коши сходится).

Доказательство. Полноту пространства с такой нормой мы выведем из полноты евклидова пространства. Фиксируем базис в \mathbb{R}^n ; тогда пространство операторов можно отождествить с пространством $n \times n$ -матриц. В пространстве матриц выберем базис, состоящий из матричных единиц e_{kl} (матриц, у которых на месте (k, l) стоит единица, а в остальных местах — нули). Тогда коэффициенты матрицы — это и есть её коэффициенты разложения по такому базису: $(a_{kl}) = \sum a_{kl} e_{kl}$.

Определим новую норму $\|\cdot\|_0$ в пространстве операторов: положим

$$\|A\|_0^2 = \sum a_{kl}^2$$

То есть норма матрицы равна корню из суммы квадратов её координат при разложении по базису e_{kl} . Это обычная евклидова норма в n^2 -мерном пространстве, и полнота относительно такой нормы доказана в курсе анализа.

Теперь утверждение леммы следует из такого предложения:

Предложение 5.3.11. Нормы $\|\cdot\|_0$ и $\|\cdot\|$ эквивалентны, т.е. существуют положительные константы c, C такие, что для любого оператора A

$$c\|A\|_0 \leq \|A\| \leq C\|A\|_0 \quad (5.51)$$

Действительно, из равенства (5.51) следует, что если последовательность A_k сходится к A в смысле одной из норм ($\|A_k - A\|_0 \rightarrow 0$), то она сходится и в смысле другой нормы: $\|A_k - A\| \rightarrow 0$. Кроме того, если последовательность фундаментальна в смысле одной из норм, то она фундаментальна и в смысле другой нормы. Раз для нормы $\|\cdot\|_0$ любая фундаментальная последовательность сходится, то это верно и для нормы $\|\cdot\|$. \square

Доказательство предложения 5.3.11 об эквивалентности норм. Доказательство идейно близко к доказательству леммы 5.3.9. Достаточно доказать оценку (5.51) для тех операторов A , для которых $\|A\|_0 = 1$, то есть $\sum a_{kl}^2 = 1$ (ведь если умножить оператор на число, то его норма умножится на *модуль* этого числа). Заметим, что множество матриц $\{A \sim (a_{kl}) \mid \sum a_{kl}^2 = 1\}$ — это сфера в n^2 -мерном евклидовом пространстве. На этой сфере функция $A \mapsto \|A\|$ — непрерывная строго положительная функция (докажите это!). Непрерывная функция на компакте ограничена:

$$\exists c > 0, C > 0 : c \leq \|A\| \leq C,$$

а это и есть наше неравенство (5.51), так как $\|A\|_0 = 1$. \square

5.3.1.3 Сходимость ряда для экспоненты линейного оператора

Выше мы доказали, что пространство операторов с нормой $\|\cdot\|$ полно. Поэтому предложение 5.3.6 о сходимости ряда для экспоненты следует из такой леммы:

Лемма 5.3.12. *Последовательность $S_m = \sum_{k=0}^m \frac{A^k}{k!}$ фундаментальна.*

Доказательство. Заметим, что

$$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|.$$

Действительно, $\|AB\| = \max_{x \neq 0} |ABx| \leq \max_{x \neq 0} \|A\| \cdot |Bx| \leq \|A\| \|B\|$. В частности,

$$\|A^k\| \leq \|A\|^k.$$

Докажем, что последовательность S_m фундаментальна:

$$\|S_m - S_l\| = \left\| \sum_{l+1}^m \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \sum_{l+1}^m \frac{\|A\|^k}{k!} \quad (5.52)$$

Обозначим $a := \|A\|$ и рассмотрим ряд для экспоненты e^a . Этот ряд сходится, поэтому последовательность его частных сумм $s_n = \sum_{k=0}^n \frac{a^k}{k!}$ фундаментальна:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall m, l > N \quad |s_m - s_l| < \varepsilon.$$

Равенство (5.52) означает, что $\|S_m - S_l\| < \|s_m - s_l\|$. Поэтому последовательность S_n тоже фундаментальна. \square

5.3.1. Экспонента линейного оператора как решение линейного дифференциального уравнения

На самом деле, для ряда $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ выполнено условие Вейерштрасса: он мажорируется положительным сходящимся рядом $\sum_{k=0}^{l+1} \frac{\|A\|^k}{k!}$. Поэтому мы могли просто применить признак Вейерштрасса сходимости ряда, но вместо этого повторили его доказательство в случае операторного ряда.

Чтобы завершить доказательство основной теоремы, нам осталось доказать предложение 5.3.7 о почленном дифференцировании ряда для экспоненты. Повторим его формулировку в более развернутом виде:

Предложение. Ряд $e^{At} = \sum \frac{t^k A^k}{k!}$ можно почленно дифференцировать:

$$(e^{At})' = \sum \frac{t^{k-1} A^k}{(k-1)!} \quad (5.53)$$

Доказательство. Мы будем пользоваться теоремой о почленном дифференцировании ряда:

Теорема 5.3.13 (Вейерштрасс). *Если ряд функций (или вектор-функций) равномерно сходится на отрезке вместе со своими первыми производными⁷, то его можно почленно дифференцировать.*

Мы имеем дело с рядом из матриц, зависящих от t ; матрица — элемент пространства $\mathbb{R}^{(n^2)}$, поэтому её можно рассматривать как вектор-функцию.

Ряд (5.53) равномерно сходится на любом отрезке $[-T, T]$, так как он отличается от ряда для экспоненты почленным умножением на A , а равномерная сходимость ряда для экспоненты доказана выше. Поэтому теорема Вейерштрасса применима на отрезке $[-T, T]$ при любом T . Отсюда мы получим, что ряд можно дифференцировать внутри любого отрезка вещественной оси, а значит, на всей вещественной оси. \square

Тем самым, закончено и доказательство основной теоремы.

В основной теореме утверждается, что функция $e^{At}x_0$ даёт решение дифференциального уравнения $\dot{x} = Ax$ с начальным условием $x(0) = x_0$. Из общей теоремы существования и единственности следует, что других решений нет. Но в данном случае проходит совсем простое доказательство единственности:

Доказательство теоремы единственности для линейных уравнений. Пусть $x(t)$ — решение уравнения $\dot{x} = Ax$. Положим $y(t) := e^{-At}x(t)$. Простая выкладка показывает, что $\dot{y} = 0$, поэтому $y(t) \equiv \text{const}$. Значит, $x(t)$ имеет вид $e^{At}x_0$. \square

⁷Достаточно требовать равномерной сходимости ряда из производных и сходимости в одной точке — для исходного ряда. В курсе математического анализа теорему Вейерштрасса формулируют именно так.

5.3.1.4 Экспонента суммы операторов

В этом разделе мы получим формулу для экспоненты суммы, которая пригодится нам в будущем.

Теорема 5.3.14. Пусть A, B — коммутирующие линейные отображения из \mathbb{R}^n в \mathbb{R}^n , то есть $AB = BA$. Тогда

$$e^{A+B} = e^A \cdot e^B \quad (5.54)$$

Утверждение неверно, если операторы не коммутируют.

Доказательство. Сначала — наводящее соображение. Выпишем ряд для экспоненты суммы и для произведения экспонент:

$$e^{A+B} = E + (A+B) + \frac{(A+B)(A+B)}{2} + \dots = E + (A+B) + \frac{A^2 + AB + BA + B^2}{2} + \dots$$

и

$$e^A e^B = \left(E + A + \frac{A^2}{2} + \dots\right) \left(E + B + \frac{B^2}{2} + \dots\right) = E + (A+B) + \frac{A^2 + 2AB + B^2}{2} + \dots$$

Видно, что условие $AB = BA$ обеспечивает совпадение членов второго порядка.

Перейдём к доказательству. Напомним, что ряды для экспоненты сходятся абсолютно, поэтому их можно перемножать почленно. Значит, нам достаточно показать, что в левой и правой части записи

$$E + (A+B) + \frac{(A+B)^2}{2} + \dots \stackrel{?}{=} \left(E + A + \frac{A^2}{2} + \dots\right) \left(E + B + \frac{B^2}{2} + \dots\right) \quad (5.55)$$

совпадают коэффициенты при $A^k B^l$.

Запишем такие же точно ряды для экспонент e^{a+b} и $e^a e^b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Нам известно, что $e^{a+b} = e^a e^b$, поэтому

$$1 + (a+b) + \frac{(a+b)^2}{2} + \dots = \left(1 + a + \frac{a^2}{2} + \dots\right) \left(1 + b + \frac{b^2}{2} + \dots\right)$$

и коэффициенты при $a^k b^l$ слева и справа совпадают. Но эти коэффициенты такие же, как и в записи (5.55) (здесь мы пользуемся тем, что операторы коммутируют). Значит, в левой и правой части записи (5.55) коэффициенты при $A^k B^l$ совпадают, что и требовалось доказать. \square

5.3.1.5 Линейные фазовые потоки

Напомним, что фазовый поток — это семейство диффеоморфизмов g^t , гладкое по t, x , которое удовлетворяет групповому свойству $g^t g^s = g^{t+s}$ и $g^0 = id$. Следующая теорема показывает, что линейные фазовые потоки — это экспоненты линейных операторов.

5.3.1. Экспонента линейного оператора как решение линейного дифференциального уравнения

Теорема 5.3.15. 1. Пусть $g^t: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — линейный фазовый поток (каждое отображение g^t линейно). Тогда существует матрица A , для которой $g^t = e^{At}$.

2. Наоборот, для каждого оператора $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ семейство отображений $\{e^{At} \mid t \in \mathbb{R}\}$ — фазовый поток.

Доказательство. Первое утверждение теоремы следует из теоремы 2.4.27. Действительно, так как g^t линейно по x , его генератор $v(x) = \frac{d}{dt}g^t(x)|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g^t(x) - x}{t}$ тоже линеен по x (последовательность линейных операторов может сходиться только к линейному оператору). Значит, генератором потока g^t является поле вида $v(x) = Ax$. Напомним, что решением уравнения $\dot{x} = v(x)$ с начальным условием x является функция $\varphi(t) = e^{At}x$. По определению генератора, $g^t(x) = \varphi(t) = e^{At}x$, что и требовалось доказать.

Второе утверждение теоремы сразу следует из теоремы 2.4.25: поток любого векторного поля, в том числе поля $\dot{x} = Ax$, является фазовым потоком. Впрочем, можно и не ссылаться на общую теорему 2.4.25, а просто проверить, что все отображения e^{At} — диффеоморфизмы и удовлетворяют трём требованиям определения 2.4.23. Это несложное упражнение мы оставляем читателю. \square

5.3.2 Линейные системы в \mathbb{C}^n . Комплексификация и о веществе

Напомним, что наряду с векторными пространствами над полем вещественных чисел можно определить векторные пространства над полем комплексных чисел \mathbb{C} . Элементы таких пространств можно складывать и умножать на комплексные числа.

Понятие экспоненты линейного оператора можно перенести на случай пространств над \mathbb{C} . Это обобщение будет использовано при вычислении экспоненты линейного оператора, не имеющего вещественного собственного базиса.

5.3.2.1 Комплексификация и о веществе линейных операторов

Хорошо известно, что матрица $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ поворота плоскости на 90° имеет собственные значения $\pm i$. Но какой геометрический смысл этого утверждения? Ведь у нетождественного поворота вещественной плоскости вообще нет собственных векторов, а значит и собственных значений. Собственные векторы есть у *комплексификации* поворота, к описанию которой мы и переходим.

Определение 5.3.16. Комплексификация вещественного пространства \mathbb{R}^n — это n -мерное пространство \mathbb{C}^n над полем комплексных чисел:

$$\mathbb{C}^n = \{\xi + i\eta \mid \xi \in \mathbb{R}^n, \eta \in \mathbb{R}^n\}$$

с операцией умножения на комплексное число, действующей по распределительному закону: для любого $\zeta = \xi + i\eta \in \mathbb{C}^n$, $\alpha = a + ib \in \mathbb{C}$ мы полагаем

$$\alpha\zeta = a\xi - b\eta + i(a\eta + b\xi).$$

Мы обозначаем комплексификацию следующим образом: $\mathbb{C}^n = {}^{\mathbb{C}}\mathbb{R}^n$.

Определение 5.3.17. Комплексификация вещественно-линейного оператора $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — это оператор ${}^{\mathbb{C}}A : {}^{\mathbb{C}}\mathbb{R}^n \rightarrow {}^{\mathbb{C}}\mathbb{R}^n$, действующий по правилу:

$${}^{\mathbb{C}}A : \xi + i\eta \rightarrow A\xi + iA\eta.$$

Отметим, что базис в \mathbb{R}^n является также базисом пространства ${}^{\mathbb{C}}\mathbb{R}^n$ над полем \mathbb{C} : любой вектор является линейной комбинацией базисных векторов с комплексными коэффициентами. Поэтому матрицы операторов A и ${}^{\mathbb{C}}A$ в вещественном базисе совпадают.

Пример 5.3.18. Комплексификация поворота $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ — это оператор ${}^{\mathbb{C}}\mathbb{R}^2 \rightarrow {}^{\mathbb{C}}\mathbb{R}^2$ с собственными векторами $\begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} -i \\ -1 \end{pmatrix}$ и собственными значениями $\pm i$.

Операция о веществе имеет другую природу: она не меняет геометрию пространства, но меняет его структуру. О веществе “забывает” умножение на комплексные числа и “помнит” только умножение на вещественные.

5.3.2. Линейные системы в \mathbb{C}^n . Комплексификация и о веществе

Определение 5.3.19. Овеществление пространства \mathbb{C}^n — это вещественное линейное пространство ${}^{\mathbb{R}}\mathbb{C}^n$ с тем же набором векторов и умножением на вещественные числа таким же, как в \mathbb{C}^n .

Размерность пространства ${}^{\mathbb{R}}\mathbb{C}^n$ над \mathbb{R} равна $2n$. Действительно, пусть ξ^1, \dots, ξ^n — базис в \mathbb{C}^n над \mathbb{C} . Тогда $\xi^1, \dots, \xi^n, i\xi^1, \dots, i\xi^n$ — базис в ${}^{\mathbb{R}}\mathbb{C}^n$ над \mathbb{R} . Действительно, эти векторы порождают все пространство ${}^{\mathbb{R}}\mathbb{C}^n$ и линейно независимы над \mathbb{R} . Последнее доказывается от противного: если бы эти $2n$ векторов были линейно зависимы, выполнялось бы соотношение

$$a_1\xi_1 + \dots + a_n\xi^n + b_1i\xi^1 + \dots + b_n\xi_n = 0$$

то есть в \mathbb{C}^n было бы выполнено

$$(a_1 + ib_1)\xi^1 + \dots + (a_n + ib_n)\xi_n = 0.$$

Это невозможно, так как векторы ξ_j образуют базис в \mathbb{C}^n .

Определение 5.3.20. Овеществление линейного оператора $A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ — это оператор ${}^{\mathbb{R}}A : {}^{\mathbb{R}}\mathbb{C}^n \rightarrow {}^{\mathbb{R}}\mathbb{C}^n$, который геометрически действует так же, как A , но является вещественно линейным оператором в $2n$ -мерном пространстве ${}^{\mathbb{R}}\mathbb{C}^n$.

Пример 5.3.21. Рассмотрим оператор умножения на комплексное число $\alpha = a + bi$ на пространстве \mathbb{C}^1 : $z \mapsto \alpha z$. Овеществление этого оператора в базисе $e_1 = 1, e_2 = i$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. Действительно, $\alpha e_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \alpha e_2 = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

Упражнение 94. Пусть в базисе ξ^1, \dots, ξ^n оператор A имеет матрицу с комплексными элементами, обозначаемую также A . Докажите, что в базисе $\xi^1, \dots, \xi^n, i\xi^1, \dots, i\xi^n$ оператор ${}^{\mathbb{R}}A$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} \operatorname{Re} A & -\operatorname{Im} A \\ \operatorname{Im} A & \operatorname{Re} A \end{pmatrix}$.

Упражнение 95. Выразите собственные числа овеществления оператора $A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ через собственные числа самого оператора A .

5.3.2.2 Комплексная экспонента

Линейное уравнение в \mathbb{C}^n — это уравнение вида

$$\dot{z} = Az, \quad z \in \mathbb{C}^n, \quad A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n \quad (5.56)$$

где A — комплексно-линейный оператор.

Производная комплексной вектор-функции определяется так же, как и в вещественном случае:

$$\dot{\varphi}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h}$$

Если выделить у функции φ вещественную и мнимую часть: $\varphi(t) = \varphi_1(t) + i\varphi_2(t)$, то получим $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_1 + i\dot{\varphi}_2$.

Определение 5.3.22. Кривая $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$ называется решением уравнения (5.56), если

$$\dot{\varphi} = A\varphi(t) \quad (5.57)$$

Пространство решений уравнения (5.56) — векторное пространство над \mathbb{C} . Это доказывается так же, как и в вещественном случае. Экспоненту оператора $A: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ можно определить по аналогии с экспонентой вещественного оператора.

Определение 5.3.23. Экспонентой оператора $A: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ называется сумма ряда

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}. \quad (5.58)$$

Теорема 5.3.24 (Основная теорема (для комплексных линейных уравнений)). *Общее решение уравнения (5.56) имеет вид*

$$\varphi(t) = e^{At}\varphi(0) \quad (5.59)$$

Доказательство следует той же схеме, что и в вещественном случае. Мы приведем только ту его часть, в которой доказывается сходимость ряда для экспоненты. Эту часть тоже можно доказать по аналогии с предложением 5.3.6 раздела 5.3, но нам будет проще свести её к вещественному случаю с помощью операции овеществления.

5.3.2.3 Комплексификация и овеществление экспонент

Выясним, как связаны понятие комплексной и вещественной экспоненты.

Предложение 5.3.25. *Для любого оператора $A: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ ряд (5.58) сходится, и*

$$e^{\mathbb{R}A} = \mathbb{R}e^A.$$

Для любого оператора $B: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$e^{\mathbb{C}B} = \mathbb{C}e^B.$$

Доказательство. Сходимость ряда (5.58) можно доказать так же, как это делалось в вещественном случае (предложение 5.3.6 из раздела 5.3), но нам будет проще свести её к этому предложению. Так как A геометрически действует в \mathbb{C}^n так же, как $\mathbb{R}A$ — в \mathbb{R}^{2n} , то ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ в \mathbb{C}^n сходится тогда же, когда ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbb{R}A^k}{k!}$ — в \mathbb{R}^{2n} . А последний ряд сходится к $e^{\mathbb{R}A}$ по предложению 5.3.6 раздела 5.3. Заодно мы доказали, что $\mathbb{R}e^A = e^{\mathbb{R}A}$.

Оператор $\mathbb{C}B$ в ограничении на вещественное пространство $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$ действует так же, как и B . Поэтому в ограничении на это пространство $e^{\mathbb{C}B}$ и e^B совпадают. Но единственный комплексно-линейный оператор, который на \mathbb{R}^n действует так же, как e^B — это $\mathbb{C}e^B$. Поэтому $e^{\mathbb{C}B} = \mathbb{C}e^B$, что и требовалось. \square

5.3.3 Линейные системы на плоскости

В этом разделе мы, почти не пользуясь общей теорией, нарисуем всевозможные фазовые портреты линейных систем $\dot{x} = Ax$ на плоскости в случае, когда оператор A невырожден, и решим соответствующие уравнения.

5.3.3.1 Случай вещественного собственного базиса

Предположим сначала, что оператор A имеет вещественный собственный базис ξ^1, ξ^2 , и соответствующие собственные значения равны λ_1, λ_2 . Тогда линейное уравнение $\dot{x} = Ax$ имеет решения $x_1(t) = e^{\lambda_1 t} \xi^1$ и $x_2(t) = e^{\lambda_2 t} \xi^2$, как легко убедиться: $(e^{\lambda_1 t} \xi^1)' = \lambda_1 e^{\lambda_1 t} \xi^1 = A e^{\lambda_1 t} \xi^1$, и то же для $x_2(t)$. Поэтому линейные комбинации

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \xi^1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \xi^2 \quad (5.60)$$

тоже являются решениями уравнения. Чтобы найти решение с начальным условием $x(0) = x_0$, достаточно выбрать c_1, c_2 так, что $x_0 = c_1 \xi^1 + c_2 \xi^2$, то есть разложить начальное условие по базису (ξ^1, ξ^2) .

Итак, решения уравнения описываются формулой (5.60).

Чтобы нарисовать фазовый портрет, перейдем в собственный базис. В собственном базисе матрица оператора A диагональная, а координаты решения равны $(y_1(t), y_2(t)) = (c_1 e^{\lambda_1 t}, c_2 e^{\lambda_2 t})$. Если $c_1 = 0, c_2 = 0$, то решение постоянно, $x(t) \equiv 0$; это особая точка векторного поля, и соответствующая фазовая кривая — точка $(0, 0)$. Если $c_1 = 0, c_2 > 0$, фазовая кривая — луч $y_2 > 0$. Аналогично рассматривается случай $c_1 = 0, c_2 < 0$; $c_1 < 0, c_2 = 0$; $c_1 > 0, c_2 = 0$. Итак, четыре координатных луча являются фазовыми кривыми, направление стрелок на них зависит от знака λ_1, λ_2 .

Пусть $c_1 \neq 0, c_2 \neq 0$. Тогда фазовая кривая $(c_1 e^{\lambda_1 t}, c_2 e^{\lambda_2 t})$ лежит на графике функции $y_2 = c y_1^{\lambda_2/\lambda_1}$ и её форма зависит от знаков λ_1, λ_2 .

- Если собственные значения разных знаков, кривые $y_2 = c y_1^{\lambda_2/\lambda_1}$ похожи на гиперболы и не подходят к нулю. Такой фазовый портрет называется седлом. К нулю подходят только четыре фазовые кривые, совпадающие с координатными лучами; они называются *сепаратрисами* седла. Термин *сепаратрисы* происходит от слова separate (разделять): сепаратрисы разделяют окрестность особой точки на четыре области с разным поведением траекторий — четыре *гиперболических сектора*.
- Если собственные значения одного знака, кривые $y_2 = c y_1^{\lambda_2/\lambda_1}$ подходят к нулю. Такой фазовый портрет называется *узел*. Если $\lambda_2 > \lambda_1$, фазовые кривые касаются Oy_1 (т.е. касаются ξ^1); если $\lambda_2 < \lambda_1$, фазовые кривые касаются Oy_2 (т.е. ξ^2). Если $\lambda_1 = \lambda_2$, фазовые кривые лежат на прямых $y_2 = c y_1$. Такой узел называется *дикритическим*.

От знака λ_1, λ_2 зависит направление стрелок на фазовых кривых. Если $\lambda_{1,2} > 0$, то решения (5.60) стремятся к бесконечности при $t \rightarrow +\infty$ и к нулю при $t \rightarrow -\infty$. Такой узел называется *отталкивающим*. Если $\lambda_{1,2} < 0$, то решения

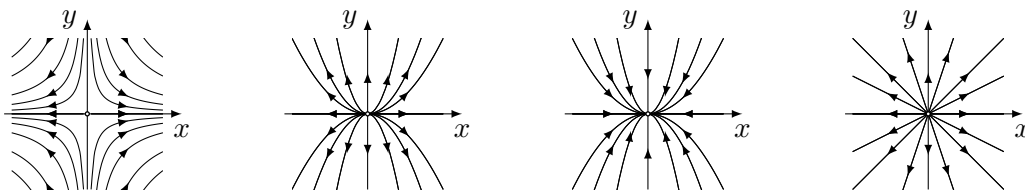


Рис. 5.2: Седло ($\lambda_1 > 0 > \lambda_2$), отталкивающий узел ($0 < \lambda_1 < \lambda_2$), притягивающий узел ($0 < \lambda_1 < \lambda_2$), отталкивающий дикритический узел ($0 < \lambda_1 = \lambda_2$)

(5.60) стремятся к нулю при $t \rightarrow +\infty$ и к бесконечности — при $t \rightarrow -\infty$. Такой узел называется притягивающим.

Упражнение 96. Рисуя фазовый портрет, мы не рассмотрели вырожденный случай, когда оператор A имеет вещественный собственный базис, но одно или оба собственных значения равны нулю. Как выглядит фазовый портрет в этом случае?

5.3.3.2 Случай комплексного собственного базиса

Пусть оператор A имеет комплексный собственный базис ξ^1, ξ^2 . Тогда линейное уравнение $\dot{x} = {}^{\mathbb{C}}Ax$ в \mathbb{C}^n имеет решения $x_1(t) = e^{\lambda_1 t} \xi^1$ и $x_2(t) = e^{\lambda_2 t} \xi^2$. Это можно проверить так же, как и в вещественном случае. Все решения этого уравнения имеют вид

$$x(t) = ce^{\lambda_1 t} \xi^1 + de^{\lambda_2 t} \xi^2, \quad (5.61)$$

где c, d — коэффициенты разложения начального условия по базису ξ^1, ξ^2 .

На пространстве \mathbb{R}^n операторы A и $A^{\mathbb{C}}$ совпадают, поэтому решения уравнения $\dot{x} = Ax$ в \mathbb{R}^n являются решениями уравнения $\dot{x} = {}^{\mathbb{C}}Ax$ в \mathbb{C}^n . Поэтому формула (5.61) верна и для (вещественных) решений уравнения $\dot{x} = Ax$.

Хотя коэффициенты и собственные векторы комплексны, сумма в правой части равенства (5.61) будет вещественна, так как решение с вещественным начальным условием должно получиться вещественным.

Заметим, что собственные значения отличаются сопряжением; $\lambda_{1,2} = a \pm ib$. Напомним, что по формуле Эйлера $e^{(a+ib)t} = e^{at}(\cos bt + i \sin bt)$, поэтому компоненты решения уравнения $\dot{x} = Ax$ будут линейными комбинациями функций $e^{at} \cos bt$ и $e^{at} \sin bt$.

Эта формула не позволяет сразу нарисовать фазовый портрет уравнения. В случае вещественного базиса мы могли перейти в этот базис, а в случае комплексного базиса мы не можем этого сделать, оставаясь в \mathbb{R}^2 . Следующая лемма показывает, как привести оператор A к некоторому стандартному виду в вещественном базисе.

Лемма 5.3.26. Если оператор $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ имеет комплексный собственный базис и собственные значения равны $a \pm bi$, $b \neq 0$, то в некотором (вещественном) базисе

A имеет матрицу $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

Доказательство. Пусть $\xi + i\eta$ — собственный вектор оператора ${}^{\mathbb{C}}A$ с собственным значением $a + bi$. Возьмем базис ξ, η на плоскости \mathbb{R}^2 . Так как

$${}^{\mathbb{C}}A(\xi + i\eta) = (a + bi)(\xi + i\eta) = a\xi - b\eta + i(b\xi + a\eta),$$

то A имеет матрицу $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ в базисе ξ, η . \square

Перейдем в базис ξ, η из этой леммы. Заметим, что оператор A с матрицей $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ является оеществлением комплексного одномерного оператора $B: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, который действует умножением на $(a + ib)$: $Bz = (a + ib)z$. Поэтому решить уравнение $\dot{x} = Ax$ — значит решить уравнение

$$\dot{z} = \lambda z, \quad z \in \mathbb{C}, \quad \text{где } \lambda = a + bi. \quad (5.62)$$

Оно соответствует векторному полю $v(z) = \lambda z$ на комплексной плоскости (см. рис. 5.3).

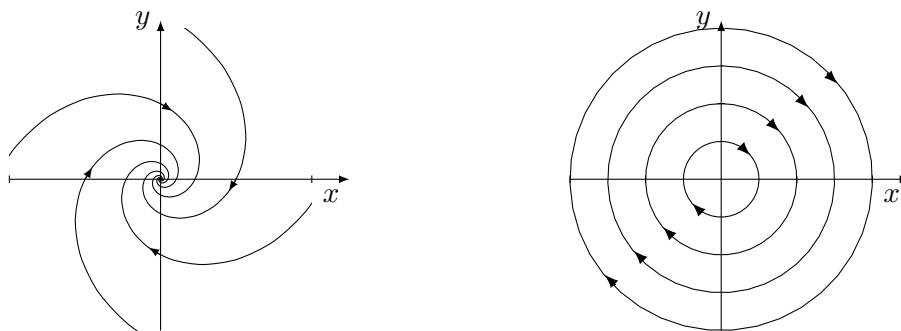


Рис. 5.3: Фазовые кривые векторного поля $\dot{z} = \lambda z$: фокус ($\operatorname{Re} \lambda < 0$) и центр $\lambda \in i\mathbb{R}$.

По теореме 5.3.24, решение уравнения имеет вид

$$z(t) = e^{\lambda t} z(0).$$

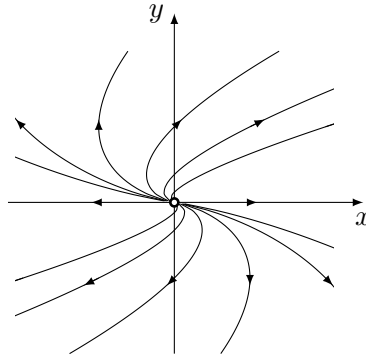
Поймем, как устроена траектория $z(t)$ этого векторного поля.

Будем считать, что $z(0) = 1$. Получим

$$e^{\lambda t} = e^{at+ibt} = e^{at}(\cos bt + i \sin bt). \quad (5.63)$$

Эта точка находится на расстоянии $r(t) = e^{at}$ от нуля, её полярный угол равен $\varphi(t) = bt$. Поэтому в полярных координатах траектория точки задаётся уравнением $r(\varphi) = e^{\frac{a}{b}\varphi}$. При $a \neq 0, b \neq 0$ это логарифмическая спираль с центром в нуле (такой фазовый портрет называется *фокусом*). Если $a = 0, b \neq 0$, это окружность (такой фазовый портрет называется *центром*).

При $a > 0$ траектории уходят на бесконечность при $t \rightarrow +\infty$ и стремятся к нулю при $t \rightarrow -\infty$; такой фокус называется отталкивающим. Если $a < 0$, траектории уходят на бесконечность при $t \rightarrow -\infty$ и стремятся к нулю при $t \rightarrow +\infty$. Такой фокус называется притягивающим.

Рис. 5.4: Отталкивающий жорданов узел $\dot{x} = \lambda x + y, \dot{y} = \lambda y$, где $\lambda > 0$

5.3.3.3 Случай, когда оператор A не имеет собственного базиса

Если собственные значения оператора A совпадают, у оператора ${}^{\mathbb{C}}A$ может не быть собственного базиса. Тогда в некотором базисе, который называется жордановым⁸, оператор записывается одной жордановой клеткой $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Здесь $\lambda \neq 0$, поскольку оператор невырожден.

Рассмотрим сначала систему, соответствующую жордановой клетке:

$$\dot{x} = \lambda x + y \quad (5.64)$$

$$\dot{y} = \lambda y. \quad (5.65)$$

Эта система легко решается. Решение второго уравнения имеет вид $y(t) = ce^{\lambda t}$; теперь решение первого уравнения можно найти с помощью метода вариации постоянной. Получаем $x(t) = de^{\lambda t} + cte^{\lambda t}$. Значит, фундаментальная система решений имеет вид

$$\varphi_1 = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \varphi_2 = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (5.66)$$

Фазовый портрет этой системы показан на рис.5.4 и называется *жорданов узел*. Лучи, входящие в ноль, соответствуют решению $\pm\varphi_1$. Как и для узла, фазовые кривые направлены от нуля при $\lambda > 0$ (отталкивающий жорданов узел) и к нулю — при $\lambda < 0$ (притягивающий жорданов узел).

Замечание 5.3.27 (Терминологическое замечание: жорданов узел.). *Следуя Пуанкаре, этот фазовый портрет называют вырожденный узел. Однако особая точка линейной системы, оператор которой невырожден, называется невырожденной особой точкой. Поэтому вырожденный узел — невырожденная особая точка. Чтобы устранить это несоответствие, мы предлагаем новый термин.*

⁸Мари Энмон Камиль Жордан (1838 – 1922) — математик, известный своим вкладом в теорию групп, алгебру, топологию и анализ.

5.3.4. (*) Другое определение экспоненты оператора

Пусть теперь оператор A записан в произвольном базисе, ξ^1, ξ^2 — его жорданов базис. В силу (5.66), фундаментальная система решений уравнения $\dot{x} = Ax$, $x \in \mathbb{R}^2$, имеет вид

$$\varphi_1 = e^{\lambda t} \xi^1; \quad \varphi_2 = e^{\lambda t} (t \xi^1 + \xi^2). \quad (5.67)$$

Фазовый портрет системы тоже называют жордановым узлом. Все компоненты решения уравнения в любом базисе являются линейными комбинациями экспоненты $e^{\lambda t}$ и функции $te^{\lambda t}$; этот факт можно использовать для качественного анализа поведения решений или для того, чтобы найти решение уравнения с неопределенными коэффициентами.

Замечание 5.3.28. Чтобы выписать фундаментальную систему решений (5.67), нужно сначала найти жорданов базис. В двумерном случае это делается совсем просто. В качестве второго базисного вектора возьмем любой вектор ξ^2 , кроме собственного. В качестве первого базисного вектора возьмем $\xi^1 := (A - \lambda E)\xi^2$.

Упражнение 97. Докажите, что в таком базисе ξ_1, ξ_2 матрица оператора A — жорданова клетка.

Указание: Характеристический многочлен оператора A равен $(x - \lambda)^2$. По формуле Гамильтона-Якоби, если подставить оператор в его характеристический многочлен, получим 0, то есть $(A - \lambda E)^2 = 0$.

Пользуясь этим, докажите, что вектор ξ^1 — собственный. Теперь $A\xi^1 = \lambda\xi^1$ и $A\xi^2 = \xi^1 + \lambda\xi^2$, поэтому в базисе ξ^1, ξ^2 матрица оператора A имеет вид $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Упражнение 98. На рис. 5.4 не изображен вырожденный случай, когда $\lambda = 0$. Как выглядит фазовый портрет в этом случае?

5.3.4 (*) Другое определение экспоненты оператора

Определение 5.3.29 (Новое определение экспоненты). Экспонентой комплексного оператора $A: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ называется предел

$$e^A = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(E + \frac{A}{k} \right)^k \quad (5.68)$$

Теорема 5.3.30. Новое определение экспоненты эквивалентно старому.

В курсе математического анализа доказывается одномерный аналог этой теоремы:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{k} \right)^k = e^x$$

для вещественного числа x . В следующем разделе мы докажем аналог этого утверждения для комплексного числа x , а затем — теорему 5.3.30.

5.3.4.1 Формула Эйлера как предельный случай формулы Муавра

Для комплексного числа $z = x + iy$ экспоненту можно определять с помощью формулы Эйлера: $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ (формула Эйлера). Но можно по аналогии с вещественным случаем определить $e^z = \lim_{k \rightarrow \infty} (1 + \frac{z}{k})^k$. Мы докажем, что эти определения эквивалентны.

Предложение 5.3.31. *Положим $e^z = \lim_{k \rightarrow \infty} (1 + \frac{z}{k})^k$. Тогда выполнена формула Эйлера: если $z = x + iy$, то $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$.*

Доказательство. Мы докажем следующие асимптотические оценки для модуля и аргумента числа $(1 + \frac{z}{k})^k$.

$$\left| \left(1 + \frac{z}{k}\right)^k \right| = \left(1 + \frac{x}{k} + o\left(\frac{1}{k}\right)\right)^k \quad (5.69)$$

$$\arg \left(1 + \frac{z}{k}\right)^k = y + o(1) \quad (5.70)$$

при $k \rightarrow \infty$. Из этих соотношений сразу следует предложение: действительно, как известно из курса математического анализа,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{k} + o\left(\frac{1}{k}\right)\right)^k = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{k}\right)^k (1 + o(1)) = e^x,$$

поэтому в силу (5.69) модуль числа $(1 + \frac{z}{k})^k$ стремится к e^x ; из (5.70) следует, что аргумент этого числа стремится к y . Поэтому $\lim_{k \rightarrow \infty} (1 + \frac{z}{k})^k = e^x(\cos y + i \sin y)$, что и требовалось.

Осталось проверить соотношения (5.69), (5.70). По формуле Муавра⁹, модуль числа $(1 + \frac{z}{k})^k$ равен $\left|1 + \frac{z}{k}\right|^k$. Заметим, что

$$\left|1 + \frac{z}{k}\right| = \sqrt{\left(1 + \frac{x}{k}\right)^2 + \frac{y^2}{k^2}}$$

Вспомним, что ряд Тейлора для квадратного корня имеет вид

$$\sqrt{1+u} = 1 + \frac{u}{2} + O(u^2)$$

В данном случае, положив $u = \frac{2x}{k} + \frac{x^2}{k^2} + \frac{y^2}{k^2}$, получим $\left|1 + \frac{z}{k}\right|^k = \left(1 + \frac{x}{k} + o\left(\frac{1}{k}\right)\right)^k$, что и требовалось.

Далее, аргумент числа $(1 + \frac{z}{k})^k$ равен $k \arg \left(1 + \frac{z}{k}\right)$. Пусть угол α — полярный угол точки $\left(1 + \frac{z}{k}\right) = \left(1 + \frac{x}{k}, \frac{y}{k}\right)$, тогда

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{y}{k}}{1 + \frac{x}{k}} = \frac{y}{k} + o\left(\frac{1}{k}\right)$$

⁹Абрахам де Муавр (1667 – 1754) – математик, известный своими работами по теории вероятностей. Автор формулы, носящей его имя, и формулы для общего члена ряда Фибоначчи.

5.3.4. (*) Другое определение экспоненты оператора

Так как $\operatorname{tg} \alpha \sim \alpha$ при $\alpha \rightarrow 0$, получаем

$$\alpha = \operatorname{arctg} \left(\frac{y}{k} + o \left(\frac{1}{k} \right) \right) = \frac{y}{k} + o \left(\frac{1}{k} \right)$$

откуда $\operatorname{arg} \left(1 + \frac{z}{k} \right)^k = k\alpha = y + o(1)$. Мы проверили формулы (5.69), (5.70).

Так как

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{k} + o \left(\frac{1}{k} \right) \right)^k = e^x,$$

мы получаем, что $\left(1 + \frac{z}{k} \right)^k$ стремится к комплексному числу с модулем e^x и аргументом y , то есть к $e^x(\cos y + i \sin y)$, что и требовалось. \square

5.3.4.2 Эквивалентность двух определений экспоненты

Докажем теорему 5.3.30. Достаточно доказать, что

$$\Delta_k(A) = \left(E + A + \dots + \frac{A^k}{k!} \right) - \left(E + \frac{A}{k} \right)^k \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty.$$

В случае $n = 1$, $A = a$ это утверждение доказано в курсе анализа:

$$\delta_k(a) = \left(1 + a + \dots + \frac{a^k}{k!} \right) - \left(1 + \frac{a}{k} \right)^k \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty.$$

Пусть $\|A\| =: a$, c_j — коэффициент при A^j в сумме $\Delta_k(A)$: $\Delta_k(A) = \sum_{j=0}^k c_j A^j$. Заметим, что он совпадает с коэффициентом при a^j в сумме $\delta_k(a)$.

Сначала приведем **неправильное доказательство**. Пользуясь неравенством $\|A^j\| \leq \|A\|^j = a^j$, оценим

$$\|\Delta_k(A)\| = \left\| \sum_{j=0}^k c_j A^j \right\| \leq \sum_{j=0}^k c_j a^j = \delta_k(a) \quad (5.71)$$

По доказанному в курсе анализа, $\delta_k(a)$ стремится к нулю.

Где ошибка?

В этом рассуждении есть ошибка: в оценке (5.71) вместо $|c_j|$ мы написали c_j . Но на самом деле, $c_j \geq 0$, поэтому рассуждение правильно.

Лемма 5.3.32. Коэффициенты c_j неотрицательны.

Доказательство. Выпишем явную формулу для c_j :

$$c_j = \frac{1}{j!} - C_k^j \frac{1}{k^j}$$

5 *Линейные уравнения и системы*

где C_k^j — биномиальные коэффициенты:

$$C_k^j = \frac{k!}{j!(k-j)!}$$

Преобразуем:

$$c_j = \frac{1}{j!} \left(1 - \frac{k!}{(k-j)!k^j} \right) = \frac{1}{j!} (1 - b_{kj}),$$

где

$$b_{kj} = \frac{k(k-1) \cdot (k-j+1)}{k^j} \leq 1$$

Поэтому $c_j \geq 0$, что и требовалось доказать. □

5.3.5 Вычисление экспоненты оператора в общем случае

В этом параграфе описан алгоритм вычисления экспоненты любого линейного оператора. Начнем с простейшего случая.

5.3.5.1 Случай вещественного собственного базиса

Пусть собственные векторы оператора A образуют базис в \mathbb{R}^n . Заметим, что если у оператора A есть n вещественных различных собственных значений, то у него всегда есть вещественный собственный базис.

Лемма 5.3.33. *Если ξ — собственный вектор оператора A с собственным значением λ , то $e^A \xi = e^\lambda \xi$.*

Доказательство. Мы выпишем ряд для экспоненты и посмотрим, как члены этого ряда действуют на вектор ξ :

$$e^A \xi = \left(E + A + \dots + \frac{A^k}{k!} + \dots \right) \xi = \xi + \lambda \xi + \dots + \frac{\lambda^k}{k!} \xi + \dots = e^\lambda \xi.$$

□

Следствие 5.3.34. *Пусть оператор A имеет вещественный собственный базис ξ^1, \dots, ξ^n с собственными значениями $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Тогда матрица оператора e^A в этом базисе диагональная, с коэффициентами e^{λ_j} на диагонали.*

Как вычислить $e^A x$ для произвольного вектора x ? Нужно разложить вектор x по собственным векторам и воспользоваться линейностью оператора A :

$$x = \sum_{j=1}^n c_j \xi^j \quad \Rightarrow \quad e^A x = \sum_{j=1}^n c_j e^A \xi^j = \sum_{j=1}^n c_j e^{\lambda_j} \xi^j. \quad (5.72)$$

Как теперь найти матрицу оператора e^A в каком-нибудь другом базисе f^1, \dots, f^n ? Заметим, что j -й столбец любой матрицы — это координаты образа j -го базисного вектора, поэтому достаточно вычислить $e^A f^j$, $j = 1, 2, \dots, n$ по формуле (5.72) и записать по столбцам матрицы.

Можно, конечно, поступить иначе: найти матрицу оператора e^A в собственном базисе ξ^1, \dots, ξ^n (эта матрица диагональная, на её диагонали стоят числа $e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}$), а потом перейти в другой базис (f^1, \dots, f^n) . Результат будет таким же.

Следствие 5.3.35. *Пусть оператор A имеет вещественный собственный базис ξ^1, \dots, ξ^n с собственными значениями $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Пусть начальное условие x_0 имеет координаты (c_1, \dots, c_n) в собственном базисе, то есть $x_0 = \sum_{j=1}^n c_j \xi^j$. Тогда решение уравнения $\dot{x} = Ax$ с начальным условием $x(0) = x_0$ имеет вид*

$$x(t) = \sum_{j=1}^n c_j e^{\lambda_j t} \xi^j.$$

Итак, все координаты решения линейного уравнения в случае вещественного собственного базиса — линейные комбинации экспонент $e^{\lambda_j t}$, где λ_j — собственные значения оператора A .

5.3.5.2 Случай комплексного собственного базиса

В этом разделе мы научимся вычислять экспоненту от оператора в случае, когда он имеет комплексный собственный базис. Для этого нам понадобится комплексифицировать оператор, см. параграф 5.3.2.

Определение 5.3.36. Говорят, что у оператора A есть комплексный собственный базис, если у оператора ${}^{\mathbb{C}}A$ есть базис из (комплексных) собственных векторов.

Лемма 5.3.37. Пусть у оператора A есть комплексный собственный базис $(\xi^1, \dots, \xi^n) \subset \mathbb{C}^n$ с собственными значениями $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Тогда экспонента ${}^{\mathbb{C}}e^A$ в этом базисе имеет диагональную матрицу с коэффициентами $(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$.

Доказательство. Повторим выкладку из леммы 5.3.33 для оператора ${}^{\mathbb{C}}A$. Мы получим, что $e^{{}^{\mathbb{C}}A}$ имеет диагональную матрицу с коэффициентами $(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$ в собственном базисе. По предложению 5.3.25 параграфа 5.3.2, $e^{{}^{\mathbb{C}}A} = {}^{\mathbb{C}}e^A$, что и требовалось. \square

Теперь мы можем найти матрицу экспоненты ${}^{\mathbb{C}}e^A$ и в любом другом базисе в \mathbb{C}^n . Так как мы знаем комплексификацию экспоненты ${}^{\mathbb{C}}e^A$, мы можем вычислить и саму экспоненту e^A : ведь на пространстве $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$ они действуют одинаково, поэтому в любом вещественном базисе матрицы операторов ${}^{\mathbb{C}}e^A$ и e^A одинаковы.

Следствие 5.3.38. Пусть оператор A имеет комплексный собственный базис ξ^1, \dots, ξ^n . Пусть начальное условие $x_0 \in \mathbb{R}^n$ имеет (комплексные) координаты (c_1, \dots, c_n) в собственном базисе, то есть $x_0 = \sum_{j=1}^n c_j \xi^j$. Тогда решение уравнения $\dot{x} = Ax$ с начальным условием x_0 (в \mathbb{R}^n) имеет вид

$$x(t) = \sum_{j=1}^n c_j e^{\lambda_j t} \xi^j.$$

Доказательство. Заметим, что ${}^{\mathbb{C}}e^{At} x_0 = \sum c_j e^{\lambda_j t} \xi^j$ по лемме 5.3.37. Однако вектор $e^{At} x_0$ вещественный, так как вектор x_0 вещественный и экспонента вещественного оператора вещественна; значит, $e^{At} x_0 = {}^{\mathbb{C}}e^{At} x_0$. Итак, $e^{At} x_0 = \sum c_j e^{\lambda_j t} \xi^j$. \square

Заметим, что числа λ_j и коэффициенты c_j могут быть комплексными, но сумма будет вещественной. Так как $e^{\lambda t} = e^{t \operatorname{Re} \lambda} (\cos t \operatorname{Im} \lambda + i \sin t \operatorname{Im} \lambda)$, то компоненты решения будут линейными комбинациями функций вида $e^{t \operatorname{Re} \lambda_j} \cos t \operatorname{Im} \lambda_j$, $e^{t \operatorname{Re} \lambda_j} \sin t \operatorname{Im} \lambda_j$.

Пример 5.3.39. Комплексифицированный поворот (см. пример 5.3.18) в собственном базисе $((1, i), (1, -i))$ имеет диагональную матрицу $\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$, поэтому экспонента e^{At} имеет матрицу $\begin{pmatrix} e^{-it} & 0 \\ 0 & e^{it} \end{pmatrix}$. Это значит, что вектор $(1, i)$ она переводит в вектор $e^{-it}(1, i)$, а вектор $(1, -i)$ — в вектор $e^{it}(1, -i)$. По линейности, вектор $(1, 0) = \frac{1}{2}(1, i) + \frac{1}{2}(1, -i)$ переходит в

$$\left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, -i \frac{e^{it} - e^{-it}}{2} \right) = (\cos t, \sin t),$$

5.3.5. Вычисление экспоненты оператора в общем случае

а вектор $(0, 1)$ — в $(-\sin t, \cos t)$.

Так что $\exp t \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$. Это полностью согласуется с тем, что поток векторного поля $v(x, y) = (-y, x)$ за время t — поворот на угол t (см. раздел 4.3.5).

5.3.5.3 Экспонента жордановой клетки и общий случай

Нам понадобится следующая теорема из курса линейной алгебры:

Теорема 5.3.40. *Для любого оператора $A: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ существует жорданов базис — базис, в котором матрица оператора имеет блочно-диагональный вид:*

$$J_A = \begin{pmatrix} J_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J_2 & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & J_m \end{pmatrix}$$

где по диагонали стоят жордановы клетки $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

Понятно, что экспонента от жордановой нормальной формы имеет вид

$$e^{J_A} = \begin{pmatrix} e^{J_1} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & e^{J_2} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & e^{J_m} \end{pmatrix}$$

Теперь достаточно вычислить экспоненту от жордановой клетки. Жорданову клетку можно представить в виде $\lambda E + N$, где E — единичный оператор,

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

— нильпотентный оператор.

Мы применим формулу для экспоненты суммы коммутирующих операторов: $e^{A+B} = e^A e^B$, если $AB = BA$ (см. теорему 5.3.14). Заметим, что оператор λE коммутирует с любым оператором. Поэтому $e^J = e^{\lambda E + N} = e^{\lambda E} \cdot e^N$. Ясно, что $e^{\lambda E}$ — это оператор умножения на e^λ .

Под действием оператора N каждый базисный вектор переходит в предыдущий: $e^l \mapsto \dots \mapsto e^2 \mapsto e^1 \mapsto 0$. Поэтому $N^l = 0$ (это и означает, что оператор N нильпотентен). Получаем

$$e^N = E + N + \dots + \frac{N^{l-1}}{(l-1)!} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \dots & \frac{1}{(l-1)!} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{(l-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & \frac{1}{(l-3)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Заодно выпишем e^{Nt} , так как для решения линейных уравнений нам нужны выражения вида e^{At} :

$$e^{Nt} = E + Nt + \dots + \frac{N^{l-1}t^{l-1}}{(l-1)!} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \frac{t^3}{6} & \dots & \frac{t^{l-1}}{(l-1)!} \\ 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2} & \dots & \frac{t^{l-2}}{(l-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{l-3}}{(l-3)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & \ddots & t \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.73)$$

Значит,

$$e^{Jt} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \dots & \frac{t^{l-1}}{(l-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (5.74)$$

Мы получили формулу для экспоненты от жордановой клетки, то есть выяснили, как действует оператор e^{At} на жорданов базис. Это позволяет выяснить, какую матрицу он имеет в любом другом базисе.

В общем случае, чтобы вычислить экспоненту оператора в данном базисе (f^1, \dots, f^n) , нужно найти жорданов базис (e^1, \dots, e^n) и жорданову нормальную форму оператора, воспользоваться формулой для экспоненты жордановой клетки, а потом вернуться из жорданова базиса в исходный.

Предложение 5.3.41. Пусть оператор A имеет жорданов базис

$$\xi^{11}, \dots, \xi^{1n_1}, \xi^{21}, \dots, \xi^{2n_2}, \dots$$

(вещественный или комплексный). Здесь векторы ξ^{jm} , $m = 1, 2, \dots, n_j$, соответствуют j -й жордановой клетке, которая имеет размер n_j .

Тогда решение уравнения $\dot{x} = Ax$ с начальным условием $x(0) = \xi^{jm}$ имеет вид

$$x(t) = e^{\lambda_j t} (\xi^{jm} + t\xi^{j(m-1)} + \frac{t^2}{2!}\xi^{j(m-2)} + \dots + \frac{t^m}{m!}\xi^1) \quad (5.75)$$

5.3.5. Вычисление экспоненты оператора в общем случае

Решение уравнения с любым начальным условием является линейной комбинацией таких решений.

Доказательство. Действительно, напомним, что оператор e^{At} сохраняет пространство, натянутое на векторы $(\xi^{jm}, m = 1, 2, \dots, n_j)$, и его матрица в этом базисе — экспонента жордановой клетки e^{Jt} , см. (5.74). Координаты вектора $e^{At}\xi^{jm}$ записаны по столбцам такой матрицы, значит, они равны $\frac{t^s}{s!}e^{\lambda_j t}$, $s = m, m-1, \dots, 0$. Отсюда следует формула 5.75. \square

Следствие 5.3.42. Если жорданова форма оператора A состоит из клеток с собственными значениями $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ размеров n_1, n_2, \dots, n_k , то координаты решения уравнения $\dot{x} = Ax$ — линейные комбинации выражений вида $p_k(x)e^{\operatorname{Re} \lambda_k t} \sin \operatorname{Im} \lambda_k t$ и $p_k(x)e^{\operatorname{Re} \lambda_k t} \cos \operatorname{Im} \lambda_k t$; степень многочлена p_k не больше, чем $n_k - 1$, где n_k — размер наибольшей жордановой клетки, соответствующей λ_k .

Размер наибольшей жордановой клетки, соответствующей собственному значению λ оператора A , также называют *геометрической кратностью* λ как собственного значения A , в отличие от обычной (*алгебраической*) кратности.

5.3.5.4 Еще раз об уравнениях высших порядков

Как мы отмечали выше, уравнения высших порядков, которые мы рассматривали в разделе 5.2, сводятся к системам линейных уравнений с операторами специального вида

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}. \quad (5.76)$$

Характеристический многочлен уравнения совпадает с характеристическим многочленом оператора A , а его корни являются собственными значениями оператора A (с сохранением кратности).

Следствие 5.3.42 для уравнений высших порядков превращается в утверждение предложения 5.2.17, с единственным отличием: в следствии 5.3.42 степень многочленов p_k на 1 меньше *геометрической* кратности собственного значения, а в предложении 5.2.17 — *алгебраической* кратности. Оказывается, что для оператора вида (5.76) геометрическая и алгебраическая кратность любого собственного значения одинаковы. Поэтому заключения следствия 5.3.42 и предложения 5.2.17 совпадают.

Лемма 5.3.43. Для оператора (5.76) геометрическая и алгебраическая кратность любого собственного значения одинаковы.

Доказательство. Пусть λ — собственное значение оператора A . Соответствующий собственный вектор находится из системы уравнений $A\xi = \lambda\xi$; из первых $n-1$ уравнений системы следует, что собственный вектор равен $(1, \lambda, \lambda^2, \dots, \lambda^{n-1})$ с точностью до пропорциональности.

5 *Линейные уравнения и системы*

Наличие двух жордановых клеток с собственным значением λ означало бы наличие двух линейно независимых собственных векторов с собственным значением λ , поскольку у каждой жордановой клетки есть собственный вектор. Значит, собственному значению λ соответствует только одна жорданова клетка, и её размер равен алгебраической кратности λ . \square

5.3.6 Линейные системы со специальной правой частью

Результаты, которые мы докажем в этом разделе, соответствуют результатам раздела 5.2.5 для уравнений высших порядков.

Мы рассмотрим неоднородные линейные системы, однородная часть которых автономна:

$$\dot{x} = Ax + b(t).$$

Так как соответствующее однородное уравнение мы уже умеем решать, решение неоднородного уравнения всегда можно найти методом вариации постоянных, см. раздел 5.1.5. Метод вариации постоянных дает ответ в виде интеграла, и поведение найденного решения бывает трудно исследовать, пока интеграл не взят. Мы рассмотрим здесь частный случай, когда неоднородный член $b(t)$ равен сумме (векторных) квазимногочленов. В этом случае решение можно найти методом неопределенных коэффициентов, причем поведение решения легко исследовать до того, как эти коэффициенты найдены.

5.3.6.1 Векторные квазимногочлены

Напомним определение квазимногочлена, см. раздел 5.2.5.

Определение 5.3.44. *Квазимногочленом* (над \mathbb{C}) называется произведение многочлена на экспоненту

$$f(t) = e^{\lambda t} p(t).$$

Число λ называется *показателем* квазимногочлена, а степень многочлена p — *степенью* квазимногочлена.

Определение 5.3.45. *Векторным квазимногочленом* (над \mathbb{C}) называется произведение *скалярной* экспоненты на векторный многочлен:

$$f(t) = e^{\lambda t} P(t), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad (5.77)$$

где

$$P(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k, \quad a_k \in \mathbb{C}^n.$$

5.3.6.2 Нерезонансный случай

Напомним, что общее решение линейной неоднородной системы — это сумма общего решения однородной системы и частного решения неоднородной системы (предложение 5.1.23); поэтому достаточно найти одно частное решение уравнения

$$\dot{x} = A(t)x + f(t), \quad (5.78)$$

где f — векторный квазимногочлен.

Определение 5.3.46. Уравнение (5.78) называется *резонансным*, если показатель векторного квазимногочлена f является собственным значением оператора A , и *нерезонансным* в противном случае.

Теорема 5.3.47. *Нерезонансное уравнение (5.78) имеет частное решение, которое является векторным квазимногочленом той же степени и с тем же показателем, что и векторный квазимногочлен f в правой части.*

Эта теорема позволяет искать частное решение уравнения (5.78) с неопределенными коэффициентами. До того, как решение найдено, можно многое сказать о его поведении.

Доказательство. Пусть λ — показатель квазимногочлена f , а m — его степень.

На пространстве векторных квазимногочленов с показателем λ рассмотрим отображение L , заданное формулой:

$$L: h \mapsto \frac{d}{dt}h - Ah.$$

Образ векторного квазимногочлена с показателем λ — снова векторный квазимногочлен с тем же показателем. Решение неоднородного уравнения (5.78) — это прообраз векторного квазимногочлена f под действием L ; нам надо доказать, что такой прообраз существует. Вместо этого мы сразу докажем, что L — изоморфизм.

Пусть $h = e^{\lambda t}P$, $\deg P = m$. Тогда

$$Lh = e^{\lambda t}(\dot{P} + \lambda P - AP).$$

Определим отображение \mathcal{L} на пространстве векторных многочленов степени не выше m :

$$\mathcal{L}P = \dot{P} + \lambda P - AP. \quad (5.79)$$

Отображения L и \mathcal{L} являются или не являются изоморфизмами одновременно. Отображение \mathcal{L} линейно и отображает пространство векторных многочленов степени не выше m в себя. Чтобы доказать, что \mathcal{L} — изоморфизм, достаточно доказать, что ядро \mathcal{L} равно нулю. Это следует из предложения:

Предложение 5.3.48. *Отображение \mathcal{L} сохраняет степень векторного многочлена.*

Из предложения немедленно получаем, что $\text{Ker } \mathcal{L} = 0$ (ненулевой многочлен сохраняет степень и, следовательно, не может перейти в ноль). Отсюда следует, что \mathcal{L} — изоморфизм. \square

Доказательство предложения. Пусть P — векторный многочлен, at^m — его старший член с векторным коэффициентом a . Имеем

$$\mathcal{L}(at^m) = amt^{m-1} + bt^m,$$

где

$$b = (\lambda E - A)a.$$

Так как λ не является собственным значением оператора A , оператор $A - \lambda E$ невырожден, $\text{Ker}(A - \lambda E) = 0$; поэтому вектор b ненулевой. Отображение \mathcal{L} не повышает степень, поэтому младшие члены P не дадут монома степени m . Значит, у $\mathcal{L}P$ старший моном равен bt^m и имеет степень m . □

5.3.6.3 Резонансный случай

В резонансном случае частное решение является квазимногочленом с тем же показателем, что и квазимногочлен в правой части, но степень его может быть выше.

Теорема 5.3.49. *Резонансное уравнение (5.78) имеет частное решение, которое является векторным квазимногочленом с тем же показателем λ , что и векторный квазимногочлен f в правой части. Степень частного решения не превосходит $\deg f + k$, где k — размер максимальной жордановой клетки оператора A с собственным значением λ .*

Доказательство. Пусть \mathcal{L} — тот же оператор (5.79), что и выше. Нам нужно доказать, что для любого векторного многочлена Q степени t уравнение

$$\mathcal{L}P = Q \tag{5.80}$$

имеет решение степени не выше $\deg Q + k$, где k то же, что в теореме 5.3.49.

Для решения уравнения (5.80) выберем в пространстве \mathbb{R}^n в качестве базиса жорданов базис оператора A (если A имеет комплексный жорданов базис, будем работать в пространстве \mathbb{C}^n). Тогда уравнение

$$\mathcal{L}P \equiv \dot{P} + (\lambda E - A)P = Q \tag{5.81}$$

распадается на подсистемы, соответствующие жордановым клеткам оператора A . Мы будем смотреть только на самую большую клетку — клетку размера $k \times k$; из рассуждения будет видно, что в других подсистемах степень P будет еще ниже.

Возьмем инвариантное подпространство Λ оператора A , соответствующее клетке $k \times k$, и пусть e^1, \dots, e^k — базис, в котором ограничение A на это подпространство имеет матрицу

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \lambda & 1 \\ 0 & \cdot & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

Заметим, что в базисе e^1, \dots, e^k оператор $A - \lambda E$ имеет вид:

$$J - \lambda E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 & 1 \\ 0 & \cdot & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Поэтому на подпространстве Λ уравнение (5.81) примет вид:

$$\begin{cases} \dot{P}_1 = P_2 + Q_1 \\ \dot{P}_2 = P_3 + Q_2 \\ \dots \\ \dot{P}_k = Q_k \end{cases}$$

где Q_1, \dots, Q_k — компоненты векторного многочлена Q в базисе e^1, e^2, \dots, e^k , а P_1, \dots, P_k — компоненты P в этом же базисе.

Такая система решается интегрированием, начиная с последней строки. Каждый раз интегрируется многочлен, и степень при интегрировании повышается на 1:

$$\begin{aligned} \deg P_k &\leq \deg Q_k + 1 \leq m + 1 \\ \deg P_{k-1} &\leq \deg(P_k + Q_{k-1}) + 1 \leq m + 2, \\ &\dots \\ \deg P_1 &\leq m + k. \end{aligned}$$

Это доказывает теорему. □

Замечание 5.3.50. Для уравнений высших порядков две предыдущие теоремы превращаются в теоремы 5.2.22 и 5.2.25. Для теоремы 5.3.47 это очевидно; для теоремы 5.3.49 следует заметить, что у систем, которые получаются из уравнений высших порядков, каждому собственному значению соответствует только одна жорданова клетка (лемма 5.3.43). Поэтому размер максимальной жордановой клетки оператора A с собственным значением λ равен кратности числа λ как корня характеристического многочлена.

5.3.6.4 Метод комплексных амплитуд

В разделе 5.2.5 мы уже заметили, что произведения $p(t)e^{at} \sin bt$ и $q(t)e^{at} \cos bt$, где p, q — многочлены, являются вещественными частями комплексных квазимногочленов. Это позволяет решить уравнение $\dot{x} = Ax + f(t)$, для которого $f(t)$ — произведение векторного квазимногочлена на синус или косинус. Для уравнений высших порядков этот метод был изложен в 5.2.6.

Пусть g — векторный квазимногочлен с показателем $\alpha \in \mathbb{R}$ и вещественными коэффициентами, $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — линейный оператор. Пусть $z_{\text{част}}$ — частное решение уравнения

$$\dot{z} = Az + g(t)e^{i\beta t}.$$

Показатель квазимногочлена в правой части равен $\alpha + i\beta$. Тогда вещественная и мнимая часть левой и правой части равенства совпадают, поэтому

$$x_{\text{част}} = \operatorname{Re} z_{\text{част}} \quad \text{и} \quad y_{\text{част}} = \operatorname{Im} z_{\text{част}}$$

5.3.6. *Линейные системы со специальной правой частью*

— частные решения уравнений

$$\dot{x} = Ax + g(t) \cos \beta t \quad \text{и} \quad \dot{y} = Ay + g(t) \sin \beta t.$$

5.4 Малые колебания и фигуры Лиссажу

5.4.1 Пример: шарик в чашке

В этом разделе мы изучим уравнение малых колебаний, которое применяют для описания движения систем вблизи их положений равновесия. В качестве примера рассмотрим движение шарика без трения по дну чашки, форма которой задаётся графиком гладкой функции с единственным минимумом в нуле. Обозначим эту функцию G .

Пусть $x = (x_1, x_2)$ — проекция положения шарика на горизонтальную плоскость. Когда $x = (0, 0)$, $\dot{x} = (0, 0)$, шарик находится в равновесии.

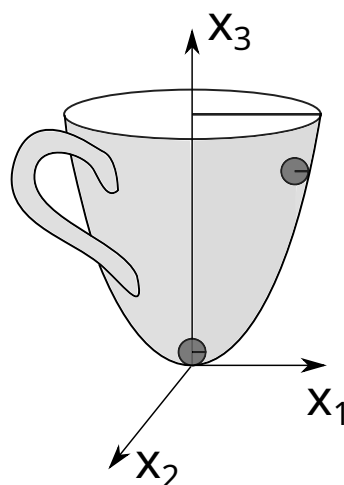


Рис. 5.5: Шарик в чашке

Вблизи точки $(0, 0)$, с точностью до малых членов, которыми мы пренебрегаем, уравнение движения шарика имеет вид

$$\ddot{x} = -\operatorname{grad} G(x). \quad (5.82)$$

Разложение G в ряд Тейлора начинается с квадратичных членов, так как эта функция имеет минимум в нуле. Отбрасывая старшие члены, будем считать, что G — квадратичная форма, то есть $G(x) = \frac{1}{2}(Ax, x)$ для некоторой симметричной положительно определённой¹⁰ матрицы A . Тогда уравнение примет вид

$$\ddot{x} = -Ax. \quad (5.83)$$

Упражнение 99. Проверьте, что уравнение (5.82) для $G(x) = \frac{1}{2}(Ax, x)$ принимает вид (5.83).

¹⁰Если функция G имеет минимум в нуле, то квадратичные члены её ряда Тейлора в нуле всегда задаются *неотрицательно* определённой матрицей. Мы будем считать, что эта матрица положительно определена.

5.4.2. Уравнение малых колебаний и фигуры Лиссажу

Это уравнение (в любой размерности, для любой симметричной положительно определённой матрицы A) называется *уравнением малых колебаний*.

5.4.2 Уравнение малых колебаний и фигуры Лиссажу

Решим уравнение малых колебаний.

Напомним, что у симметричного знакоопределённого оператора всегда есть ортогональный собственный базис. Пусть ξ^1, \dots, ξ^n – ортогональный собственный базис оператора A , λ_j – соответствующие собственные значения A . Тогда $\lambda_j > 0$, так как оператор A положительно определен; положим $\lambda_j = \omega_j^2$.

Перейдем в базис ξ^1, \dots, ξ^n . Система (5.83) примет вид $\ddot{y} = -\Lambda y$, где $\Lambda = \text{diag}(\omega_1^2, \dots, \omega_n^2)$. Получим n уравнений вида

$$\ddot{y}_j = -\omega_j^2 y_j;$$

их решения имеют вид

$$y_j = a_j \sin \omega_j t + b_j \cos \omega_j t.$$

Итак, общее решение уравнения малых колебаний имеет вид

$$x(t) = \sum_{j=1}^n \xi^j (a_j \sin \omega_j t + b_j \cos \omega_j t). \quad (5.84)$$

Определение 5.4.1. Кривая $x(t)$, удовлетворяющая уравнению (5.84) для $n = 2$, называется *фигурой Лиссажу*¹¹ (см. рис. 5.6).

Для движения шарика в чашке мы имеем $n = 2$, поэтому кривая, по которой движется проекция шарика на горизонтальную плоскость, — фигура Лиссажу.

Упражнение 100. Рассмотрим уравнение $\ddot{x} = -Ax$, где $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Найти решение с начальным условием $x(0) = e^1$, $\dot{x}(0) = 0$.

Решение. Сначала найдём собственные числа и собственные векторы оператора A . Легко убедиться, что собственные векторы имеют вид $\xi^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\xi^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, а соответствующие собственные значения равны 1 и 4.

Таким образом, решение имеет вид $x(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} (a_1 \sin t + b_1 \cos t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} (a_2 \sin 2t + b_2 \cos 2t)$.

Осталось подобрать a_1, a_2, b_1, b_2 так, чтобы решение удовлетворяло начальным условиям. Из условия $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ мы заключаем, что $b_1 + b_2 = 1$, $b_1 - b_2 = 0$, то есть $b_1 = b_2 = \frac{1}{2}$; из условия $\dot{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ мы получаем, что $a_1 + 2a_2 = -a_1 + 2a_2 = 0$, то есть $a_1 = a_2 = 0$. Итак, $x(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos t + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos 2t$.

В базисе $\frac{1}{2}\xi^1, \frac{1}{2}\xi^2$ решение имеет вид $(\cos t, \cos 2t)$. Так как $\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$, кривая $x(t)$ лежит на параболе $y = 2x^2 - 1$; решение $x(t)$ проходит участок такой параболы, соответствующий $-1 < x < 1$, за время π , а потом движется обратно (ср. с рис. 5.6, третий рисунок в первой строке). В исходном базисе $e^1 = \frac{1}{2}\xi^1 + \frac{1}{2}\xi^2$, $e^2 =$

¹¹Жюль Антуан Лиссажу (1822 – 1880) — физик, известный работами по оптике и акустике.

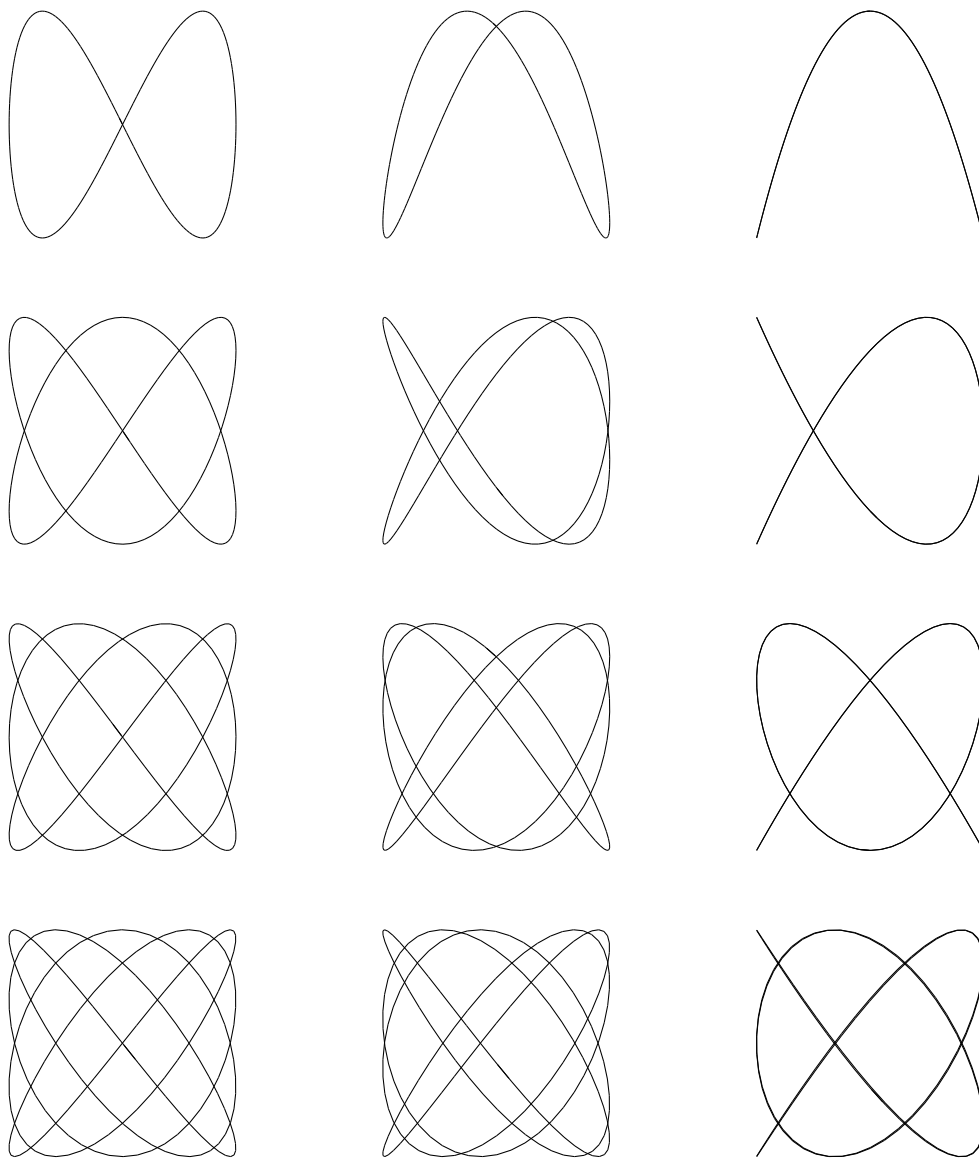


Рис. 5.6: Фигуры Лиссажу с отношением $\omega_1/\omega_2 = 1/2$ (первая строчка), $\omega_1/\omega_2 = 2/3$ (вторая строчка), $\omega_1/\omega_2 = 3/4$ (третья строчка), $\omega_1/\omega_2 = 4/5$ (четвертая строчка)

$\frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{2}\xi^1$ решение будет двигаться вдоль параболы, повернутой на угол $\pi/4$ (см. рис. 5.7).

Движение шарика в чашке оказывается периодическим с периодом 2π . \square

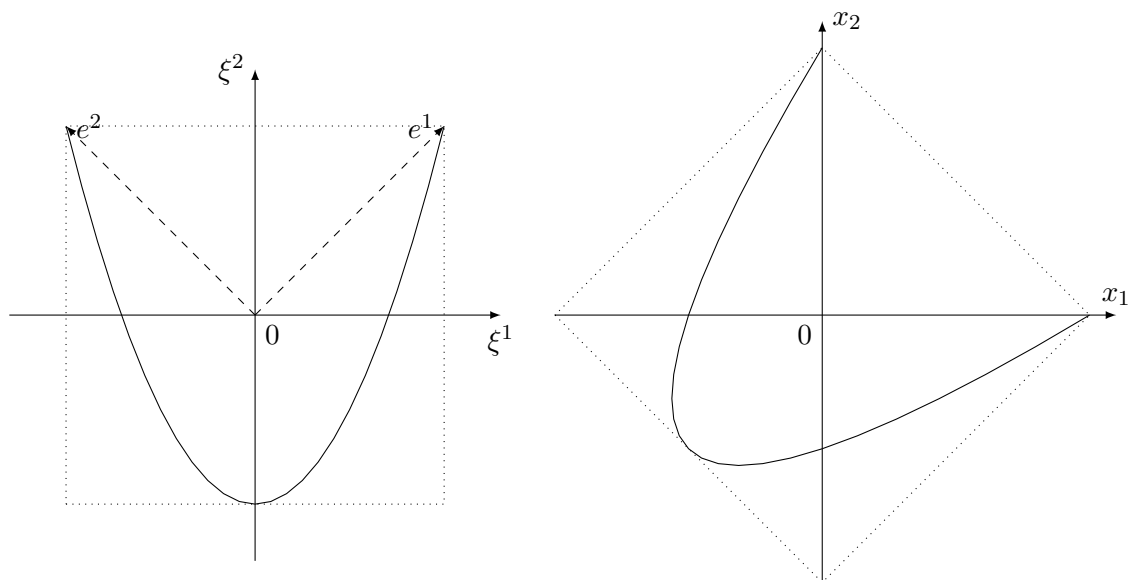


Рис. 5.7: Решение уравнения (5.83) с матрицей A в собственном базисе ξ^1, ξ^2 и в исходных координатах x_1, x_2 .

5.4.3 Переход на тор

В предыдущем примере решение $x(t)$ получалось периодическим. Будет ли $x(t)$ периодическим в общем случае?

Запишем решение уравнения (5.83) в виде

$$x(t) = \sum_{j=1}^n \xi^j a_j \sin(\omega_j t + \alpha_j)$$

Значения a_j, α_j определяются из начальных условий, значения ω_j зависят от уравнения.

Пусть $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ — фактор-множество прямой \mathbb{R} по следующему отношению эквивалентности: $\tau \sim \tau + 2\pi n$ для любого целого n . Множество $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ можно представлять себе как отрезок $[0, 2\pi]$ со склеенными концами; с топологической точки зрения, это окружность. В дальнейшем мы будем обозначать эту окружность S^1 . Класс эквивалентности точки $\tau \in \mathbb{R}$ обозначается $(\tau \bmod 2\pi) \in S^1$.

Значения функции \sin одинаковы в точках, отличающихся добавлением 2π . Поэтому функция \sin корректно определена на окружности S^1 . Введем отображение

5 Линейные уравнения и системы

$\phi_j: \mathbb{R} \rightarrow S^1$, переводящее t в точку $(\omega_j t + \alpha_j) \pmod{2\pi}$. Тогда

$$x(t) = \sum_{j=1}^n \xi^j a_j \sin(\phi_j(t)),$$

то есть $x(t)$ есть функция от $\phi_1(t), \dots, \phi_n(t)$.

Для простоты положим $n = 2$. Чтобы выяснить, периодична ли функция $x(t)$, достаточно определить, периодична ли вектор-функция $\varphi(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t))$. Так как значения $\phi_1(t), \phi_2(t)$ лежат на окружности, значения $\varphi(t)$ будут лежать на произведении двух окружностей — на двумерном торе $T^2 = S^1 \times S^1 = \mathbb{R}^2/2\pi\mathbb{Z}^2$;

$$\varphi(t) = (\omega_1 t + \alpha_1, \omega_2 t + \alpha_2) \pmod{2\pi\mathbb{Z}^2}.$$

Заметим, что функция $\varphi(t)$ есть решение уравнения на торе

$$\dot{\varphi} = (\omega_1, \omega_2). \quad (5.85)$$

Замечание 5.4.2. Мы раньше не имели дела с уравнениями на поверхностях, отличных от \mathbb{R}^n . Но случай двумерного тора очень прост.

Множество T^2 — это фактор-пространство двумерной плоскости по отношению эквивалентности $(x, y) \sim (x + 2\pi n, y + 2\pi m)$. Его можно представлять себе как квадрат со склеенными противоположными сторонами. С топологической точки зрения T^2 — это тор (поверхность бублика).

Уравнение (5.85) задаёт постоянное векторное поле на плоскости. Его можно рассматривать как векторное поле на торе T^2 , отождествив эквивалентные точки плоскости; тут важно, что отображения $(x, y) \mapsto (x + 2\pi n, y + 2\pi m)$ сохраняют векторное поле.

Любое решение уравнения (5.85) на плоскости после факторизации превращается в решение уравнения (5.85) на торе. Поэтому решения этого уравнения на торе имеют вид $(\omega_1 t + \alpha_1, \omega_2 t + \alpha_2) \pmod{2\pi\mathbb{Z}^2}$.

5.4.4 Обмотки тора

Определение 5.4.3. Фазовые кривые уравнения (5.85) называются *обмотками тора*.

Если, например, $\omega_1 = \omega_2$, то все фазовые кривые уравнения (5.85) будут замкнуты на торе, так как из точки (x, y) фазовая кривая приходит в точку $(x + 2\pi, y + 2\pi) \sim (x, y)$ за время $\frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\omega_2}$. Вообще, если $\frac{\omega_1}{\omega_2} \in \mathbb{Q}$, каждая кривая $\varphi(t)$ возвращается в исходную точку $\varphi(0)$. Это доказано ниже.

Определение 5.4.4. Уравнение (5.85) называется *резонансным*, если $\frac{\omega_1}{\omega_2} \in \mathbb{Q}$, и *нерезонансным* в противном случае.

Предложение 5.4.5. В резонансном случае $\frac{\omega_1}{\omega_2} \in \mathbb{Q}$ все обмотки тора — замкнутые кривые.

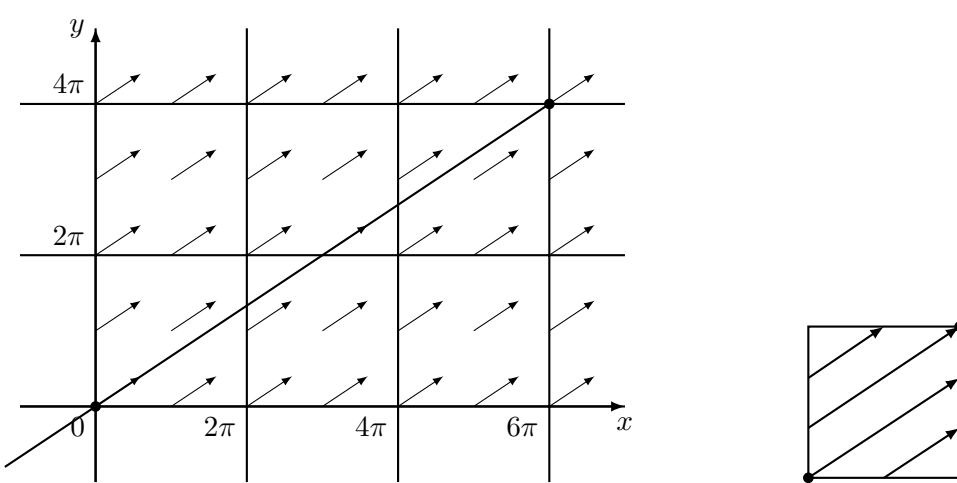


Рис. 5.8: Обмотка тора, $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{3}{2}$: фазовая кривая уравнения (5.85) на плоскости и в квадрате со склеенными сторонами

Доказательство. Положим $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$. За время $T = \frac{2\pi}{\omega_1}p$ приращение функции $\varphi_1 = \omega_1 t + \alpha_1$ составит $2\pi p$; приращение функции $\varphi_2 = \omega_2 t + \alpha_2$ составит $\frac{2\pi\omega_2}{\omega_1}p = 2\pi q$. Значит, на торе T^2 траектория поля (5.85) возвращается в исходную точку за время T . Итак, решения уравнения (5.85) периодичны с периодом $\frac{2\pi}{\omega_1}p$, и все обмотки тора замкнуты. \square

Следствие 5.4.6. В резонансном случае $\frac{\omega_1}{\omega_2} \in \mathbb{Q}$ решения уравнения малых колебаний (5.83) на плоскости периодичны.

В нерезонансном случае $\varphi(t)$ представляет собой прямую с иррациональным углом наклона. Она незамкнута на торе. Более того, верно следующее утверждение.

Теорема 5.4.7. В нерезонансном случае $\frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{Q}$ каждая обмотка тора плотна на торе.

Следствие 5.4.8. В нерезонансном случае $\frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{Q}$ решение уравнения малых колебаний плотно заполняет прямоугольник $[-a_1, a_1] \times [-a_2, a_2]$ в базисе ξ^1, ξ^2 (см. рис. 5.9); значения a_1, a_2 определяются из начальных условий (в том числе возможен случай $a_i = 0$, когда прямоугольник вырождается).

Доказательство следствия. Действительно, $x(t) = \sum \xi^i a_i \sin(\varphi_i(t))$, и по теореме 5.4.7 значения $(\sin \varphi_1(t), \sin \varphi_2(t))$ плотно заполняют квадрат $[-1, 1] \times [-1, 1]$. Отсюда следует утверждение. \square

Доказательство теоремы 5.4.7. Рассмотрим отображение Пуанкаре P – отображение первого возвращения траектории на окружность $\{x = 0\}$.

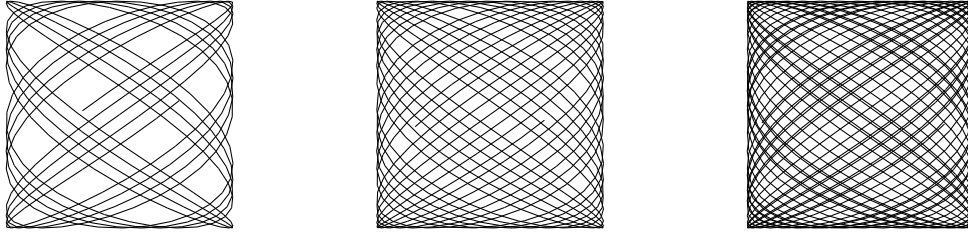


Рис. 5.9: Нерезонансный случай $\omega_1/\omega_2 = \sqrt{2}$: кривая (5.84) плотно заполняет квадрат. На рисунках изображены все более длинные участки кривой.

Если траектория поля (5.85) начинается в точке $(0, s)$ этой окружности, то за время $t = 2\pi\omega_1$ она приходит в точку $(2\pi, s + 2\pi\frac{\omega_1}{\omega_2}) \sim (0, s + 2\pi\frac{\omega_1}{\omega_2})$ на этой окружности. Таким образом, отображение Пуанкаре имеет вид $P(s) = s + 2\pi\frac{\omega_1}{\omega_2}$.

Положим $a := \frac{\omega_1}{\omega_2}$; по предположению, это число иррационально. Замена координат $x = s/2\pi$ на окружности позволяет перейти к отображению $\tilde{P}(x) = x + a$ окружности \mathbb{R}/\mathbb{Z} , где $a \notin \mathbb{Q}$. Такое отображение называется *иррациональным поворотом окружности*. Напомним, что

Определение 5.4.9. Орбита точки x под действием взаимно-однозначного отображения f — это множество точек $\{f^n(x) \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

Мы будем пользоваться следующей леммой.

Лемма 5.4.10. Орбиты иррационального поворота \tilde{P} плотны на окружности \mathbb{R}/\mathbb{Z} .

Доказательство леммы 5.4.10. Докажем, что орбита точки 0 под действием поворота \tilde{P} заходит в любую дугу на окружности. Пусть дуга имеет длину ε .

Пусть N достаточно велико, так что $1/N < \varepsilon$. Разделим окружность на N равных дуг длины $1/N$. Рассмотрим набор точек окружности $(0, a, 2a, \dots, Na) \bmod \mathbb{Z}$. По принципу Дирихле, из этих $N+1$ точек по крайней мере две лежат на одной и той же дуге длины $1/N$; значит, для некоторых k, l выполнено $|(ka - la) \bmod \mathbb{Z}| < 1/N < \varepsilon$. Итак, отображение \tilde{P}^{k-l} — это поворот окружности на угол $|(k-l)a \bmod \mathbb{Z}| < \varepsilon$. Значит, мы можем двигаться по окружности “короткими шагами” длины меньше ε , применяя отображение \tilde{P}^{k-l} ; поэтому точки последовательности $(0, (k-l)a, 2(k-l)a, \dots) \bmod \mathbb{Z}$ посещают любую дугу длины ε . \square

Теперь докажем, что кривая $\varphi(t)$ плотно заполняет тор. Выберем точку $(x, y) \in T$ и покажем, что обмотка тора $\varphi(t)$ заходит в сколь угодно малую её окрестность. Действительно, по лемме 5.4.10 любая орбита отображения \tilde{P} заходит в сколь угодно малую окрестность точки $(0, y - x\frac{\omega_2}{\omega_1})$ на окружности $\{x = 0\}$. Значит, для некоторого t_0 точка $\varphi(t_0)$ лежит в малой окрестности точки $(0, y - x\frac{\omega_2}{\omega_1})$, а тогда точка $\varphi(t_0 + \frac{x}{\omega_1})$ лежит в малой окрестности точки (x, y) . \square

Приведем без доказательства следующее усиление леммы 5.4.10:

Лемма 5.4.11. *Орбита иррационального поворота равномерно распределена на окружности: доля точек орбиты, попадающих на дугу, пропорциональна её длине. Другими словами, если D — дуга длины l , то из первых N точек любой орбиты на дугу D попадает $l \cdot N + o(N)$ точек.*

5.5 Задачи к главе 5

Комплексные числа

1. Найдите: i^{1917} ; $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{1945}$; $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{1991}$.
2. Решите уравнения: $z^3 = 8$; $z^3 = -8$; $z^6 = 64$; $z^6 = -64$; $z^4 = -4$.
3. Докажите, что корни уравнения $z^n = 1$ образуют группу по умножению порядка n .
4. Сформулируйте и докажите обратную теорему.

Линейные уравнения высших порядков

5. Решите следующие линейные уравнения:

а) $\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = 0$; б) $\ddot{x} - 9\dot{x} + 8x = 0$; в) $x^{(4)} - 9\ddot{x} + 8x = 0$; д) $x^{(6)} - 9x^{(3)} + 8x = 0$; е) $\ddot{x} + 2\dot{x} + x = 0$; ф) $x^{(3)} + \ddot{x} - \dot{x} - x = 0$;	г) $x^{(3)} - 6\ddot{x} + 12\dot{x} - 8x = 0$; х) $x^{(6)} + 16x^{(3)} + 64x = 0$; и) $x^{(6)} + 64x = 0$; ж) $x^{(n)} + x^{(n-1)} + \dots + x' + x = 0$; к) $x^{(n)} + nx^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{2}x^{(n-2)} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{(n-3)} + \dots + nx' + x = 0$.
--	---
6. а) Являются ли функции $\sin x$, $\sin(x+1)$, $\sin(x+2)$ линейно независимыми?
 б) При каких значениях параметров a, b функции $\sin at$ и $\sin bt$ линейно независимы?
 в) При каких значениях параметров a, b, c функции $\sin at$, $\sin bt$, $\sin ct$ линейно независимы?
7. Докажите, что вещественные части квазимногочленов с попарно различными показателями или степенями линейно независимы. Указание: ср. с доказательством леммы 5.2.18.
8. Составьте линейное уравнение минимального порядка а) с постоянными коэффициентами, б) с переменными коэффициентами, для которого $\sin t$ и $\sin 3t$ являются решениями.
9. Составьте линейное уравнение минимального порядка с переменными коэффициентами, для которого $\sin t$, $\sin^3 t$ и $\sin 3t$ являются решениями.
10. Решите уравнение:
 - а) $\ddot{x} - 2\dot{x} + x = 2 \cosh t$;

b) $\ddot{x} - 4\dot{x} + 5x = e^{2t} \sin t.$

Указание: в этой и следующей задаче формула сдвига заметно упрощает вычисления

11. Найдите частные решения следующих уравнений с параметром:

a) $x^{(3)} - 8x = e^t \cos \omega t;$

b) $x^{(4)} + 4x = e^t \sin \omega t;$

c) $x^{(4)} - 16x = e^{at} - bt.$

12. Уравнение колебаний пружинного маятника с вязким трением имеет вид $\ddot{x} = -x - \varepsilon\dot{x}$, где ε — коэффициент вязкого трения. На маятник действует внешняя периодическая сила $F(t) = \sin \omega t$.

(a) Найдите (единственное) периодическое движение маятника. Покажите, что при $\varepsilon > 0$ все остальные решения уравнения стремятся к периодическому решению.

(b) Постройте график зависимости амплитуды этого периодического решения от ω . При каком значении частоты внешней силы ω амплитуда наибольшая? Как меняется график (и наибольшее возможное значение амплитуды) при малом трении, $\varepsilon \rightarrow 0$? Дайте физическую интерпретацию результатам ваших вычислений.

13. Для каждого из следующих уравнений найдите периодическое решение с частотой ω , если оно существует. Нарисуйте график зависимости амплитуды этого решения от ω (для тех ω , для которых периодическое решение существует и единственно).

a) $\ddot{x} + x = \sin \omega t;$

b) $x^{(4)} - 5\ddot{x} + 4x = \sin \omega t;$

c) $x^{(4)} - 16x = \sin \omega t.$

14. Пусть известно одно ненулевое решение уравнения $au'' + bu' + cu = 0$ — функция φ_1 . Записав другие решения в виде $u(t) = \psi(t)\varphi_1(t)$, получите уравнение второго порядка на функцию ψ вида $A\psi'' + B\psi' + C\psi = 0$ и убедитесь, что $C = 0$ (а потому ψ' легко находится).

15. Воспользуйтесь этим методом для нахождения решений следующих уравнений.

a) $(\frac{x^2}{2} + 1)y'' - xy' - y = 0;$

b) $xy'' - (x + 1)y' + y = 0.$

16. Рассмотрим линейную систему уравнений $x' = a(t)x + b(t)y, y' = c(t)x + d(t)y$. Следуя графу Якопо Риккати, получите дифференциальное уравнение для $z = y/x$.

Уравнение $z' = P + Qz + Rz^2$, где P, Q, R — функции t , называют *уравнением Риккати*.

17. (Теорема Эйлера) Дано уравнение второго порядка вида

$$Au'' + Bu' + Cu = 0 \quad (5.86)$$

где A, B, C — функции t . Будем искать решение в виде $u = e^V$. Убедитесь, что V' удовлетворяет уравнению Риккати. Обратно, докажите, что уравнение Риккати можно свести к уравнению вида (5.86). Свяжите A, B, C и P, Q, R .

Линейные системы с постоянными коэффициентами

18. а) Докажите, что если равенство $e^{At}e^{Bt} \equiv e^{(A+B)t}$ верно для всех t , то $AB = BA$.
 б) Найдите такие операторы A, B что $e^A e^B = e^{A+B}$, но $AB \neq BA$.
19. а) Докажите, что образ куба под действием линейного оператора — параллелепипед.
 б) Докажите, что образ шара под действием линейного оператора — эллипсоид, и найдите оси этого эллипсоида.
20. Определите тип особой точки и нарисуйте фазовые портреты для следующих систем. Найдите решение с указанным начальным условием.
- а) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; x(0) = (2, 2);$
 б) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}; x(0) = (4, 0);$
 в) $\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; x(0) = (0, 5);$
 г) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}; x(0) = (0, 1);$
21. Для следующих операторов A найдите e^A . Нарисуйте образ единичного квадрата¹² и единичного круга под действием преобразования e^A . Нарисуйте фазовый портрет системы $\dot{x} = Ax$. Найдите её решение с начальным условием $x(0) = (1, 0)$.

¹²Здесь и далее под единичным квадратом подразумевается множество $[0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$, а под единичным кругом — круг радиуса 1 с центром в нуле.

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

g) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

22. Найдите отображение фазового потока g^t для следующих систем:

a) $\dot{x} = -2x + 2y, \dot{y} = -x$ для $t = \pi$;

b) $\dot{x} = 2x + 5y, \dot{y} = -x - 2y$ для $t = \pi$;

c) $\dot{x} = x - 5y, \dot{y} = x - y$ для $t = \pi/2$;

d) $\begin{cases} \dot{x} = (-3 + \ln 2)x + 5y \\ \dot{y} = -2x + (3 + \ln 2)y \end{cases}$ для $t = \pi$.

Во всех этих задачах постарайтесь получить ответ почти без вычислений: не находя решения с заданным начальным условием, но пользуясь тем, какой вид имеет это решение.

23. (ср. с разделом 4.3.5) Уравнение колебаний пружинного маятника с вязким трением имеет вид $\dot{x} = v, \dot{v} = -x - \varepsilon v$. Определите тип особой точки $(0, 0)$ на плоскости Oxv при всевозможных значениях коэффициента вязкого трения $\varepsilon, \varepsilon > 0$. При каких значениях ε маятник совершает затухающие колебания относительно положения равновесия?

Найдите решения уравнения с начальными условиями $x(0) = 1, v(0) = 0$ при $\varepsilon = 1, 2, 4$. Опишите, как движется грузик на пружине в этих трех случаях.

24. Два грузика одинаковой массы $m = 1$ связаны тремя одинаковыми пружинами с коэффициентами жесткости $k = 1$ так, как показано на рисунке. Свободные концы пружин закреплены. В положении равновесия, показанном на рисунке, пружины не растянуты и не сжаты.

Пользуясь законом Гука, получите уравнения движения грузиков (как и закон Гука, они будут работать только вблизи положения равновесия). Найдите все периодические движения грузиков и опишите их качественно. Найдите их периоды.

Ответ: возможны два типа периодического движения грузиков: когда грузики движутся симметрично и когда грузики движутся с сохранением расстояния между ними. Первое колебание имеет период $T = 2\pi$, а второе — период $T = 2\pi/\sqrt{3}$. Любое другое движение является суммой таких колебаний, а потому аperiodично.

25. Нарисуйте фазовые кривые системы $\dot{x} = Ax$ и найдите e^{At} для следующих операторов A :

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; & \text{e)} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \\ \text{b)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}; & \text{f)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \\ \text{c)} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}; & \text{g)} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \\ \text{d)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; & \end{array}$$

Указание: задача сводится к двумерной.

26. Найдите экспоненты e^{At} для следующих матриц A :

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}; & \text{c)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \\ \text{b)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}; & \text{d)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Указание: действуйте так же, как при вычислении экспоненты от жордановой клетки в разделе 5.3.5.3.

27. Найдите особые точки и нарисуйте фазовые кривые системы $\dot{x} = Ax$ для

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

28. Пользуясь определением экспоненты, найдите e^{At} для следующих операторов A :

$$\begin{array}{l} \text{a)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{b)} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{array}$$

29. Докажите, что если приведенный многочлен с целыми коэффициентами имеет рациональный корень, то этот корень — целый и является делителем свободного члена.

В следующей задаче все операторы выбраны так, что у них есть хотя бы одно целое собственное значение. Его легко подобрать с помощью предыдущей задачи.

30. Решите систему $\dot{x} = Ax$ и нарисуйте фазовые кривые в собственном базисе для следующих операторов A . Найдите решение с начальным условием $(1, 0, 0)$.

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix},$

f) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -5 & 2 & -9 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

h) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 3 & -4 & -3 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

i) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & -6 & -3 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

j) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 3 & -7 & -3 \\ 2 & -4 & -3 \end{pmatrix}$

Линейные системы с непостоянными коэффициентами

31. Одномерное линейное уравнение $\dot{x} = a(t)x$ можно решить в явном виде с помощью метода разделения переменных и получить, что $x(t) = c \exp(\int a(t)dt)$. Применима ли эта формула в многомерном случае?
- a) Покажите, что если матрицы $A(t)$ коммутируют друг с другом при разных значениях t , то для решения уравнения $\dot{x} = A(t)x$ верна формула $x(t) = \exp(\int A(t)dt)c$, где c — произвольный вектор.
- b) На примере системы $x' = y, y' = tx$ покажите, что эта формула неверна в общем случае.
32. Примените формулу из предыдущей задачи для решения следующих систем:

$$\text{a) } \begin{cases} \dot{x} = tx + y \\ \dot{y} = ty \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \dot{x} = x + ty \\ \dot{y} = tx + y \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} \dot{x} = \cos t \cdot x + \sin t \cdot y \\ \dot{y} = -\sin t \cdot x + \cos t \cdot y \end{cases}$$

33. Выясните, для каких t фазовый поток $g^{0,t}$ для уравнений из предыдущей задачи сохраняет фазовый объем.
34. Докажите, что фазовый поток системы $x' = y, y' = tx$ сохраняет фазовый объем.

Неоднородные линейные системы

35. Решите уравнение (а) $x'' + x = \operatorname{tg} t$; (б) $x'' - x = \frac{1}{\sinh t}$; (в) $x'' + 2x' + x = t^{10}e^{-t}$.

Указание: перейдите от уравнения второго порядка к системе уравнений первого порядка и воспользуйтесь методом вариации постоянной. Отметим, что в последней задаче также применим метод неопределенных коэффициентов, но он приводит к системе с 11 неизвестными.

36. Найдите методом неопределенных коэффициентов частное решение системы

$$\text{a) } \begin{cases} \dot{x} = y + e^t \\ \dot{y} = -x + 1 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} \dot{x} = x - 5y + \sin \omega t, \\ \dot{y} = x - y. \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \dot{x} = y + 3 \cos \lambda t \\ \dot{y} = -x + \sin \lambda t. \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = x + y + e^t \cos \omega t \end{cases}$$

37. При каком значении параметра a система

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + 1 \\ \dot{y} = -4x - 2y + a \end{cases}$$

имеет хотя бы одно ограниченное решение, определенное при всех t ? При этом a найдите преобразование фазового потока системы.

38. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y + 1 \\ \dot{y} = 2x - ay + 1 \end{cases}$$

При каком a все решения системы неограничены на \mathbb{R} ? Найдите их для этого a .

Малые колебания

39. Решите уравнение $\ddot{x} = -Ax$, $x \in \mathbb{R}^2$, с заданным начальным условием. Нарисуйте в плоскости x фазовую кривую, которая соответствует найденному решению.

a) $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = (1, 0)$.

b) $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, $x(0) = (1, 0)$, $\dot{x}(0) = 0$.

c) $A = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $x(0) = (1, 0)$, $\dot{x}(0) = 0$.

d) $A = \begin{pmatrix} 13 & 5 \\ 5 & 13 \end{pmatrix}$, $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = (0, 1)$.

40. Покажите, что формула для решения уравнения малых колебаний верна для решения уравнения $x'' = -Ax$ и в том случае, когда A — оператор с собственным базисом ξ_j и положительными собственными значениями ω_j . Таким образом, можно не требовать симметричности матрицы A .

41. Нарисуйте замыкание на плоскости \mathbb{R}^2 траектории $\{x(t) | t \in \mathbb{R}\}$ системы

$$\ddot{x} = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x$$

с начальным условием $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = (1, 0)$.

42. Нарисуйте замыкание на плоскости \mathbb{R}^2 траектории $\{x(t) | t \in \mathbb{R}\}$ системы

$$\ddot{x} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} x$$

с начальным условием $x(0) = (1, 0)$, $\dot{x}(0) = 0$.

43. Найдите замыкание орбиты системы $\dot{\varphi} = \omega$ с начальным условием $\varphi(0) = 0$ на трехмерном торе $\mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$, где $\omega = (1, 1, \sqrt{2})$.

44. Найдите $\sup_{t \in \mathbb{R}} (\sin t + \sin \sqrt{2}t + \cos \sqrt{2}t)$.

45. Докажите, что число 2^k может начинаться с любой наперед заданной комбинации цифр.

Указание: переформулируйте задачу в терминах $\log 2^k$.

46. Выясните, для каких чисел $\lambda < 0 < \mu$ множество $\{\lambda^k \mu^l \mid k \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{N}\}$ плотно на вещественной оси.

В следующих задачах можно без доказательства пользоваться леммой 5.4.11.

5 *Линейные уравнения и системы*

47. Для любой непрерывной функции f на окружности и любого угла φ , для которого отношение $\varphi/2\pi$ иррационально, докажите, что временное среднее функции f вдоль орбиты иррационального поворота на угол φ — величина $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(k\varphi)$ — равна пространственному среднему $\int_{S^1} f(x) dx$.
48. Найдите $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(k)$, где $f(x) = \cos^2 x + \sin^{2011} x$.
49. Найдите временное среднее функции $e^{2i\varphi}$ вдоль орбиты поворота $\varphi \mapsto \varphi + 2\pi\alpha$ на окружности $S^1 = \mathbb{R}^1/2\pi\mathbb{Z}$, где $\alpha = \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \sqrt{2}; \sqrt{2} + \sqrt{3}$.

6 Уравнения в частных производных и теоремы Штурма

6.1 Метод Фурье для уравнений в частных производных

В этом разделе мы обсудим общий подход к уравнениям в частных производных как к дифференциальным уравнениям в бесконечномерном пространстве, который приводит к методу Фурье. Мы применим полученные результаты к одномерному уравнению теплопроводности, уравнению колебаний струны, прямоугольной мембраны и круглой мембраны.

6.1.1 Уравнения в частных производных как обыкновенные дифференциальные уравнения в функциональных пространствах

Уравнения с частными производными можно в ряде случаев рассматривать как обыкновенные дифференциальные уравнения в бесконечномерном фазовом пространстве. При специальных начальных условиях бесконечномерное пространство заменяется конечномерным. Это позволяет применить методы, развитые в главе 5, к уравнениям математической физики.

Рассмотрим уравнение вида

$$u_t = Au, \quad (6.1)$$

где u — неизвестная функция от времени t и пространственной переменной x , A — линейный или нелинейный дифференциальный оператор по пространственной переменной. В дальнейшем мы будем рассматривать уравнения (6.1), в которых оператор A линеен: для любых достаточно гладких функций f, g от пространственной переменной выполнено $A(\alpha f + \beta g) = \alpha Af + \beta Ag$. Чтобы выделить одно решение уравнения (6.1), задается начальное условие

$$u(x, 0) = f(x), \quad (6.2)$$

где $f(x)$ — известная функция от пространственного переменного x . *Задача Коши* состоит в решении уравнения (6.1) с начальным условием (6.2).

Случай, когда оператор A содержит только первые производные, рассмотрен в разделе 7.4.

Пример 6.1.1. Рассмотрим твердое тело, занимающее область Ω в пространстве \mathbb{R}^3 ; пусть $u(t, x)$ — температура в точке $x \in \Omega$ этого тела в момент времени t . Тогда функция u подчиняется *уравнению теплопроводности* $u_t = \Delta u$, где Δ — *оператор Лапласа*¹:

$$\Delta u = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}.$$

¹Пьер-Симон, маркиз де Лаплас (1749 – 1827) — математик, механик, физик, астроном и философ. Как математик наиболее известен благодаря своему вкладу в математическую физику, линейную алгебру и теорию вероятностей.

6.1.2. Метод Фурье для уравнений вида $u_t = Au$.

Начальное условие для такого уравнения – начальное распределение температур $u(0, x)$. Часто бывает известно *краевое условие* – распределение температур на поверхности тела. Вывод уравнения теплопроводности можно найти в книге С.Л.Соболева «Уравнения математической физики», раздел 1.5.

Упражнение 101. Проверьте, что оператор Лапласа линеен на пространстве дважды дифференцируемых функций в \mathbb{R}^3 .

Уравнение вида (6.1) можно воспринимать как обыкновенное дифференциальное уравнение, но в бесконечномерном пространстве. Скажем, что состояние системы в момент времени t_0 – это функция $u(t_0, x)$ пространственной переменной x . Тогда фазовым пространством V этой системы служит множество функций от x . Искомая функция $u(t, x)$ – это кривая в пространстве V , параметризованная временем t ; каждая точка кривой $u(t_0, x) \in V$ – это состояние системы в фиксированный момент времени $t = t_0$. Начальное условие $u(0, x) = f(x)$ фиксирует начальную точку $f \in V$ на искомой кривой $u(t, x)$. Дифференциальный оператор $A: V \rightarrow V$ задаёт векторное поле в V ; уравнение (6.1) означает, что вектор скорости кривой $u(t, x)$ совпадает с вектором этого векторного поля в каждой точке кривой.

6.1.2 Метод Фурье для уравнений вида $u_t = Au$.

Предположим сначала, что оператор A имеет конечномерное инвариантное подпространство T . Тогда уравнение (6.1) в пространстве T превращается в уже изученную нами задачу – линейное дифференциальное уравнение в конечномерном пространстве:

$$U_t = AU \quad (6.3)$$

на функцию $U: \mathbb{R} \rightarrow T$, где $u(t, \cdot) = U(t) \in T$. Рассмотрим собственные векторы оператора A в пространстве T . Следующее определение из линейной алгебры работает как в конечномерном, так и в бесконечномерном случае:

Определение 6.1.2. Вектор $\xi \in V$, $\xi \neq 0$, является *собственным вектором* линейного оператора $A: V \rightarrow V$ с собственным значением λ , если $A\xi = \lambda\xi$.

Так как оператор действует в пространстве функций, вместо “собственный вектор оператора A ” мы будем говорить “собственная функция оператора A ”.

Пусть оператор A имеет в T базис из собственных функций ξ^1, \dots, ξ^n с собственными значениями $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Тогда уравнение (6.3) имеет фундаментальную систему решений $U_j(t) = e^{\lambda_j t} \xi^j$. Общее решение уравнения (6.3) имеет вид

$$U(t) = \sum_{j=1}^n c_j e^{\lambda_j t} \xi^j.$$

Вспоминая, что $\xi^j \in T$ – функции переменной x и $U(t) = u(t, \cdot)$, мы получаем общее решение системы (6.1) в пространстве T :

$$u(t, x) = \sum_{j=1}^n c_j e^{\lambda_j t} \xi^j(x).$$

6 Уравнения в частных производных и теоремы Штурма

Попробуем обобщить этот результат на бесконечномерный случай. Мы будем искать общее решение системы (6.1) (в бесконечномерном пространстве) следующим способом.

- Решим *спектральную задачу*: найти все собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ (*спектр*) оператора A и соответствующие собственные функции ξ^1, ξ^2, \dots
- Найдем общее решение системы (6.1) в виде суммы ряда:

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j e^{\lambda_j t} \xi^j(x).$$

В этом и состоит метод Фурье². Его также называют “метод разделения переменных”, потому что в формуле для базисных решений $u_j(x, t) = e^{\lambda_j t} \xi^j(x)$ переменные “разделены”: решение равно произведению функции от x на функцию от t . Мы не будем обсуждать применимость метода Фурье в общем случае (см³), а ограничимся несколькими примерами.

Упражнение 102. Найдите все собственные функции одномерного оператора Лапласа $f \mapsto f''$ в пространстве бесконечно-дифференцируемых функций на прямой.

Упражнение 103. Найдите несколько решений одномерного уравнения теплопроводности $u_t = u_{xx}$. Для этого в качестве u возьмите $u(t, x) = e^{\lambda t} \xi(x)$, где ξ — какая-нибудь собственная функция оператора $f \mapsto f''$, а λ — соответствующее собственное значение.

Упражнение 104. У оператора $f \mapsto f''$ есть двумерное собственное подпространство, порожденное векторами $e^1 = \sin x$ и $e^2 = \sin 2x$ (проверьте это!). Нарисуйте фазовый портрет уравнения $u_t = u_{xx}$ на плоскости (e^1, e^2) и опишите, как ведут себя решения этого уравнения.

6.1.3 Уравнение теплопроводности на окружности

Рассмотрим проволоочное кольцо, толщиной которого мы пренебрегаем; пусть $x \in \mathbb{R}$ — угловая координата на этом кольце (значения x , отличающиеся прибавлением 2π , соответствуют одной и той же точке кольца). Пусть температура проволоки в точке x в момент времени t равна $u(x, t)$. Пусть начальное распределение температур задаётся функцией $u(x, 0) = f(x)$. Ясно, что функции $u(t, \cdot)$ и $f(\cdot)$ — 2π -периодичны.

Функция u при $t > 0$ удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$u_t = u_{xx},$$

и выполнено начальное условие

$$u|_{t=0} = f(x).$$

²Барон Жан-Батист Жозеф Фурье (1768 – 1830) — математик и физик. Автор метода Фурье, повсеместно применяемого не только в математике, но в физике и технике.

³И.Г.Петровский, "Лекции по уравнениям с частными производными"

6.1.3. Уравнение теплопроводности на окружности

Мы ищем решение задачи Коши при неотрицательных t . Мы будем считать, что функция u дважды гладкая при $t > 0$ и непрерывная при $t \geq 0$.

Собственные функции

Пусть D — оператор дифференцирования: $D: f \rightarrow f'$. В правой части уравнения теплопроводности стоит линейный оператор $D^2: g \mapsto g''$.

Сначала найдем все собственные функции оператора $D^2: f \mapsto f''$ в пространстве дважды дифференцируемых 2π -периодических функций. Для этого надо найти все 2π -периодические решения уравнения

$$X'' = \lambda X.$$

При $\lambda > 0$, ненулевые решения этого уравнения — линейные комбинации экспонент. Они неограничены на прямой, следовательно, не периодичны. При $\lambda = 0$, решения этого уравнения — функции вида $ax + b$. Из них периодической функцией является только константа. При $\lambda < 0$, решения этого уравнения имеют вид

$$X(x) = a \sin(\sqrt{|\lambda|x}) + b \cos(\sqrt{|\lambda|x}).$$

Эти решения 2π -периодичны только при $\lambda = -k^2$, $k \in \mathbb{N}$.

Итак, собственные функции оператора A на окружности — это функции

$$1, \cos kx, \sin kx, \quad k \in \mathbb{N}$$

с собственными значениями $0, -k^2$ соответственно.

В следующем разделе мы решим уравнение теплопроводности в ограничении на конечномерное инвариантное подпространство T_n , порожденное собственными функциями $1, \cos kx, \sin kx$, $k \leq n$.

Решение в пространстве тригонометрических многочленов

Рассмотрим пространство T_n тригонометрических многочленов степени не выше n . Это пространство можно определить двумя способами.

$$T_n = \{P_n(\sin x, \cos x), \text{ где } P_n \text{ — вещественный многочлен степени не выше } n\}$$

или

$$T_n = \left\{ a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \mid a_k, b_k \in \mathbb{R} \right\}.$$

Упражнение 105. Докажите эквивалентность этих определений. Какова размерность пространства T_n ?

Пространство T_n порождено первыми $2n + 1$ собственными функциями оператора D^2 , поэтому инвариантно относительно D^2 . Значит, если начальное условие f принадлежит T_n , можно искать решения задачи Коши, для которых $u(t_0, x) \in T_n$ при

6 Уравнения в частных производных и теоремы Штурма

всех t_0 , — то есть искать решения дифференциального уравнения $u_t = u_{xx}$ в конечномерном пространстве T_n , как описано выше. Спектр оператора D^2 в пространстве T_n состоит из собственных функций $1, \cos kx, \sin kx$, $k = 1, \dots, n$ с собственными значениями $0, -k^2$ и порождают все пространство T_n . Таким образом, общее решение уравнения теплопроводности в пространстве T_n имеет вид:

$$u(x, t) = a_0 + \sum_{k=1}^n e^{-k^2 t} (a_k \cos kx + b_k \sin kx). \quad (6.4)$$

Чтобы эта функция удовлетворяла начальному условию:

$$u(x, 0) = f(x),$$

нужно, чтобы выполнялось равенство

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx). \quad (6.5)$$

Итак, если начальное условие f для уравнения теплопроводности на окружности является тригонометрическим многочленом, $f \in T_n$, и имеет вид (6.5), то уравнение теплопроводности имеет решение (6.4).

Упражнение 106. Подставьте выражение (6.4) в уравнение теплопроводности и проверьте непосредственно, что оно является решением.

Выражения для коэффициентов a_k, b_k и скалярное произведение

Рассмотрим начальное условие $f \in T_n$ уравнения теплопроводности. Функция f является тригонометрическим многочленом, но она может быть представлена в другом виде, чем (6.5); например, $f(x) = \sin^5(2x)$. Пусть коэффициенты её разложения по собственному базису a_k и b_k нам неизвестны. Как их найти?

В этом разделе мы получим простые интегральные формулы для коэффициентов a_k, b_k , которые легко обобщаются на случай гладкого начального условия f .

Чтобы получить простые выражения для коэффициентов a_k, b_k , введем евклидову структуру в пространствах T_n .

Одна из важнейших идей функционального анализа, возникшая в работах Гильберта⁴ и его учеников в начале двадцатого века⁵, состоит в том, что функциональное пространство становится евклидовым, если в нем ввести скалярное произведение по формуле:

$$(f, g) = \int f(x)g(x)dx. \quad (6.6)$$

⁴Давид Гильберт (1862 – 1943) — математик, который стоит у истоков современного функционального анализа. Известен также своим вкладом в теорию алгебраических чисел, теорию инвариантов, теорию дифференциальных уравнений, теорию интегральных уравнений, вариационное исчисление, теорию чисел и основания математики.

⁵см. книгу об истории функционального анализа: History of Functional Analysis, Edited by Jean Dieudonné, Volume 49, Pages 1-312 (1981).

6.1.3. Уравнение теплопроводности на окружности

Интегрирование надо вести по области определения функций. В данном случае мы будем интегрировать по окружности.

Упражнение 107. Проверьте, что эта формула задаёт симметричную положительную билинейную форму, то есть скалярное произведение в T_n .

Как мы знаем, оператор D^2 имеет собственный базис в пространстве T_n , состоящий из функций $1, \cos kx, \sin kx$. Собственный базис оказывается ортогональным относительно скалярного произведения (6.6).

Упражнение 108. Проверьте, что функции $1, \cos kx, \sin kx$ попарно ортогональны относительно скалярного произведения (6.6). Найдите их нормы.

Подсказка: следует посчитать интегралы, которые равны скалярным произведениям $(1, \cos kx), (1, \sin kx), (\cos kx, \sin lx), (\cos kx, \cos lx)$ и $(\sin kx, \sin lx)$.

Другое доказательство ортогональности собственного базиса состоит в том, что оператор D^2 симметричен, см. раздел 6.1.4.

Итак, функции $1, \cos kx, \sin kx$ образуют ортогональный базис. Нам нужно (см. (6.5)) разложить начальное условие f по этому базису. Следующее предложение из линейной алгебры показывает, как найти коэффициенты разложения по ортогональному базису.

Предложение 6.1.3. Разложение вектора $x \in \mathbb{R}^n$ по ортогональному базису ξ^1, \dots, ξ^n имеет вид $x = \sum c_k \xi^k$, где

$$c_k = \frac{(x, \xi^k)}{(\xi^k, \xi^k)}. \quad (6.7)$$

Доказательство. Пусть

$$x = \sum_{j=1}^n c_j \xi^j.$$

Умножив обе равенства на ξ^k , получим $(x, \xi^k) = c_k (\xi^k, \xi^k)$, откуда следует (6.7). \square

Для нашего базиса в T_n , в силу упражнения 108,

$$(1, 1) = 2\pi, \quad (\cos kx, \cos kx) = (\sin kx, \sin kx) = \pi.$$

Поэтому формулы (6.7) принимают вид

$$a_0 = \frac{(f, 1)}{2\pi}, \quad a_k = \frac{(f, \cos kx)}{\pi}, \quad b_k = \frac{(f, \sin kx)}{\pi}.$$

Другими словами, коэффициенты разложения функции $f \in T_n$ по базису $1, \cos kx, \sin kx$ равны

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx, \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx, \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx. \end{aligned} \quad (6.8)$$

В следующем разделе мы увидим, что эти формулы без изменения переносятся на случай гладких функций f .

Решение уравнения теплопроводности на окружности

Пусть $C^4(S^1)$ — пространство 2π -периодических C^4 -гладких функций на прямой (символ S^1 означает окружность: каждая функция $f \in C^4(S^1)$ задает функцию на окружности с угловой координатой x).

Решения уравнения теплопроводности с начальным условием $f \in C^4(S^1)$ описаны в следующей теореме.

Теорема 6.1.4. *Задача Коши для уравнения теплопроводности на окружности с начальным условием $f \in C^4(S^1)$ имеет решение при $t \geq 0$ вида*

$$u(t, x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2 t} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad (6.9)$$

где a_0, a_k, b_k выражаются формулами (6.8).

Заметим, что формулы (6.8) совпадают с известными формулами для коэффициентов разложения функции f в ряд Фурье. В курсе анализа доказана следующая теорема.

Теорема 6.1.5. ⁶ *Любая дифференцируемая 2π -периодическая функция разлагается в ряд Фурье: в каждой точке $x \in \mathbb{R}$ выполнено равенство*

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx,$$

где a_k, b_k находятся по формулам (6.8).

Коэффициенты Фурье C^m -гладкой функции убывают как k^{-m} :

$$|a_k| < Ck^{-m}, \quad |b_k| < Ck^{-m}$$

для некоторого $C > 0$.

В некотором смысле, ряд Фурье — это разложение функции f по бесконечному ортогональному базису $1, \sin kx, \cos kx$; формулы (6.8) для коэффициентов разложения получаются из тех же соображений, что и в конечномерном случае. Но мы не будем пока давать определение ортогонального базиса в бесконечномерном пространстве и уточнять, в каком именно пространстве мы работаем (см. конец раздела 6.1.6). Мы просто воспользуемся результатом 6.1.5 о сходимости ряда Фурье и формулах для его коэффициентов.

⁶См. В.А.Зорич “Математический анализ”, У. Рудин “Основы математического анализа”.

6.1.4. Симметричность оператора D^2

Доказательство теоремы 6.1.4. Воспользуемся предыдущей теоремой. Заметим, что при $t \geq 0$ ряд (6.9) мажорируется сходящимся числовым рядом $\sum Ck^{-4}$, так как при $t \geq 0$

$$|e^{-k^2 t}(a_k \sin kt + b_k \cos kt)| \leq Ck^{-4}.$$

Поэтому он равномерно сходится, и функция $u(t, x)$ определена. Ряды для её производных u_t и u_{xx} одинаковы и имеют вид:

$$\sum_{k=1}^{\infty} -k^2 e^{-k^2 t}(a_k \sin kt + b_k \cos kt).$$

Этот ряд при $t \geq 0$ мажорируется сходящимся числовым рядом $\sum Ck^{-2}$:

$$|-k^2 e^{-k^2 t}(a_k \sin kt + b_k \cos kt)| \leq Ck^{-2}.$$

По теореме Вейерштрасса, почленное дифференцирование ряда (6.9) возможно. Так как u_t и u_{xx} задаются одним и тем же рядом, мы получаем $u_t = u_{xx}$, то есть функция u удовлетворяет уравнению теплопроводности.

Проверим, что функция $u(t, x)$ непрерывна при $t = 0$ и удовлетворяет начальному условию. Так как ряд равномерно сходится при $t \geq 0$, его сумма непрерывна, и

$$u(x, 0) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx.$$

Но это — ряд Фурье функции f , который сходится к ней, поскольку $f \in C^4$. Итак, $u(x, 0) = f(0)$. \square

6.1.4 Симметричность оператора D^2

В предыдущем разделе мы пользовались тем, что собственные векторы оператора D^2 в пространствах T_n попарно ортогональны. Это происходит оттого, что оператор является симметричным.

Определение 6.1.6. Оператор $A: V \rightarrow V$ называется *симметричным* относительно скалярного произведения (\cdot, \cdot) , если $(Au, v) = (u, Av)$ для любых $u, v \in V$.

Предложение 6.1.7. *Собственные векторы симметричного оператора с разными собственными значениями ортогональны.*

Доказательство. Пусть u и v — собственные векторы оператора A с разными собственными значениями $\lambda \neq \mu$, тогда $(Au, v) = (\lambda u, v) = \lambda(u, v)$ и $(u, Av) = (u, \mu v) = \mu(u, v)$. Так как эти выражения равны в силу симметричности, и так как $\lambda \neq \mu$, получаем $(u, v) = 0$. \square

Докажем, что оператор D^2 симметричен.

Предложение 6.1.8. *Оператор D кососимметричен в пространстве T_n относительно скалярного произведения (\cdot, \cdot) : $(Df, g) = -(f, Dg)$.*

6 Уравнения в частных производных и теоремы Штурма

Доказательство. По формуле интегрирования по частям,

$$\int_0^{2\pi} f'(x)g(x)dx = - \int_0^{2\pi} f(x)g'(x)dx + f(x)g(x)|_0^{2\pi}. \quad (6.10)$$

Внеинтегральный член равен нулю, так как все функции в T_n периодические с периодом 2π . Итак, $(Df, g) = -(f, Dg)$. \square

Предложение 6.1.9. *Оператор D^2 симметричен и неположительно определен в пространстве T_n относительно скалярного произведения (\cdot, \cdot) .*

Доказательство. Имеем $(D^2f, g) = -(Df, Dg) = (f, D^2g)$, поэтому оператор D^2 симметричен.

Так как $(D^2f, f) = -(Df, Df)$, оператор D^2 неположительно определен. \square

Таким же образом можно доказать, что оператор D^2 симметричен в пространстве $C^2(S^1)$. Правда, он не отображает пространство $C^2(S^1)$ в себя, так как вторая производная гладкой функции необязательно гладкая; но равенство $(D^2f, g) = (f, D^2g)$ имеет смысл и доказывается так же, как предложение 6.1.9.

Так как оператор D^2 симметричен, к нему применимо предложение 6.1.7. Поэтому его собственные векторы с разными собственными значениями ортогональны. Собственные векторы $\cos kx, \sin kx$ с одинаковым собственным значением $(-k^2)$ тоже оказываются ортогональны, как показывает простая выкладка. Отсюда следует ортогональность собственного базиса $1, \cos kx, \sin kx$ оператора D^2 .

6.1.5 Метод Фурье для уравнений вида $u_{tt} = Au$. Уравнение колебаний струны

Рассмотрим малые колебания струны длины 1 с закрепленными концами. Пусть точка струны с координатой x в момент времени t сдвинулась в вертикальном направлении на величину $u(x, t)$; пусть u и u_x малы. Оказывается, что уравнение малых колебаний струны имеет вид

$$u_{tt} = cu_{xx}. \quad (6.11)$$

Вывод этого уравнения можно найти в книге С.Л.Соболева «Уравнения математической физики», раздел 1.2. Уравнение колебаний струны — частный случай *волнового уравнения*.

Сделав замену времени, мы будем считать, что $c = 1$. Концы струны закреплены, поэтому выполнено также краевое условие

$$u(0, t) = u(1, t) = 0.$$

Мы будем рассматривать функции u , C^2 -гладкие при $x \in [0, 1], t \in \mathbb{R}$. В частности, для фиксированного $t = t_0$ функция $u(t_0, x)$ принадлежит пространству $C^{2,0}([0, 1])$ дважды непрерывно дифференцируемых функций на отрезке с нулевыми значениями на его концах.

Собственные функции

Начнем с того, что найдем собственные функции оператора $D^2: f \mapsto f''$ в пространстве $C^{2,0}([0, 1])$. Уравнение на собственную функцию имеет вид $f'' = \lambda f$, причем выполнено краевое условие $f(0) = f(1) = 0$.

- Если $\lambda > 0$, решениями такого уравнения являются суммы экспонент $f(x) = ae^{\sqrt{\lambda}x} + be^{-\sqrt{\lambda}x}$. Из краевого условия следует $a + b = 0$ и $ae^{\sqrt{\lambda}} + be^{-\sqrt{\lambda}} = 0$, откуда $a = b = 0$.
- Если $\lambda = 0$, решениями уравнения являются функции $f(x) = ax + b$. Из краевого условия получаем $b = 0, a + b = 0$, поэтому снова $a = b = 0$.
- Остается случай $\lambda < 0$; положим $\lambda = -\omega^2$. Решения уравнения $f'' = -\omega^2 f$ имеют вид $f(x) = K \sin(\omega x + c)$. Из краевых условий получаем, что $c = 0$ и $\omega = \pi k$.

Итак, собственные функции оператора D^2 на пространстве $C^{2,0}([0, 1])$ имеют вид $\xi^k = \sin \pi k x, k = 1, 2, \dots$, а соответствующие собственные значения равны $\lambda_k = -(\pi k)^2$.

Симметричность и отрицательная определенность оператора D^2 .

Легко проверить, что собственные функции оператора A ортогональны относительно скалярного произведения

$$(f, g) := \int_0^1 f(x)g(x)dx. \quad (6.12)$$

Упражнение 109. Проверьте ортогональность собственных функций: $(\sin kx, \sin lx) = 0$ при $k \neq l$.

В ортогональном собственном базисе ξ^k оператор D^2 имеет диагональную матрицу с отрицательными значениями λ_k на диагонали. Поэтому он является симметричным и отрицательно определенным относительно скалярного произведения (6.38).

Другое доказательство симметричности и отрицательной определенности оператора D^2 аналогично доказательству предложения 6.1.9.

Упражнение 110. Докажите аналог предложения 6.1.9 для $f \in C^{2,0}([0, 1])$

Волновое уравнение как уравнение малых колебаний. Решение в конечномерном собственном подпространстве

Уравнения вида $u_{tt} = Au$ с отрицательно определенным симметричным оператором $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (уравнения малых колебаний для уравнений Ньютона) мы уже рассматривали в разделе 5.4. Напомним, как выглядят их решения.

Перейдем в собственный базис ξ^j оператора A ; положим $u = \sum_{j=1}^n x_j \xi^j$. Тогда уравнение $u_{tt} = Au$ превращается в систему уравнений $\ddot{x}_j = -\omega_j^2 x_j$ на компоненты

6 Уравнения в частных производных и теоремы Штурма

вектора u . Эта система легко решается: получаем $x_j = (a_j \cos \omega_j t + b_j \sin \omega_j t)$. По этому решение системы $u_{tt} = Au$ является суммой периодических колебаний вида

$$(a_j \cos \omega_j t + b_j \sin \omega_j t) \xi^j. \quad (6.13)$$

Чтобы применить этот результат к оператору D^2 , надо ограничить его на конечномерное подпространство, порожденное собственными функциями. Рассмотрим пространство

$$T_n^0 = \left\{ f(x) = \sum_{k=1}^n a_k \sin \pi k x, a_k \in \mathbb{R} \right\}.$$

Мы получаем, что решения уравнения $u_{tt} = u_{xx}$ в пространстве T_n^0 являются суммами периодических колебаний вида

$$u_k(x, t) = (a \sin \pi k t + b \cos \pi k t) \sin \pi k x. \quad (6.14)$$

Упражнение 111. Подставьте функции (6.14) в уравнение колебаний струны и проверьте, что они являются решениями.

Такое периодическое движение струны называется *стоячей волной* (см. рис. 6.1): точки струны $\frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \dots, \frac{k-1}{k}$ неподвижны, а между ними струна колеблется вверх-вниз с частотой $k/2$. Любое решение уравнения $u_{tt} = u_{xx}$ в T_n^0 является суммой стоячих волн (6.14) для разных значений k :

$$u(x, t) = \sum_{1 \leq k \leq n} (a_k \cos \pi k t + b_k \sin \pi k t) \sin \pi k x. \quad (6.15)$$

Решение уравнения колебаний струны с заданным начальным условием

Зная начальное положение $u(x, 0) = p(x)$ и скорость $\frac{d}{dt}u(x, 0) = v(x)$ всех точек струны, где $p, v \in T_n^0$, можно вычислить коэффициенты a_k, b_k . Для этого подставим $t = 0$ в (6.15); получаем

$$p(x) = u(x, 0) = \sum_{1 \leq k \leq n} a_k \sin \pi k x.$$

Итак, a_k — коэффициенты разложения p по ортогональному собственному базису $\xi^k = \sin \pi k x$, поэтому по предложению 6.1.3,

$$a_k = \frac{(p(x), \sin \pi k x)}{(\sin \pi k x, \sin \pi k x)}.$$

Упражнение 112. Вычислите знаменатели.

Упражнение 113. Выясните, как находятся коэффициенты b_k по начальной скорости струны.

Ответы приведены в формулировке задачи 9. в конце главы.

6.1.6. Оператор Лапласа и его симметричность

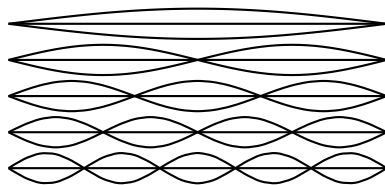


Рис. 6.1: Стоячая волна: три положения струны, колеблющейся по закону (6.14); k меняется от одного до пяти.

Решение уравнения колебаний струны в пространстве $C^{2,0}([0, 1])$.

Для уравнения теплопроводности мы смогли перейти от случая $f \in T_n$ к случаю $f \in C^4(S^1)$. Такое же рассуждение работает для уравнения колебаний струны. Для начального условия $p, v \in C^{2,0}([0, 1])$ формула (6.15) остается верной, но конечная сумма заменяется суммой ряда; формулы для коэффициентов a_k, b_k остаются такими же, как для $p, v \in T_n^0$. Формулировка теоремы приведена в задаче 9. в конце раздела. Читателю предлагается доказать эту теорему самостоятельно.

Основной тон и обертоны

Колебание струны при $k = 1$ соответствует *основному тону* струны. Его частота обратно пропорциональна длине струны, см. задачу 5. в конце раздела. Это наблюдение объясняет факт, открытие которого приписывают Пифагору: если взять две струны одинаковой толщины из одинакового материала, длины которых относятся как целые числа $p : q$ при небольших значениях p, q , то они будут «созвучны». При соотношении длин 2:1 получается интервал, который называется октавой, а при соотношении 3:2 получается квинта⁷.

Колебания при $n = 2, 3, \dots$ дают звуки большей частоты — обертоны, которые звучат одновременно с основным тоном. Обертоны «созвучны» основному тону струны, так как их частоты кратны частоте основного тона. Поэтому струна звучит «мелодично».

6.1.6 Оператор Лапласа и его симметричность

Пусть в пространстве \mathbb{R}^n задана евклидова структура. Тогда на пространстве дважды непрерывно дифференцируемых функций задан *оператор Лапласа* $\Delta u = \operatorname{div} \operatorname{grad} u$. В ортонормированном базисе

$$\Delta u = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}.$$

⁷Это не совсем верно для современного *равномерно темперированного* строя. В современном строе октаву делят на 12 одинаковых интервалов — полутонов. Поэтому частоты звуков, образующих полутона, относятся как $\sqrt[12]{2}$. Квинта — семь полутонов, то есть отношение частот для квинты равно не в точности $3 : 2 = 1.5$, а $2^{7/12} \approx 1.4983$.

Оператор $D^2: f \mapsto f''$ является одномерным оператором Лапласа. Изучая колебания струны, мы заметили, что собственные функции оператора D^2 попарно ортогональны, потому что этот оператор симметричен в пространстве $C^{2,0}([0, 1])$. В уравнении колебаний мембраны место оператора D^2 занимает оператор Лапласа. В этом разделе мы докажем симметричность и отрицательную определенность оператора Лапласа.

Пусть $\Omega \in \mathbb{R}^n$ — область с гладкой или кусочно-границей, например, шар или куб. Для таких областей в анализе доказана теорема Фубини⁸ о сведении кратного интеграла к повторному, которая понадобится нам в дальнейшем. Кроме того, для удобства мы будем считать, что область Ω выпуклая.

Пусть $C(\Omega)$ — векторное пространство функций, непрерывных в замыкании Ω , а его подпространство $C^{2,0}(\Omega) \subset C(\Omega)$ состоит из функций, производные которых второго порядка определены и непрерывны внутри области Ω и непрерывно продолжаются на границу Ω , причем значения функций на границе нулевые. Мы рассмотрим оператор Лапласа $\Delta: C^{2,0}(\Omega) \rightarrow C(\Omega)$.

Определим скалярное произведение двух функций из $C(\Omega)$ формулой

$$(f, g) = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx \quad (6.16)$$

Предложение 6.1.10. *Оператор Лапласа в $C^{2,0}(\Omega)$ симметричен и отрицательно определен относительно этого скалярного произведения:*

- 1) $(\Delta u, v) = (u, \Delta v)$ для любых функций $u, v \in C^{2,0}(\Omega)$;
- 2) $(\Delta u, u) \leq 0$ для любой функции $u \in C^{2,0}(\Omega)$, равенство достигается только для $u \equiv 0$.

Мы приведем подробное доказательство, хотя выкладка ненамного сложнее доказательства предложения 6.1.9 и состоит в интегрировании по частям.

Сначала мы докажем следующую формулу Грина⁹.

Лемма 6.1.11 (Формула Грина). *Для любых двух функций $u, v \in C^{2,0}(\Omega)$ выполнено*

$$\int_{\Omega} \Delta u \cdot v dx = - \int_{\Omega} (\text{grad } u, \text{grad } v) dx. \quad (6.17)$$

В правой части под интегралом стоит скалярное произведение векторов $\text{grad } u$ и $\text{grad } v$.

Интеграл, стоящий в правой части равенства (без знака $(-)$) называется *интеграл Дирихле*.

⁸Гвидо Фубини (1879 – 1943) — математик, известный своим вкладом в математический анализ, вариационное исчисление, теорию групп, математическую физику и проективную геометрию.

⁹Джордж Грин (1793 – 1841) — математический физик, известный своими работами по теории электричества и магнетизма. Предложил функцию Грина — важный инструмент теории уравнений с частными производными.

6.1.6. Оператор Лапласа и его симметричность

Доказательство. Рассмотрим пересечение области Ω с произвольной прямой, параллельной оси Ox_1 ; в силу выпуклости, оно представляет собой отрезок σ , параллельный оси x_1 , концы которого a, b лежат на границе области Ω . Тогда

$$\int_{\sigma} u_{x_1 x_1} v dx_1 = u_{x_1} v|_a^b - \int_{\sigma} u_{x_1} v_{x_1} dx_1.$$

Внеинтегральный член равен нулю, так как функция v равна нулю на границе области Ω . Проинтегрируем это равенство по переменным x_2, \dots, x_n и перейдем от кратного интеграла к повторному, пользуясь теоремой Фубини:

$$\int_{\Omega} u_{x_1 x_1} v dx = - \int_{\Omega} u_{x_1} v_{x_1} dx.$$

Осталось сложить это равенство с аналогичными равенствами для x_2, x_3, \dots, x_n . \square

Доказательство предложения 6.1.10. Пусть $u, v \in C^{2,0}(\Omega)$. Симметричность оператора Лапласа следует из того, что правая часть формулы Грина не меняется, если поменять местами u и v :

$$(\Delta u, v) = - \int_{\Omega} (\text{grad } u, \text{grad } v) dx = (u, \Delta v),$$

что и требовалось.

Применим формулу Грина, чтобы доказать отрицательную определенность оператора Лапласа:

$$(\Delta u, u) = - \int_{\Omega} |\text{grad } u|^2 dx \leq 0.$$

Равенство достигается только если $\text{grad } u \equiv 0$, то есть функция u постоянна; так как она равна нулю на границе области Ω , получаем $u \equiv 0$.

Итак, оператор Лапласа отрицательно определен. \square

Следующее предложение мы будем применять для оператора Лапласа $\Delta: C^{2,0}(\Omega) \rightarrow C(\Omega)$.

Предложение 6.1.12. Пусть оператор A определен на каком-нибудь подпространстве пространства со скалярным произведением и симметричен: $(Au, v) = (u, Av)$. Тогда собственные векторы этого оператора с разными собственными значениями ортогональны.

Доказательство этого предложения дословно повторяет доказательство теоремы 6.1.7.

В курсе линейной алгебры обсуждаются свойства конечномерных симметрических операторов; в частности, каждый такой оператор имеет ортогональный собственный базис. В бесконечномерном случае это не всегда так.

Упражнение 114. Для фиксированной функции $f \in C^{2,0}(\Omega)$ рассмотрите оператор умножения на эту функцию $A: u \mapsto f \cdot u$. Покажите, что он симметричен относительно скалярного произведения (6.16). Докажите, что этот оператор может не иметь ни одной собственной функции.

Оказывается, однако, что оператор Лапласа имеет ортогональный собственный базис. Оставшаяся часть этого раздела посвящена точной формулировке этого утверждения; при первом чтении её можно пропустить.

Сначала объясним, что такое ортогональный базис в бесконечномерном пространстве со скалярным произведением. Общая теория получается достаточно простой, если бесконечномерное пространство полно относительно метрики $\text{dist}(f, g) := \sqrt{(f - g, f - g)}$, соответствующей скалярному произведению. К сожалению, пространство $C^{2,0}([0, 1])$ неполно.

Определение 6.1.13. Метрическое пространство называется *полным*, если в нём любая последовательность Коши сходится.

Определение 6.1.14. Линейное пространство со скалярным произведением называется *гильбертовым*, если оно полно относительно метрики $\text{dist}(f, g) = \sqrt{(f - g, f - g)}$.

Метрика $\text{dist}(f, g) := \sqrt{(f - g, f - g)}$, соответствующая скалярному произведению $(f, g) = \int_{\Omega} fg dx$, называется *метрикой L^2* .

Упражнение 115. Проверьте, что пространство $C^{2,0}([0, 1])$ неполно относительно такой метрики, а значит, не является гильбертовым.

Указание: рассмотрите последовательность функций, которые достаточно быстро сходятся к разрывной функции, и проверьте, что это последовательность Коши.

Любое неполное пространство можно пополнить, формально добавив все пределы последовательностей Коши. Это составляет содержание *теоремы о пополнении* — одного из основных результатов теории метрических пространств. Пополнение пространства $C^{2,0}(\Omega)$ по метрике L^2 обозначается $L^2(\Omega)$. В функциональном анализе даётся прямое определение пространства $L^2(\Omega)$: это пространство измеримых функций, для которых определен (конечный) интеграл Лебега¹⁰ от $|f|^2$.

Пространство $L^2(\Omega)$ — один из важнейших примеров гильбертова пространства.

В гильбертовых пространствах определено понятие (бесконечного) базиса.

Определение 6.1.15. Последовательность векторов ξ^1, ξ^2, \dots гильбертова пространства H называется *базисом*, если любой вектор $v \in H$ можно единственным образом представить в виде суммы ряда $v = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \xi^k$.

Частным случаем такого разложения по базису является ряд Фурье для функций $f \in L^2([0, 1])$; тогда роль базисных векторов играют синусы и косинусы $1, \sin kx, \cos kx$.

Следующая теорема — один из замечательных результатов функционального анализа. Как мы уже отмечали, в конечномерном случае для любого линейного симметричного оператора существует базис из собственных векторов, но в бесконечномерном случае это не так (см. упражнение 114).

¹⁰ Анри Леон Лебег (1875 – 1941) — математик, создатель теории меры и интеграла Лебега.

Теорема 6.1.16. Для любой области Ω с гладкой границей существует набор собственных функций оператора Лапласа $\Delta: C^{2,0}(\Omega) \rightarrow C^0(\Omega)$, которые образуют ортогональный базис гильбертова пространства $L^2(\Omega) \supset C^{2,0}(\Omega)$.

Доказательство теоремы далеко выходит за рамки нашего учебника, см. ¹¹.

В следующих разделах мы будем находить все собственные векторы оператора Лапласа, но не будем доказывать, что они образуют базис, хотя это верно в силу теоремы 6.1.16.

6.1.7 Колебания квадратной мембраны. Общий метод разделения переменных.

Рассмотрим колебания мембраны с закрепленным краем, которая имеет форму квадрата K со стороной 1. Границу квадрата мы будем обозначать ∂K . Пусть точка мембраны с координатами $(x, y) \in K$ в момент времени t сдвинулась в вертикальном направлении на величину $w(x, y, t)$. Уравнение малых колебаний мембраны (после замены масштаба времени) имеет вид

$$w_{tt} = w_{xx} + w_{yy} \quad (6.18)$$

Это двумерный вариант уравнения (6.11) — двумерное волновое уравнение. Вывод уравнения малых колебаний мембраны можно найти в книге С.Л.Соболева “Уравнения математической физики”, раздел 1.3.

Края мембраны закреплены, поэтому

$$w|_{\partial K} = 0. \quad (6.19)$$

Как и ранее, начнем с того, что найдем собственные функции оператора Лапласа в пространстве $C^{2,0}(K)$.

Для этого мы воспользуемся методом разделения переменных в его традиционной форме. Этот метод состоит в следующем.

Метод разделения переменных

Пусть мы решаем линейное уравнение в частных производных $Au = 0$ в области Ω , которая является прямым произведением двух областей: $\Omega = \Omega_x \times \Omega_y$. Пусть x и y — координаты на Ω_x и Ω_y соответственно. Функцию u мы будем искать в виде

$$u(x, y) = X(x)Y(y).$$

Пусть уравнение $Au = A(X(x)Y(y)) = 0$ удастся привести к виду $\Phi(x) = \Psi(y)$, где Φ выражается через X , а Ψ — через Y . Это называется “разделить переменные”. Когда две функции от разных переменных равны, то обе они — константы. Равенства $\Phi(x) = \text{const}$, $\Psi(y) = \text{const}$ являются уравнениями на функции X и Y , и, если их удастся решить, мы найдем решения уравнения $Au = 0$ вида $u(x, y) = X(x)Y(y)$.

¹¹М.А.Шубин, “Лекции по уравнениям математической физики”.

6 Уравнения в частных производных и теоремы Штурма

В соответствии с методом разделения переменных, мы ищем собственные функции оператора Лапласа на $C^{2,0}(K)$,

$$\Delta u = \lambda u, \quad u|_{\partial K} = 0,$$

в виде

$$u(x, y) = X(x)Y(y).$$

Краевое условие заставляет положить $X(0) = X(1) = 0$ и $Y(0) = Y(1) = 0$.

Подставив $u(x, y) = X(x)Y(y)$ в уравнение (6.18), получим $X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = \lambda X(x)Y(y)$, то есть

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda.$$

Первое слагаемое в левой части не зависит от y , второе не зависит от x , а сумма не зависит от x, y . Равенство должно выполняться для всех x, y . Поэтому оба слагаемых должны быть константами: $X''/X = \lambda_1$ и $Y''/Y = \lambda_2$. Мы приходим к спектральной задаче для оператора Лапласа на отрезке $[0, 1]$, которая решена в разделе 6.1.5. Её решения — $X(x) = \sin \pi kx$ и $Y(y) = \sin \pi ly$.

Итак, функции вида $u_{k,l}(x, y) = \sin \pi kx \sin \pi ly$ являются собственными функциями оператора Лапласа в пространстве $C^{2,0}(\Omega)$. Соответствующие собственные значения равны $-\pi^2(k^2 + l^2)$.

Чтобы свести задачу к конечномерной, мы ограничим оператор Лапласа на пространство, порожденное его собственными функциями, а именно

$$S_n^0 = \left\{ f(x, y) = \sum_{0 \leq k+l \leq n} a_{k,l} \sin \pi kx \sin \pi ly \right\}.$$

По предложению (6.1.10), оператор Лапласа симметричен и отрицательно определен в S_n^0 относительно скалярного произведения

$$(f, g) = \int_K f(x, y)g(x, y)dx dy$$

Поэтому любое решение уравнения (6.18) в пространстве S_n^0 является суммой стоячих волн:

$$u(x, y, t) = \sum_{1 \leq k+l \leq n} (a_{k,l} \cos \pi \sqrt{k^2 + l^2} t + b_{k,l} \sin \pi \sqrt{k^2 + l^2} t) \sin \pi kx \sin \pi ly$$

где $a_{k,l}, b_{k,l}$ находятся из начальных условий. Если начальное условие достаточно гладкое, но не лежит в S_n^0 , эта формула по-прежнему применима, но сумма будет бесконечной.

Упражнение 116. Выпишите аналог формулы (6.8): получите формулы, по которым, зная начальные условия, можно найти коэффициенты $a_{k,l}, b_{k,l}$.

6.1.8. Колебания круглой мембраны и функции Бесселя

Как и для уравнения колебаний струны, решение является суммой стоячих волн — периодических колебаний $u_{k,l}$. Но теперь частоты этих колебаний $\frac{\sqrt{k^2+l^2}}{2}$ при разных k, l не пропорциональны, см. задачи 5., 7.. Поэтому мембрана будет издавать не такой мелодичный звук, как струна: разные обертоны не будут созвучны. Это отвечает на вопрос: *почему струна поет, а барабан гудит?* Впрочем, этот ответ относится пока только к квадратному барабану — объекту весьма экзотическому. Гораздо чаще встречается круглый барабан, к изучению которого мы и переходим.

6.1.8 Колебания круглой мембраны и функции Бесселя

Рассмотрим круглую упругую мембрану D радиуса r_0 , край которой закреплен. Пусть точка мембраны $(x, y) \in D$ в момент времени t сместилась в вертикальном направлении на величину $w(x, y, t)$. Тогда функция w удовлетворяет волновому уравнению второго порядка и равна нулю на границе круга D :

$$w_{tt} = \Delta w, \quad w|_{\partial D} = 0. \quad (6.20)$$

Для решения этой задачи найдем собственные функции оператора Лапласа в круге. Рассмотрим пространство $V_0 = C_{2,0}(D)$, точки которого — непрерывные функции в круге D , C^2 -гладкие внутри круга и равные нулю на границе круга. Как и раньше, введём скалярное произведение на этом пространстве следующим образом:

$$(u, v) := \int_D u(x, y)v(x, y) dx dy \quad (6.21)$$

Так как оператор Лапласа симметричен и отрицательно определен относительно этого скалярного произведения, решениями уравнения (6.20) вновь будут суммы стоячих волн вида

$$w(t, x, y) = (a \cos \omega t + b \sin \omega t)u(x, y),$$

где $u(x, y)$ — одна из собственных функций оператора Лапласа на пространстве $C^{2,0}(D)$, а $\lambda = -\omega^2$ — соответствующее собственное значение.

Осталось решить спектральную задачу для оператора Лапласа в круге

$$\Delta u = \lambda u, \quad u \in C^{2,0}(D).$$

Мы не можем сразу применить метод разделения переменных к этой задаче, так как в декартовых координатах круг не является прямым произведением; зато в полярных — является.

Перейдем от координат (x, y) в круге к полярным координатам (r, φ) . Функция u при этом изменится, но мы сохраним для неё старое обозначение, и будем рассматривать функцию $u(r, \varphi)$. Уравнение примет вид

$$\lambda u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi}, \quad u(r_0, \varphi) = 0, \quad (6.22)$$

см. упражнение 8. и его решение.

6 Уравнения в частных производных и теоремы Штурма

Теперь разделим переменные: $u(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$. Имеем

$$\lambda R(r)\Phi(\varphi) = R''(r)\Phi(\varphi) + \frac{1}{r}R'(r)\Phi(\varphi) + \frac{1}{r^2}\Phi''(\varphi)R(r).$$

Если разделить обе части равенства на $R(r)\Phi(\varphi)$ и домножить на r^2 , мы получим

$$\lambda r^2 = r^2 \frac{R''(r)}{R(r)} + r \frac{R'(r)}{R(r)} + \frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}.$$

При фиксированном r уравнение на функцию Φ имеет вид $\Phi''/\Phi = \mu$, то есть $\Phi'' = \mu\Phi$. Но чтобы функция $u(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$ была корректно определена в круге, нужно, чтобы функция Φ была 2π -периодична: $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$. Мы пришли к спектральной задаче для оператора Лапласа на окружности. Она уже решена в разделе 6.1.3: собственные значения имеют вид $\mu = -n^2$, $n = 0, 1, 2, \dots$, а соответствующие собственные функции равны $\cos nx, \sin nx$. Итак, $\Phi(\varphi) = a \cos n\varphi + b \sin n\varphi$ для некоторого n и $\mu = -n^2$.

Наконец, уравнение на функцию R получается более сложным:

$$\lambda r^2 = r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} - n^2. \quad (6.23)$$

Напомним, что $\lambda < 0$. Пусть $\lambda = -\omega^2$. Получаем

$$r^2 R'' + rR' + (\omega^2 r^2 - n^2)R = 0. \quad (6.24)$$

Это уравнение зависит от параметра ω ; сделав замену $r \mapsto \omega r$, мы сведем задачу к случаю $\omega = 1$. Уравнение

$$r^2 R'' + rR' + (r^2 - n^2)R = 0 \quad (6.25)$$

называют *уравнением Бесселя*¹² порядка n .

Если разрешить уравнение Бесселя порядка n относительно старшей производной (то есть записать его в виде $R'' = \dots$), у него будет особенность при $r = 0$. Поэтому общая теория, которую мы развивали выше для линейных уравнений, к нему неприменима. Тем не менее, у уравнений Бесселя всегда есть аналитические решения — функции Бесселя.

Предложение 6.1.17. *При любом целом $n \geq 0$ уравнение Бесселя порядка n имеет единственное решение, аналитическое в нуле.*

Это решение имеет ноль порядка n в нуле, то есть имеет вид $\sum_{k=n}^{\infty} a_k r^k$. Ряд сходится на всей прямой, и даже на всей комплексной плоскости.

Определение 6.1.18. *Функцией Бесселя* порядка n называется аналитическое решение уравнения Бесселя порядка n , описанное в предложении 6.1.17, с условием нормировки $a_n = \frac{1}{2^n n!}$. Функция Бесселя обозначается J_n .

6.1.8. Колебания круглой мембраны и функции Бесселя

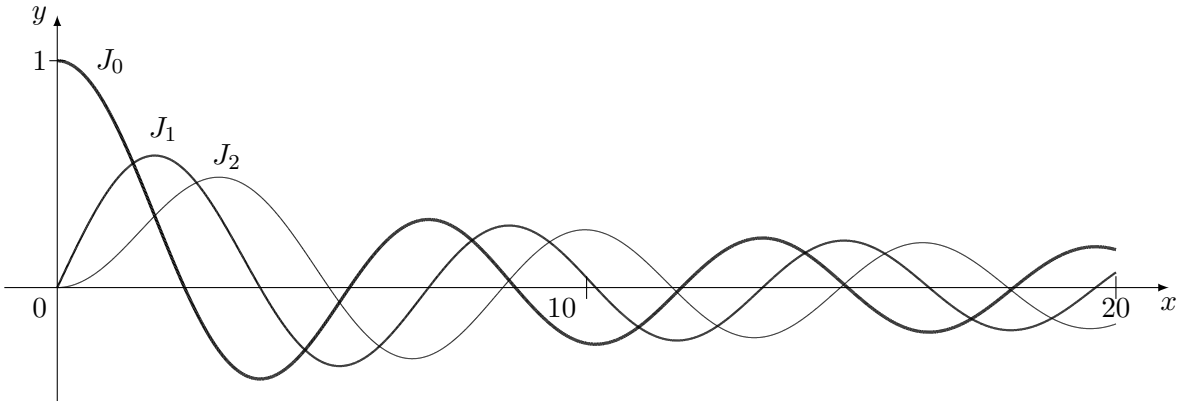


Рис. 6.2: Графики функций J_0 , J_1 и J_2 . По графикам видно, что $J_0(0) \neq 0$; $J_1(0) = 0$, $J_1'(0) \neq 0$; наконец, $J_2(0) = J_2'(0) = 0$

Графики функций Бесселя порядка 0, 1 и 2 показаны на рис. 6.2.

Предложение 6.1.17 является следствием общего результата о решениях линейных уравнений в окрестности фуксовой особой точки (см. раздел 6.1.8). В следующем разделе мы приведем прямое доказательство предложения 6.1.17 методом разложения в ряд, найдя ряды для функций Бесселя.

Так как решение уравнения (6.25) — функция Бесселя $J_n(r)$, исходное уравнение (6.24) имеет решение $R(r) = J_n(\omega r)$. Так как функция u должна удовлетворять граничному условию $u(r_0, \varphi) = R(r_0)\Phi(\varphi) = 0$, нам нужно, чтобы число ωr_0 было одним из нулей функции J_n . Рисунок 6.2 наводит на мысль, что у функций Бесселя бесконечно много нулей. Действительно, в разделе 6.2.3 мы получим следующее утверждение как следствие общей теории для уравнений Штурма.

Теорема 6.1.19. *У функций Бесселя $J_n(r)$ бесконечно много нулей, и при $r \rightarrow \infty$ расстояние между соседними нулями стремится к π .*

Если $n < m$, то на интервале между соседними нулями функции $J_n(r)$ всегда есть ноль функции $J_m(r)$.

Пусть $0 < r_{n,1} < r_{n,2} < \dots$ — положительные нули функции J_n . Положим $\omega_{n,j} = \frac{r_{n,j}}{r_0}$. Тогда функция $R(r) = J_n(\omega_{n,j}r)$ имеет ноль в точке r_0 .

Окончательно, собственные функции оператора Лапласа в круге радиуса r_0 имеют вид

$$u_{n,j}(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi) = J_n(\omega_{n,j}r)(a \cos n\varphi + b \sin n\varphi),$$

а соответствующие собственные значения равны $-\omega_{n,j}^2$, где $\omega_{n,j}$ выражаются через нули функций Бесселя: $\omega_{n,j} = \frac{r_{n,j}}{r_0}$. Каждому собственному значению оператора Лапласа соответствует двумерное пространство собственных функций (4.1.6), порожденное функциями $J_n(\omega_{n,j}r) \cos n\varphi$, $J_n(\omega_{n,j}r) \sin n\varphi$.

¹²Фридрих Вильгельм Бессель (1784 - 1846) — астроном и математик. Первым определил расстояние до звезды, используя звездный параллакс.

6 Уравнения в частных производных и теоремы Штурма

Поэтому колебания круглой мембраны — линейные комбинации стоячих волн:

$$w(t, r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} J_n(\omega_{n,j}r) \cos n\varphi (a_{n,j} \cos \omega_{n,j}t + c_{n,j} \sin \omega_{n,j}t) + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} J_n(\omega_{n,j}r) \sin n\varphi (b_{n,j} \cos \omega_{n,j}t + d_{n,j} \sin \omega_{n,j}t).$$

Теперь обсудим решение задачи Коши для круглой мембраны. Пусть нам известно начальное положение мембраны $w(0, r, \varphi) = p(r, \varphi)$, а начальная скорость мембраны нулевая; тогда можно положить $c_{n,j} = d_{n,j} = 0$, а коэффициенты $a_{n,j}, b_{n,j}$ должны быть выбраны так, что

$$p(r, \varphi) = \sum_{n,j} J_n(\omega_{n,j}r) (a_{n,j} \cos n\varphi + b_{n,j} \sin n\varphi).$$

Почему же такие коэффициенты существуют и как их найти?

В силу теоремы 6.1.16, собственные функции оператора Лапласа образуют ортогональный базис в пространстве $L_2(D) \supset C^{2,0}(D)$. Ортогональность функций $J_n(\omega_{n,j}r) \cos n\varphi$ и $J_n(\omega_{n,j}r) \sin n\varphi$ следует доказать непосредственно, так как у них собственные значения одинаковы.

Упражнение 117. Докажите, что $(J_n(\omega_{n,j}r) \cos n\varphi, J_n(\omega_{n,j}r) \sin n\varphi) = 0$.

Это означает, что любая C^2 -гладкая функция с нулевыми значениями на границе круга f представляется в виде суммы ряда:

$$f(r, \varphi) = \sum_{n,j} J_n(\omega_{n,j}r) (a_{n,j} \cos n\varphi + b_{n,j} \sin n\varphi), \quad (6.26)$$

причем коэффициенты $a_{n,j}, b_{n,j}$ вычисляются по формулам

$$a_{n,j} = \frac{(f, u_{n,j,1})}{(u_{n,j,1}, u_{n,j,1})}, \quad b_{n,j} = \frac{(f, u_{n,j,2})}{(u_{n,j,2}, u_{n,j,2})}. \quad (6.27)$$

В частности, начальное положение мембраны представляется в виде такого ряда. Формулы (6.27) позволяют найти коэффициенты разложения, а значит — найти движение мембраны с заданным начальным положением и нулевой начальной скоростью.

Похожие рассуждения работают, если начальная скорость мембраны ненулевая.

Упражнение 118. Найдите формулы для коэффициентов $a_{n,j}, b_{n,j}, c_{n,j}, d_{n,j}$, если известно начальное положение и скорость мембраны.

Мы не будем обсуждать сходимость рядов; требует доказательства и тот факт, что полученный ряд для решения сходится к гладкой функции. Кроме того, мы не будем обсуждать единственность решения задачи Коши.

6.1.8. Колебания круглой мембраны и функции Бесселя

Если начальное положение мембраны $p(r, \varphi)$ зависит только от r , ряд (6.26) превращается в *ряд Фурье-Бесселя*

$$p(r) = \sum_{n,j} a_{n,j} J_n(\omega_{n,j} r).$$

Он напоминает ряд Фурье, но роль синусов и косинусов играют функции Бесселя. Ряд Фурье-Бесселя, как и разложения функций в ряды по другим ортогональным базисам в функциональных пространствах, играет большую роль в задачах математической физики.

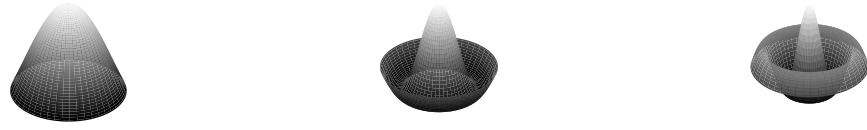


Рис. 6.3: Так выглядит мембрана, которая колеблется по закону $w(t, x, y) = J_0(r) \sin t$, при $t = \pi/2$. Радиус мембраны равен первому, второму и третьему нулю функции $J_0(r)$ соответственно.

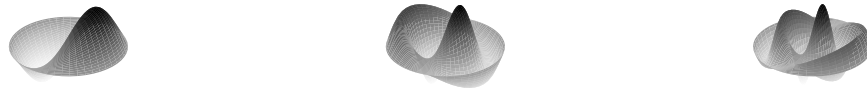


Рис. 6.4: Так выглядит мембрана, которая колеблется по закону $w(t, x, y) = J_1(r) \cos \varphi \sin t$, при $t = \pi/2$. Радиус мембраны равен первому, второму и третьему нулю функции $J_1(r)$ соответственно.

Ряды для функций Бесселя

В этом разделе мы докажем предложение 6.1.17, найдя степенные ряды для функций Бесселя J_n методом разложения в ряд. Уравнение Бесселя порядка n мы запишем в виде

$$r \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + (r^2 - n^2)R = 0. \quad (6.28)$$

Будем искать функцию Бесселя нулевого порядка в виде $J_0(r) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k$. Отметим, что

$$r \frac{d}{dr} \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k r^k.$$

Поэтому, подставляя ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k$ в уравнение Бесселя порядка 0 (уравнение (6.28) для $n = 0$), получаем:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k^2 a_k + a_{k-2}) r^k = 0.$$

Для удобства обозначений мы положили $a_{-1} = a_{-2} = 0$. Отсюда

$$k^2 a_k = -a_{k-2}$$

6.1.8. Колебания круглой мембраны и функции Бесселя

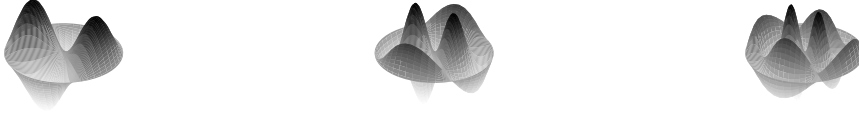


Рис. 6.5: Так выглядит мембрана, которая колеблется по закону $w(t, x, y) = J_2(r) \cos 2\varphi \sin t$, при $t = \pi/2$. Радиус мембраны равен первому, второму и третьему нулю функции $J_2(r)$ соответственно.

При $k = 1$ это дает $a_1 = a_{-1} = 0$. Следовательно,

$$a_1 = a_3 = a_5 = \dots = a_{2k+1} = 0$$

и

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k(2k-2)(2k-4) \dots 2)^2} a_0 = \frac{(-1)^k}{(k!)^2 2^{2k}} a_0$$

В силу условия нормировки, $J_0(0) = 1$, то есть $a_0 = 1$. Окончательно,

$$J_0(r) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{r}{2}\right)^{2k}.$$

Упражнение 119. Проверьте, что этот ряд сходится а) на всей числовой оси; б) на всей комплексной плоскости.

Теперь найдем ряд для функции J_n и проверим, что она является единственным (с точностью до пропорциональности) аналитическим на прямой решением уравнения Бесселя порядка n . Подставим ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k$ в уравнение Бесселя порядка n ; имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k^2 a_k + a_{k-2} - n^2 a_k) r^k = 0$$

(мы снова положили $a_{-1} = a_{-2} = 0$), откуда получаем рекуррентное соотношение $(k^2 - n^2)a_k + a_{k-2} = 0$, или

$$a_k = \frac{1}{k^2 - n^2} a_{k-2} \text{ при } k \neq n. \quad (6.29)$$

Так как $a_{-1} = a_{-2} = 0$, мы последовательно находим a_0, a_1, \dots, a_{n-1} из соотношения (6.29) и получаем, что все они равны нулю. Для $k = n$ рекуррентная формула имеет вид $0 \cdot a_n = a_{n-2}$, и из нее не следует $a_n = 0$.

Далее, для любого $k \geq 1$

$$\begin{aligned} 0 &= a_{n-1} = a_{n+1} = \dots = a_{n+2k+1}; \\ a_{n+2k} &= \frac{(-1)^k}{((2k+n)^2 - n^2)((2k+n-2)^2 - n^2) \dots ((n+2)^2 - n^2)} a_n = \\ &= \frac{(-1)^k}{(2k(2k+2n)) \cdot ((2k-2)(2k+2n-2)) \cdot \dots \cdot 2(2n+2)} a_n = \frac{(-1)^k n! a_n}{k!(n+k)! 2^{2k}}. \end{aligned} \quad (6.30)$$

Для функции Бесселя порядка n , в силу условия нормировки, $a_n = \frac{1}{n! 2^n}$. Поэтому $a_n = \frac{(-1)^k}{k!(n+k)! 2^{n+2k}}$ и

$$J_n(r) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{r}{2}\right)^{n+2k}. \quad (6.31)$$

Упражнение 120. Проверьте, что этот ряд тоже сходится а) на всей числовой оси; б) на всей комплексной плоскости при всех натуральных n .

Для любого аналитического решения уравнения Бесселя порядка n выполнены соотношения (6.30); значит, любое аналитическое решение пропорционально функции Бесселя порядка n .

Фуксовы особенности и функции Бесселя

Уравнения Бесселя имеют особенность в нуле, но, тем не менее, допускают аналитические решения. Это проявление общего факта о поведении аналитических решений вблизи особенностей уравнения, который мы сформулируем в этом разделе.

Мы не будем приводить доказательство, см. [?]. Отметим, что теорему обычно доказывают для уравнений с комплексным временем: переменную r считают комплексной.

Определение 6.1.20. Говорят, что линейное уравнение второго порядка имеет *фуксову особую точку* в нуле, если оно имеет вид

$$r^2 R'' + a_1(r) r R' + a_0(r) R = 0, \quad (6.32)$$

где $a_j(r)$ – аналитические функции в окрестности нуля.

Если функции $a_j(r)$ заменить на их значения в нуле, у нас получится уравнение Эйлера, решения которого — линейные комбинации функций вида r^λ , см. раздел 5.2.8. Оказывается, что в большинстве случаев решения уравнения (6.32) и решения соответствующего уравнения Эйлера одинаково ведут себя в нуле.

Определение 6.1.21. Число λ называется *характеристическим значением* уравнения (6.32), если функция r^λ является решением уравнения Эйлера $r^2 R'' + a_1(0) r R' + a_0(0) R = 0$; другими словами, если λ является корнем квадратного уравнения $\lambda(\lambda - 1) + a_1(0)\lambda + a_0(0) = 0$.

6.1.8. Колебания круглой мембраны и функции Бесселя

Напомним, что для линейных уравнений второго порядка пространство решений двумерно, поэтому достаточно описать два линейно независимых решения уравнения (6.32).

Теорема 6.1.22 (см. ¹³). *Пусть линейное уравнение второго порядка с фуксовой особенностью в нуле имеет вещественные характеристические значения λ_1, λ_2 . Если разность $\lambda_1 - \lambda_2$ нецелая, то уравнение имеет два решения вида $R(r) = r^{\lambda_{1,2}} \varphi_{1,2}(r)$, где $\varphi_{1,2}$ – аналитические функции в окрестности нуля, $\varphi_{1,2}(0) \neq 0$. Если же разность $\lambda_1 - \lambda_2$ – целое число, то уравнение имеет решение такого вида, соответствующее большему характеристическому значению.*

Уравнение Бесселя порядка n имеет фуксову особенность в нуле. Характеристическое уравнение имеет вид $\lambda(\lambda - 1) + \lambda - n^2 = 0$, его характеристические значения $-\lambda_{1,2} = \pm n$ – имеют целую разность. Поэтому по теореме 6.1.22 оно имеет решение вида $r^n \varphi(r)$, где функция φ аналитическая, $\varphi(0) \neq 0$.

Выше мы нашли такое решение методом разложения в ряд.

¹³См. Ю.С.Ильяшенко, С.Ю.Яковенко, Аналитическая теория дифференциальных уравнений. Том 1, гл.3.16.

6.2 Теоремы Штурма.

В этой главе мы будем рассматривать линейные неавтономные уравнения второго порядка:

$$\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0 \quad (6.33)$$

коэффициенты которых — непрерывные функции p, q . Вообще говоря, такие уравнения не решаются в квадратурах: решение нельзя представить в виде композиции интегрирований, арифметических действий и элементарных функций (экспонент, логарифмов, синусов и косинусов). Уравнения (6.33) имеют многочисленные приложения в физике; в частности, уравнения Бесселя из раздела 6.1.8 имеют вид (6.33) при $t \neq 0$, но имеют особенность в нуле.

6.2.1 Приведение к стандартному виду

Оказывается, уравнение (6.33) всегда можно упростить, избавившись от члена $p(t)\dot{x}$.

Предложение 6.2.1. Уравнение (6.33) можно привести к виду

$$\ddot{z} + Q(t)z = 0, \quad (6.34)$$

где $Q(t) = -\frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{2}\dot{p} + q$.

Уравнение вида (6.34) называется *приведённым*.

Доказательство. Достаточно сделать замену $z = xe^{\frac{1}{2}P}$, где $\dot{P}(t) = p(t)$. Покажем, как подобрать эту замену.

Пусть $x_1(t), x_2(t)$ — два линейно независимых решения уравнения (6.33). Вычислим определитель Вронского $W(t) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ \dot{x}_1 & \dot{x}_2 \end{vmatrix}$. По теореме Лиувилля-Остроградского (теорема 5.1.20) этот определитель равен $W(t) = W(0) \exp(\int \text{tr} A(t) dt) = Ce^{-P(t)}$, где $\dot{P}(t) = p(t)$. В частности, определитель Вронского для уравнения (6.33) постоянен если и только если оно приведённое, $p = 0$. Заметим, что при замене $z = xf(t)$ определитель Вронского умножается на $f^2(t)$:

$$\begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ \dot{z}_1 & \dot{z}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} fx_1 & fx_2 \\ f\dot{x}_1 + \dot{f}x_1 & f\dot{x}_2 + \dot{f}x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} fx_1 & fx_2 \\ f\dot{x}_1 & f\dot{x}_2 \end{vmatrix} = f^2 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ \dot{x}_1 & \dot{x}_2 \end{vmatrix}.$$

Поэтому замена $z(t) = x(t)e^{\frac{P}{2}}$ превращает уравнение (6.33) в уравнение с постоянным определителем Вронского, то есть в приведённое. Осталось вычислить новый коэффициент $Q(t)$. Имеем: $\dot{z} = e^{\frac{1}{2}P} (\dot{x} + \frac{1}{2}p(t)x)$, и

$$\begin{aligned} \ddot{z} &= e^{\frac{1}{2}P} \left(\ddot{x} + \frac{1}{2}\dot{p}(t)x + \frac{1}{2}p(t)\dot{x} + \frac{1}{2}p(t) \left(\dot{x} + \frac{1}{2}p(t)x \right) \right) = \\ &= e^{\frac{1}{2}P} \left(-p(t)\dot{x} - q(t)x + \frac{1}{2}\dot{p}(t)x + p(t)\dot{x} + \frac{1}{4}p^2(t)x \right) = \\ &= e^{\frac{1}{2}P} \left(-q(t)x + \frac{1}{2}\dot{p}(t)x + \frac{1}{4}p^2(t)x \right) = \left(-q(t) + \frac{1}{2}\dot{p}(t) + \frac{1}{4}p^2(t) \right) z. \end{aligned}$$

□

6.2.2 Теоремы Штурма о сравнении

Следующая теорема помогает исследовать нули линейных уравнений второго порядка.

Теорема 6.2.2 (Теорема Штурма¹⁴ о сравнении). *Рассмотрим два приведенных уравнения вида*

$$\ddot{x} + q(t)x = 0$$

и

$$\ddot{x} + Q(t)x = 0.$$

где функции q и Q непрерывны. Пусть (ненулевое) решение первого уравнения $x(t)$ обращается в ноль в точках a, b : $x(a) = x(b) = 0$.

- Пусть на отрезке $[a, b]$ выполнено неравенство $Q(t) > q(t)$. Тогда любое решение второго уравнения $X(t)$ обращается в ноль на **интервале** (a, b) .
- Пусть на отрезке $[a, b]$ выполнено неравенство $Q(t) \geq q(t)$. Тогда любое решение второго уравнения $X(t)$ обращается в ноль на **отрезке** $[a, b]$. При этом или оно обращается в ноль и на **интервале** (a, b) , или $q \equiv Q$, $X(a) = X(b) = 0$.

Геометрическое доказательство. ¹⁵

Мы дадим геометрическое доказательство более слабого утверждения: если на отрезке $[a, b]$ выполнено $Q(t) > q(t)$, то любое решение второго уравнения $X(t)$ обращается в ноль на **отрезке** $[a, b]$.

Так как функции q и Q непрерывны, к нашим уравнениям применима теорема существования и единственности решения дифференциального уравнения. Из неё следует, что множество нулей функции $x(t)$ дискретно и в этих нулях $\dot{x}(t)$ не обращается в ноль. Поэтому в качестве a, b можно взять *соседние* нули функции $x(t)$. Без ограничения общности можно считать, что $x(t)$ положительна на отрезке $[a, b]$, а тогда $\dot{x}(a) > 0$, $\dot{x}(b) < 0$.

Пусть решение второго уравнения $X(t)$ не имеет нулей на отрезке $[a, b]$. Будем считать, что $X(t) > 0$ на этом отрезке (если это не так, перейдем к функции $-X$).

Сведем оба наших дифференциальных уравнения второго порядка к системам двух дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -q(t)x \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} \dot{X} = Y \\ \dot{Y} = -Q(t)X \end{cases}$$

¹⁴Шарль Франсуа Штурм (1803 – 1855) – математик, известный своими работами в теории интегральных и дифференциальных уравнений. Известна теорема о количестве и расположении вещественных нулей многочлена, которая носит его имя.

¹⁵см. В.И. Арнольд, “Обыкновенные дифференциальные уравнения”, М: МЦНМО, 2012, раздел 3.27.7.

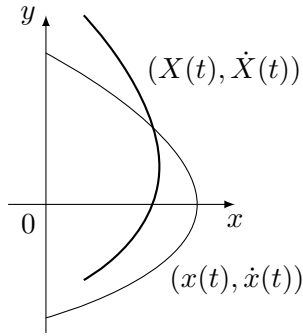


Рис. 6.6: Кривые $(x(t), \dot{x}(t))$ и $(X(t), \dot{X}(t))$ на плоскости Oxy на отрезке времени $t \in [a, b]$.

Заметим, что точка $(x(t), \dot{x}(t))$ сделала поворот вокруг нуля по часовой стрелке на плоскости Oxy , пройдя от точки $(0, \dot{x}(a))$ до точки $(0, \dot{x}(b))$. А точка $(X(t), \dot{X}(t))$ при $t \in [a, b]$ находится в открытой правой полуплоскости. Поэтому в какой-то момент времени $t \in (a, b)$ луч $l(t)$, выходящий из нуля и содержащий точку $(x(t), \dot{x}(t))$, обогнал луч $L(t)$, на котором лежит точка $(X(t), \dot{X}(t))$. Умножая функцию $X(t)$ на подходящую константу, добьемся того, чтобы в этот момент точки $(x(t), \dot{x}(t))$ и $(X(t), \dot{X}(t))$ совпадали (см. рис. (6.6)). Идея состоит в том, что луч $L(t)$ вращается вокруг нуля быстрее, чем луч $l(t)$, и поэтому такого не может быть. Действительно, рассмотрим функции $\varphi(t)$ и $\Phi(t)$, равные угловым координатам точек $(x(t), \dot{x}(t))$ и $(X(t), \dot{X}(t))$. Тогда их производные равны

$$\dot{\varphi} = \frac{-\dot{x}y + x\dot{y}}{x^2 + y^2} = \frac{-y^2 - q(t)x^2}{x^2 + y^2}$$

и, аналогично, $\dot{\Phi} = \frac{-y^2 - Q(t)x^2}{x^2 + y^2}$. Поэтому в точке t , для которой $(x(t), \dot{x}(t))$ и $(X(t), \dot{X}(t))$ совпадают, $|\dot{\Phi}| > |\dot{\varphi}|$, и луч $l(t)$ не может обогнать луч $L(t)$. □

*Аналитическое доказательство.*¹⁶ Сначала докажем первое утверждение теоремы. Как и раньше (см. геометрическое доказательство), можно считать, что $x(t)$ и $X(t)$ положительны на интервале (a, b) , $\dot{x}(a) > 0$ и $\dot{x}(b) < 0$.

Умножим первое уравнение на X , а второе на x , и запишем их разность:

$$X\ddot{x} - x\ddot{X} = (Q(t) - q(t))Xx.$$

Интегрируя по отрезку $[a, b]$, получаем

$$\int_a^b X\ddot{x} - x\ddot{X} dt = \int_a^b (Q(t) - q(t))Xx dt. \tag{6.35}$$

¹⁶см. Ф. Трикоми, "Дифференциальные уравнения", М.: Изд. иностранной литературы, 1962, стр. 133 - 136.

Правая часть строго больше нуля. Но интеграл в левой части равен

$$\int_a^b (X\ddot{x} - x\ddot{X})dt = \int_a^b \frac{d}{dt}(X\dot{x} - x\dot{X})dx = (X\dot{x} - x\dot{X})|_a^b = X(b)\dot{x}(b) - X(a)\dot{x}(a),$$

последнее равенство следует из того, что $x(a) = x(b) = 0$. Так как $\dot{x}(a) > 0, \dot{x}(b) < 0, X(a) \geq 0, X(b) \geq 0$, то это выражение неположительно. Противоречие.

С помощью равенства (6.35) можно доказать и второе утверждение теоремы. Действительно, пусть $q \leq Q$ и $X(t) > 0$ на интервале (a, b) . Тогда правая часть равенства (6.35) неотрицательна и равна нулю только при $Q \equiv q$, а левая часть неположительна и равна нулю только при $X(a) = X(b) = 0$. □

Следствие 6.2.3. *Между любыми двумя нулями решения уравнения $\ddot{x} + q(t)x = 0$ лежит ноль любого другого не пропорционального ему решения того же уравнения.*

Доказательство. Достаточно применить теорему о сравнении для $q = Q$. □

Следствие 6.2.4. *Пусть $q(t) < 0$ на отрезке $[a, b]$. Тогда любое ненулевое решение уравнения $\ddot{x} + q(t)x = 0$ имеет не более одного нуля на этом отрезке.*

Доказательство. Пусть $\lambda > 0$ таково, что на нашем отрезке $q(t) < -\lambda < 0$. Мы применим теорему Штурма для уравнений $\ddot{x} + q(t)x = 0$ и $\ddot{x} - \lambda x = 0$. Заметим, что функция $e^{\sqrt{\lambda}t}$ является решением уравнения $\ddot{x} - \lambda x = 0$ и нигде не обращается в ноль. Но по теореме Штурма она должна обращаться в ноль между любыми двумя нулями решения уравнения $\ddot{x} + q(t)x = 0$.

Поэтому у решения уравнения $\ddot{x} + q(t)x = 0$ не более одного нуля. □

Следствие 6.2.5. *Пусть на отрезке $[a, b]$ функция $q(t)$ удовлетворяет неравенствам $m^2 < q(t) < M^2$, δ — расстояние между какими-то соседними нулями решения уравнения $\ddot{x} + q(t)x = 0$. Тогда*

$$\frac{\pi}{M} < \delta < \frac{\pi}{m}.$$

В частности, если неравенство $m^2 < q(t) < M^2$ выполняется на всей числовой оси, любое решение уравнения $\ddot{x} + q(t)x = 0$ имеет бесконечно много нулей.

Доказательство. Достаточно сравнить наше уравнение с уравнениями $\ddot{x} + m^2x = 0$ и $\ddot{x} + M^2x = 0$, решения которых — $\sin(mt + \varphi)$ и $\sin(Mt + \psi)$ соответственно. Мы получим, что между двумя соседними нулями функции $\sin(mt + \varphi)$ для любого φ есть ноль нашей функции, поэтому $\delta < \frac{\pi}{m}$. С другой стороны, между двумя соседними нулями нашей функции есть ноль функции $\sin(Mt + \psi)$ для любого ψ , откуда $\frac{\pi}{M} < \delta$. □

6.2.3 Нули функции Бесселя

Мы применим к уравнению Бесселя результаты раздела 6.2.2, чтобы доказать теорему 6.1.19 о её нулях. Сначала воспользуемся предложением 6.2.1 и приведем уравнение Бесселя к виду $\ddot{x} + q(t)x = 0$. Замена в этом случае имеет вид $R = \frac{u}{\sqrt{r}}$, и в результате получается приведённое уравнение Бесселя

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \left(1 + \frac{\frac{1}{4} - n^2}{r^2}\right) u = 0. \quad (6.36)$$

Итак, для приведённого уравнения Бесселя функция $q(t) = 1 + \frac{\frac{1}{4} - n^2}{t^2}$ ограничена и стремится к 1. Значит, по теореме Штурма о сравнении (см. следствие 6.2.5) у функций Бесселя $J_n(t)$ бесконечно много нулей, и при $t \rightarrow \infty$ расстояние между нулями стремится к π . Первое утверждение теоремы 6.1.19 доказано.

На самом деле, можно доказать более сильное утверждение: $J_n(t) = c \frac{\cos(t-\theta)}{\sqrt{t}} + O(t^{-\frac{3}{2}})$ для некоторых c, θ .

Упражнение 121. Пользуясь теоремой Штурма о сравнении, докажите второе утверждение теоремы 6.1.19: если $n < m$, то между любыми двумя нулями функции $J_n(t)$ всегда есть ноль функции $J_m(t)$.

6.2.4 Задача Штурма–Лиувилля

На примере уравнения колебаний мембраны мы видели, что большое значение имеют нули решения уравнения (6.33). Это мотивирует такую задачу: *найти решения уравнения (6.33), удовлетворяющие условиям $x(a) = 0, x(b) = 0$* . Решение с такими граничными условиями может и не существовать, в отличие от решения дифференциального уравнения с обычными начальными условиями $x(a) = x_1, x'(a) = y_1$, которое существует всегда.

Задачей Штурма–Лиувилля называется уравнение

$$\ddot{x} + (Q(t) + \lambda R(t))x = 0 \quad (6.37)$$

с краевыми условиями

$$x(a) = 0, x(b) = 0.$$

Здесь функции Q, R непрерывны на $[a, b]$ и $R(t) > 0$. Значения λ , при которых уравнение имеет ненулевое решение, называются *собственными значениями* задачи Штурма – Лиувилля. Действительно, эти числа являются собственными значениями оператора

$$x \mapsto B(x) = \frac{1}{R(t)}(-\ddot{x} + Q(t)x)$$

на пространстве $C^{2,0}([a, b])$ дважды непрерывно дифференцируемых функций на $[a, b]$ с нулевыми граничными значениями.

Мы приведем без доказательства теорему о свойствах решений задачи Штурма–Лиувилля.

Определим скалярное произведение с весом $R(t)$ формулой

$$(f, g) := \int_a^b R(t)f(t)g(t)dt. \quad (6.38)$$

Теорема 6.2.6. Множество собственных значений задачи Штурма – Лиувилля дискретно и имеет вид $\{\lambda_0, \lambda_1, \dots\}$, где $\lambda_i < \lambda_{i+1}$, $\lambda_n \rightarrow \infty$.

Каждому значению λ_k соответствует единственное (с точностью до домножения на константу) решение $x_k(t)$, которое имеет ровно k нулей на интервале (a, b) .

Решения x_k попарно ортогональны на отрезке $[a, b]$ относительно скалярного произведения (6.38): $(x_k, x_l) = 0$ при $k \neq l$.

Упражнение 122. Решите задачу Штурма – Лиувилля для $[a, b] = [0, 2\pi]$, $Q(t) \equiv 0$, $R(t) \equiv 1$. Проверьте, что утверждение теоремы верно. С какой скоростью растут собственные значения λ_n ?

Мы закончим этот раздел серией задач, цель которой — доказать теорему 6.2.6. Доказательство также можно найти в книге¹⁷.

1. Докажите, что оператор B симметричен относительно скалярного произведения (6.38): для любых двух C^2 -гладких функций f, g , обращающихся в ноль в точках a, b , выполнено $(f, Bg) = (Bf, g)$.

Указание: симметричность оператора $x \mapsto \ddot{x}/R(t)$ доказывается так же, как симметричность оператора $x \rightarrow \ddot{x}$ в разд. 6.1. Симметричность второго слагаемого очевидна.

2. Выведите из предыдущей задачи последнее утверждение теоремы 6.2.6, считая, что предыдущие утверждения этой теоремы уже установлены.

Указание: см. предложение 6.1.12 раздела 6.1.

3. Докажите, что два решения задачи Штурма–Лиувилля с одним и тем же λ пропорциональны, то есть все собственные значения оператора B однократны.

Указание: добейтесь того, чтобы у этих решений совпадала производная в точке a , и заключите, что они равны по теореме существования и единственности.

В следующих задачах мы изучим, как ведут себя корни решений уравнения (6.37) с начальным условием $x(a) = 0$, $x'(a) = 1$ при изменении параметра λ .

Условие $x'(a) = 1$ нужно, чтобы выделить одно решение уравнения; так как разные решения уравнения с начальным условием $x(a) = 0$ пропорциональны, на расположение корней это условие не влияет.

¹⁷Ф. Хартман, “Обыкновенные дифференциальные уравнения”.

6 Уравнения в частных производных и теоремы Штурма

Мы будем считать, что функция Q определена на всей прямой; если она определена только на отрезке $[a, b]$, мы доопределим её константой.

4. (а) Докажите, что для любой непрерывной функции $q(t)$ ненулевое решение уравнения $\ddot{x} + q(t)x = 0$ не может иметь кратного корня $x(c) = 0, x'(c) = 0$.

(б) Докажите, что корни решений уравнения (6.37) на прямой с начальным условием $x(a) = 0, x'(a) = 1$, гладко зависят от λ .

Указание: это общий факт — корни функции гладко зависят от функции, если они не кратные. Для доказательства примените теорему о неявной функции к условию $x(\lambda, t) = 0$, где $x(\lambda, t)$ — решение уравнения (6.37) с начальным условием $x(a) = 0, x'(a) = 1$.

В силу предыдущей задачи мы можем говорить о корнях решения как о функциях, зависящих от λ . Правда, мы пока не знаем, сколько их.

5. Докажите, что для достаточно большого по модулю отрицательного λ решение уравнения (6.37) с начальным условием $x(a) = 0, x'(a) = 1$ не обращается в ноль на полуинтервале $(a, b]$.

Указание: воспользуйтесь следствием 6.2.4.

6. Докажите, что при большом λ расстояние между соседними корнями уравнения 6.37 с начальным условием $x(a) = 0, x'(a) = 1$ имеет порядок $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$.

Указание: примените следствие 6.2.5.

7. Докажите, что при любом λ эти корни образуют дискретное множество — в частности, их конечное или счетное число, а на любом конечном отрезке — лишь конечное число.

Указание: докажите, что если функция имеет только простые корни, то множество её корней дискретно.

Таким образом, мы можем перенумеровать все корни на луче $[a, +\infty)$ в порядке возрастания:

$a = t_0(\lambda) < t_1(\lambda) < t_2(\lambda) \dots$; каждая функция t_n гладкая в области определения, но если при каких-то значениях λ корней конечное число n , то функции $t_k, k > n$ будут не определены.

8. Покажите, что между соседними корнями $t_n(\lambda_0), t_{n+1}(\lambda_0)$ всегда есть один из корней $t_j(\lambda_0 + \delta)$ для $\delta > 0$.

Указание: воспользуйтесь теоремой Штурма о сравнении.

9. Докажите, что при увеличении λ корни уравнения 6.37 с начальным условием $x(a) = 0, x'(a) = 1$, расположенные на луче $(a, +\infty)$, монотонно движутся влево: все функции $t_n, n > 0$ строго монотонно убывают.

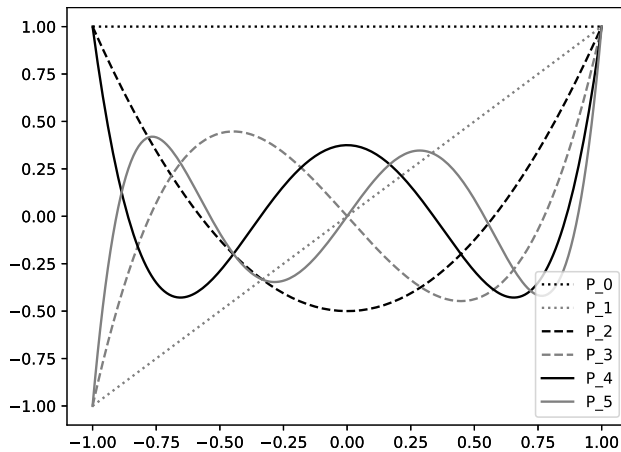


Рис. 6.7: Графики многочленов Лежандра P_n на отрезке $[-1, 1]$ для $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Указание: найдите самый левый корень уравнения, который НЕ сдвинулся влево при переходе от λ_0 к $\lambda_0 + \delta$, и придите к противоречию с предыдущей задачей.

10. Докажите, что задача Штурма – Лиувилля имеет счетное число однократных собственных значений $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 \dots$, где $\lambda_n \rightarrow \infty$, с собственными функциями $x_k(t)$, причем $x_k(t)$ имеет ровно k нулей на интервале (a, b) .

Эта задача завершает доказательство теоремы 6.2.6.

Указание: Рассмотрим решения уравнения (6.37) на прямой с начальными условиями $x(a) = 0$, $x'(a) = 1$. Пусть λ возрастает от $-\infty$ до $+\infty$. Корни решений этого уравнения $t_n(\lambda)$ монотонно движутся влево, то есть при некоторых значениях λ очередной корень приходит на отрезок $[a, b]$. Это и есть искомые собственные значения задачи Штурма-Лиувилля. Остальные свойства собственных функций и собственных значений следуют из предыдущих задач.

6.3 Ортогональные многочлены и функции Бесселя

В этом разделе мы опишем замечательные собственные функции некоторых линейных дифференциальных операторов — ортогональные многочлены. Метод ренормализации, который мы тоже изложим, позволяет связать их с функциями Бесселя.

6.3.1 Многочлены Лежандра

Определение 6.3.1. Многочлены Лежандра¹⁸ — это система многочленов $P_n(t)$, для которых

- P_n имеет степень n ;
- P_n попарно ортогональны на отрезке $[-1, 1]$ относительно скалярного произведения $(f, g) = \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt$;
- $P_n(1) = 1$.

Многочлены Лежандра можно получить, взяв набор многочленов $1, t, t^2, \dots$ и ортогонализовав его методом Грама¹⁹ – Шмидта²⁰. Первые три многочлена Лежандра: $P_0(t) = 1, P_1(t) = t, P_2(t) = \frac{3t^2}{2} - \frac{1}{2}$.

Упражнение 123. Вычислите многочлены Лежандра третьей и четвертой степени.

Предложение 6.3.2. Многочлен Лежандра P_n — это собственная функция дифференциального оператора

$$L = \frac{d}{dt}(1-t^2)\frac{d}{dt}$$

с собственным значением $\lambda_n = n(n+1)$.

Доказательство. Докажем, что для каждого n оператор L имеет собственную функцию, которая является многочленом степени n . Обозначим через \mathcal{P}_n пространство многочленов степени не ниже n . Оператор L действует на \mathcal{P}_n , переводя моном t^d в многочлен

$$L(t^d) = ((1-t^2)dt^{d-1})' = d(d-1)t^{d-2} - d(d+1)t^d$$

для $d = 1, \dots, n$; кроме того, $L(1) = 0$. Эта формула показывает, что в базисе $1, t, t^2, \dots, t^n$ оператор L имеет верхне-треугольную матрицу с диагональными элементами $(0, -2, -6, \dots, -n(n+1))$. Значит, эти элементы и являются собственными числами оператора L в пространстве \mathcal{P}_n , причем собственная функция с собственным значением $-d(d+1)$ — это многочлен степени d .

Докажем теперь, что собственные функции оператора L , нормированные условием $P_n(1) = 1$, — это многочлены Лежандра. Для этого докажем, что в пространстве \mathcal{P}_n со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt \tag{6.39}$$

¹⁸Адриен Мари Лежандр (1752 – 1833) — математик, известный своим вкладом в теорию эллиптических функций, теорию чисел, вариационное исчисление, теорию дифференциальных уравнений.

¹⁹Йёрген Педерсен Грам (1850 – 1916) — математик, известный своими работами в математической статистике, теории чисел и линейной алгебре.

²⁰Эрхард Шмидт (1876 – 1959) — математик, работавший в области теории функций и функционального анализа.

6.3.2. Теорема Мелера-Гейне для многочленов Лежандра.

оператор L самосопряжен. Действительно,

$$(Lf, g) = \int_{-1}^1 \frac{d}{dt} ((1-t^2)f'(t)) \cdot g(t) dt = (1-t^2)f'(t)g(t)|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 (1-t^2)f'(t)g'(t) dt.$$

Внеинтегральный член в этом выражении равен нулю из-за множителя $(1-t^2)$, а в интеграл функции f и g входят симметрично. Значит, их можно поменять местами:

$$(Lf, g) = (Lg, f).$$

Итак, оператор L самосопряжен. Значит, его собственные функции ортогональны. Как установлено выше, они являются многочленами степени $0, 1, 2, \dots, n$. Следовательно, после нормировки они совпадают с многочленами Лежандра. \square

Итак, n -й многочлен Лежандра удовлетворяет дифференциальному уравнению $LP_n + n(n+1)P_n = 0$, то есть уравнению второго порядка

$$\frac{d}{dt}((1-t^2)x') + n(n+1)x = 0. \quad (6.40)$$

Следующее утверждение немедленно вытекает из определения многочленов Лежандра.

Предложение 6.3.3. *Многочлены Лежандра четной степени — четные функции, а нечетной степени — нечетные.*

Доказательство. Рассмотрим оператор симметрии S :

$$(Sf)(t) = f(-t).$$

Оператор S сохраняет пространства $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_2 \subset \mathcal{P}_3 \subset \dots \subset \mathcal{P}_n$ и скалярное произведение (6.39). Заметим, что многочлен P_k ортогонален пространству \mathcal{P}_{k-1} в силу построения; следовательно, многочлен SP_k тоже ортогонален пространству \mathcal{P}_{k-1} . Но такой многочлен — единственный с точностью до пропорциональности. Значит, SP_k пропорционален P_k .

Старший член многочлена четной степени переходит в себя при симметрии S , а нечетной степени — меняет знак. Значит,

$$SP_{2n} = P_{2n}, \quad SP_{2n-1} = -P_{2n-1}.$$

Это и значит, что многочлен P_{2n} — четная функция, а P_{2n-1} — нечетная. \square

6.3.2 Теорема Мелера-Гейне для многочленов Лежандра.

Ренормализация

Ренормализация — это совершенно новый способ перехода к пределу, непривычный для традиционного анализа. Рассмотрим последовательность функций $f_n: [0, \frac{1}{n}] \rightarrow$

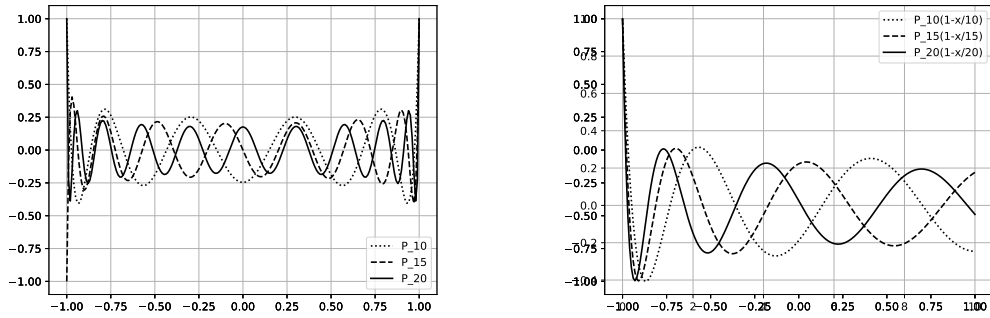


Рис. 6.8: Графики многочленов Лежандра P_{10}, P_{15}, P_{20} на отрезке $[-1, 1]$ (слева); графики функций $P_n(1 - \frac{x}{n})$ для $n = 10, 15, 20$ (справа).

\mathbb{R} . Куда она может сходиться при $n \rightarrow \infty$? На первый взгляд, никуда: при $n \rightarrow \infty$ области определения функций f_n вырождаются в точку. Однако функции

$$g_n : x \mapsto f\left(\frac{x}{n}\right)$$

все определены на отрезке $[0, 1]$ и могут сходиться к пределу, содержащему большую информацию о последовательности f_n . Аналогичную операцию можно производить над множествами.

Упражнение 124. Пусть C — классическое Канторово совершенное множество. К чему сходится последовательность множеств

$$f_n(C \cap [0, 3^{-n}]), \text{ где } f_n(x) = 3^n x?$$

Упражнение 125. Пусть f — C^1 -гладкая функция, $f(0) = 0$. К чему сходятся функции $g_n(x) = nf(x/n)$ на отрезке $[-1, 1]$?

Подсказка. График функции g_n можно получить, если рассматривать график функции f на отрезке $[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$ в увеличительное стекло, дающее увеличение в n раз.

6.3.2.1 Формулировка теоремы Мелера – Гейне

Некоторое понятие о поведении последовательности P_n вблизи точки $t = 1$ дают графики функции P_{10}, P_{15}, P_{20} на отрезке $[-1, 1]$ (см. рис. 6.8 слева).

Эти графики резко отличаются друг от друга. Но мы увидим, что если правильно перемасштабировать графики вблизи точки 1, они будут иметь примерно одинаковую форму для больших n .

Рассмотрим функции $P_n(1 - \frac{x}{n})$ (см. рис. 6.8 справа) Можно сказать, что мы рассматриваем график функции P_n вблизи точки 1 в “увеличительное стекло”, которое растягивает график в n раз вдоль оси Ox , ср. с задачей 125. Видно, что эти функции

6.3.2. Теорема Мелера-Гейне для многочленов Лежандра.

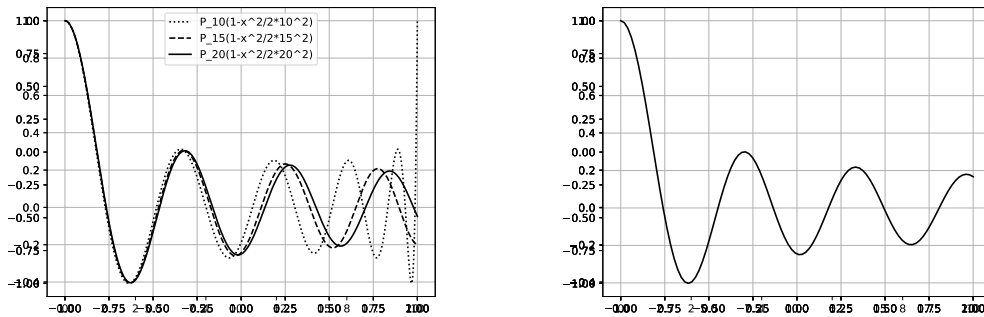


Рис. 6.9: Графики функций $P_n(1 - \frac{x^2}{2n^2})$ (слева) и функции J_0 (справа).

не сходятся: первый положительный ноль функции приближается к нулю примерно линейно по n . Это наводит на мысль, что правильнее взять увеличительное стекло, которое растягивает вдоль оси Ox в n^2 раз. Действительно, функции $P_n(1 - \frac{r^2}{n^2})$ сходятся при $n \rightarrow \infty$, причем их предел связан с функцией Бесселя.

Чтобы проиллюстрировать это, нарисуем графики функций

$$x_n : r \mapsto P_n(1 - \frac{r^2}{2n^2})$$

и график функции $J_0(r)$.

Эти рисунки подсказывают следующее утверждение.

Теорема 6.3.4 (Теорема Мелера²¹-Гейне²²).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(1 - \frac{r^2}{2n^2}) = J_0(r).$$

Следующие разделы посвящены доказательству этого утверждения. Идея состоит в том, чтобы выписать дифференциальные уравнения для функций $P_n(1 - \frac{z^2}{2n^2})$ и проверить сходимость этих уравнений к уравнению Бесселя. Затем из сходимости уравнений вывести сходимость решений, несмотря на наличие особенности в правой части уравнений.

Сходимость дифференциальных уравнений и сходимость тейлоровских коэффициентов

Напомним, что функция J_0 удовлетворяет уравнению Бесселя

$$r \frac{d}{dr} (r \frac{dx}{dr}) + r^2 x = 0 \quad (6.41)$$

²¹Фердинанд Густав Мелер (1835 – 1895) — математик, занимавшийся вопросами теории потенциала и их приложениями к теории электромагнетизма.

²²Генрих Эдуард Гейне (1821 – 1881), математик, известный своими работами в теории специальных функций и вещественном анализе.

6 Уравнения в частных производных и теоремы Штурма

с начальным условием

$$x(0) = 1, x'(0) = 0.$$

Ренормализованный многочлен Лежандра

$$x_n(r) = P_n\left(1 - \frac{r^2}{2n^2}\right)$$

удовлетворяет уравнению с близкой левой частью

$$r \frac{d}{dr} \left(r \frac{dx}{dr} \cdot \left(1 - \frac{r^2}{4n^2}\right) \right) + \left(1 + \frac{1}{n}\right) r^2 x = 0 \quad (6.42)$$

с тем же начальным условием $x(0) = 1, x'(0) = 0$. Подробный вывод этого уравнения выглядит так. Сделаем в уравнении (6.40) замену $t = 1 - \frac{r^2}{2n^2}$. Так как $\frac{dx}{dt} = -\frac{dx}{dr} \frac{n^2}{r}$, получим

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \left((1-t^2) \frac{dx}{dt} \right) + n(n+1)x = -\frac{d}{dt} \left(\left(2 - \frac{r^2}{2n^2}\right) \frac{r^2}{2n^2} \frac{dx}{dr} \frac{n^2}{r} \right) + n(n+1)x = \\ &= -\frac{d}{dt} \left(\left(2 - \frac{r^2}{2n^2}\right) \frac{r}{2} \frac{dx}{dr} \right) + n(n+1)x = \frac{n^2}{r} \frac{d}{dr} \left(\left(1 - \frac{r^2}{4n^2}\right) r \frac{dx}{dr} \right) + n(n+1)x = \\ &= n^2 \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{dx}{dr} \cdot \left(1 - \frac{r^2}{4n^2}\right) \right] + \left(1 + \frac{1}{n}\right) x \right). \quad (6.43) \end{aligned}$$

После умножения на r^2/n^2 получим (6.42).

При $n \rightarrow \infty$, уравнение (6.42) превращается в уравнение (6.41). Однако мы не можем воспользоваться теоремой о непрерывной зависимости решения уравнения от параметра. Дело в том, что основные теоремы относятся к уравнениям с гладкой правой частью, разрешенным относительно старшей производной, то есть имеющим вид $x'' = f(t, x, x')$. Если же уравнения (6.41) и (6.42) представить в таком виде, правые части будут иметь особенность в нуле. Поэтому теорема о непрерывной зависимости решения уравнения от параметра неприменима.

Разложение решений в ряд спасает положение.

Пусть

$$J_0(r) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k, \quad x_n(r) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} r^k.$$

Так как x_n — многочлен степени $2n$, последний ряд конечен и обрывается на члене $a_{n,2n}$, но это обстоятельство не упрощает предельного перехода при $n \rightarrow \infty$.

Найдем коэффициенты a_k и $a_{n,k}$. Рекуррентная формула для коэффициентов a_k получена в разделе 6.1.8 и имеет вид

$$a_0 = 1, \quad a_{2k} = c_k a_{2k-2}, \quad \text{где } c_k = -\frac{1}{k^2}; \quad a_{2k+1} = 0.$$

Аналогичным образом, подставляя ряд для x_n в уравнение (6.42) и используя $x_n(0) = P_n(0) = 1$, получаем

$$a_{n,0} = 1, \quad a_{n,2k} = c_{n,k} a_{n,2k-2}, \quad \text{где } c_{n,k} = \frac{1}{4n^2} \left(1 - \frac{2}{k}\right) - \frac{1 + \frac{1}{n}}{k^2}; \quad a_{n,2k+1} = 0.$$

6.3.2. Теорема Мелера-Гейне для многочленов Лежандра.

Мы видим, что

$$c_{n,k} \rightarrow c_k \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Отсюда следует, что

$$a_{n,k} \rightarrow a_k \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

поскольку

$$a_{2k} = \prod_{l=1}^k c_l, \quad a_{n,2k} = \prod_{l=1}^k c_{n,l}. \quad (6.44)$$

Итак, тейлоровские коэффициенты функций x_n сходятся к тейлоровским коэффициентам функции J_0 . Но отсюда еще не следует сходимость самих функций, как показывает следующий пример.

Пример 6.3.5. Пусть $f_n(r) = n!r^n$. Тогда все тейлоровские коэффициенты функций f_n стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$, но последовательность f_n расходится всюду, кроме нуля.

Однако справедлива следующая лемма.

От сходимости коэффициентов к сходимости функций

Лемма 6.3.6 (О почленном переходе к пределу для степенных рядов). Пусть степенные ряды

$$f(z) = \sum b_m z^m, \quad f_n(z) = \sum b_{n,m} z^m,$$

сходятся в круге $|z| < R$, и пусть $b_m = \lim_{n \rightarrow \infty} b_{n,m}$. Пусть, кроме того, существуют такие C, K, N , что

$$|b_{n,m}| < CR^{-m} \quad \forall m > K, n > N. \quad (6.45)$$

Тогда $f_n \Rightarrow f$ в любом диске $|z| \leq r < R$.

Эта лемма близка к известной из курса математического анализа теореме о почленном переходе к пределу в числовом ряде. Заметим, что если ряд сходится в круге радиуса больше R , то коэффициенты ряда всегда можно оценить сверху геометрической прогрессией вида CR^{-m} . Условие (6.45) означает, что оценка равномерна по n , то есть величина C не зависит от n .

Доказательство. Возьмем $r < R$. Заметим, что для любого K

$$|f_n(z) - f(z)| \leq \left| \sum_{k=1}^K b_{n,k} z^k - \sum_{k=1}^K b_k z^k \right| + \left| \sum_{k=K+1}^{\infty} b_{n,k} z^k \right| + \left| \sum_{k=K+1}^{\infty} b_k z^k \right| \quad (6.46)$$

Второе слагаемое мы будем оценивать следующим образом:

$$\left| \sum_{K+1}^{\infty} b_{n,k} z^k \right| \leq \sum_{K+1}^{\infty} CR^{-k} r^k = \frac{C(r/R)^{K+1}}{1 - r/R}. \quad (6.47)$$

6 Уравнения в частных производных и теоремы Штурма

Понятно, что из неравенства (6.45) следует аналогичное неравенство для b_m , поэтому таким же образом можно оценить и третье слагаемое.

Теперь приступим к доказательству того, что $f_n \rightrightarrows f$ в круге радиуса r . Фиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем K достаточно большим, чтобы второе и третье слагаемое в (6.46) были меньше ε ; это возможно в силу (6.47). Фиксировав K , выберем N таким образом, чтобы при $n > N$ первое слагаемое было меньше ε ; это возможно, так как $b_{n,m} \rightarrow b_m$. Мы показали, что для любого $0 < r < R$ и любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать N , так что при $|z| < r$, $n > N$ выполнено неравенство $|f_n(z) - f(z)| < 3\varepsilon$. Это и означает, что $f_n \rightrightarrows f$ в любом диске $|z| \leq r < R$. \square

Окончание доказательства

Вернемся к доказательству теоремы Мелера – Гейне. Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 6.3.7. Пусть степенные ряды $f(z) = \sum a_{2k}z^{2k}$, $f_n(z) = \sum a_{n,2k}z^{2k}$ сходятся во всей плоскости. Пусть их коэффициенты выражаются формулами $a_{2k} = \prod_{l=1}^k c_l$, $a_{n,2k} = \prod_{l=1}^k c_{n,l}$, где c_l и $c_{n,l}$ – комплексные числа, такие что $c_l \rightarrow 0$ при $l \rightarrow \infty$ и $c_{n,l} \rightarrow 0$ при $\min(n, l) \rightarrow \infty$. Кроме того, пусть $c_{n,l} \rightarrow c_l$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда $f_n \rightrightarrows f$ в любом диске.

Доказательство. Для доказательства проверим условия леммы 6.3.6 на коэффициенты a_{2k} , $a_{n,2k}$ при любом $R > 0$. Очевидно, что $a_{n,2k} \rightarrow a_{2k}$ при $n \rightarrow \infty$. Проверим условие (6.45) для коэффициентов $a_{n,2k}$. Фиксируем произвольное R . Возьмем K и N такими, что

$$|c_{n,l}| < R^{-2} \text{ при } n > N, l > K.$$

Тогда для любого $n > N, k > K$

$$|a_{n,2k}| \leq |a_{n,2K}| R^{2K-2k}. \quad (6.48)$$

Положим $C = R^{2K} \sup_n a_{n,2K}$; этот супремум конечен, так как последовательность $a_{n,2K}$ сходится к a_{2K} . Теперь из (6.48) следует неравенство $a_{n,2k} \leq CR^{-2k}$ для всех $n > N, k > K$. Условия леммы 6.3.6 проверены; лемма 6.3.7 доказана. \square

Из леммы 6.3.7 немедленно следует теорема Мелера – Гейне.

6.3.3 Многочлены Якоби

Развитые выше методы позволяют исследовать существенно более общий класс ортогональных многочленов — многочлены Якоби — и их связь с функциями Бесселя.

Многочлены Якоби как собственные функции линейного дифференциального оператора

Пусть α и β — произвольные вещественные числа, большие (-1) .

Определение 6.3.8. Многочлены Якоби $P_n^{\alpha,\beta}$ — это система многочленов, удовлетворяющих следующим требованиям:

- Многочлен $P_n^{\alpha,\beta}$ имеет степень n ;
- Для $n \neq m$ многочлены $P_n^{\alpha,\beta}$ и $P_m^{\alpha,\beta}$ ортогональны на отрезке $[-1, 1]$ с весом $\rho_{\alpha,\beta} = (1-t)^\alpha(1+t)^\beta$;
- Условие нормировки:
при целом $\alpha, \alpha = k$, выполнено $P_n^{k,\beta}(1) = C_{n+k}^n = \frac{(n+k)!}{n!k!}$ (здесь C_n^k — биномиальные коэффициенты);
при произвольном α выполнено:

$$P_n^{\alpha,\beta}(1) = \frac{(\alpha+1)\dots(\alpha+n)}{n!}.$$

Замечание 6.3.9. При $\alpha = \beta = 0$ получаем $\rho_{\alpha,\beta} \equiv 1$, и многочлены Якоби превращаются в многочлены Лежандра.

Следующее предложение показывает, что многочлены Якоби являются решениями некоторого семейства линейных дифференциальных уравнений второго порядка.

Предложение 6.3.10. Многочлены Якоби являются собственными функциями дифференциального оператора

$$L_{\alpha,\beta} = \frac{d}{dt}(1-t^2)\frac{d}{dt} + (\beta - \alpha - (\alpha + \beta)t)\frac{d}{dt}.$$

с собственными значениями $-n(n + \alpha + \beta + 1)$.

Доказательство. Доказательство повторяет рассуждения, проведенные для многочленов Лежандра. Докажем сначала, что оператор $L_{\alpha,\beta}$ самосопряжен в пространстве многочленов, ограниченных на отрезок $[-1, 1]$, со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_{-1}^1 fg\rho_{\alpha,\beta}dt \quad (6.49)$$

Равенство

$$(L_{\alpha,\beta}f, g) = (f, L_{\alpha,\beta}g) \quad (6.50)$$

проверяется интегрированием по частям.

Упражнение 126. Проверьте равенство (6.50).

Пусть, как и выше, \mathcal{P}_n — пространство многочленов степени не выше n . Оно инвариантно относительно оператора $L_{\alpha,\beta}$. Действительно,

$$L_{\alpha,\beta}t^d = (-d(d+1) - d(\alpha + \beta))t^d + d(d-1)t^{d-2} + d(\beta - \alpha)t^{d-1}.$$

Следовательно, в базисе $1, t, \dots, t^n$ оператор $L_{\alpha, \beta}$ записывается диагональной матрицей с элементами $0, -(2 + \alpha + \beta), \dots, -n(n + 1 + \alpha + \beta)$ на диагонали. Это и есть собственные числа оператора $L_{\alpha, \beta}$.

В каждом из пространств \mathcal{P}_d , $d = 0, \dots, n$, оператор $L_{\alpha, \beta}$ имеет собственный ортогональный базис, по одному вектору в каждом из множеств $\mathcal{P}_d \setminus \mathcal{P}_{d-1}$. После нормировки все эти векторы превращаются в многочлены Якоби. \square

В следующем разделе мы получим обобщение формулы Мелера-Гейне, доказанной выше для многочленов Лежандра. Асимптотика многочленов Якоби оказывается связана с функциями Бесселя более высоких порядков.

Обобщение формулы Мелера-Гейне

Напомним, что функция Бесселя $J_k(r)$ — это функция, удовлетворяющая k -му уравнению Бесселя

$$r \frac{d}{dr} \left(r \frac{dx}{dr} \right) + (r^2 - k^2)x = 0 \quad (6.51)$$

с условием нормировки $J_k(r) = \frac{1}{2^k k!} r^k + \dots$; многоточием обозначены старшие члены ряда Тейлора.

Теорема 6.3.11. *Для любого $k \geq 0$ и произвольного $\beta > -1$,*

$$n^{-k} P_n^{k, \beta} \left(1 - \frac{r^2}{2n^2} \right) \rightarrow 2^k r^{-k} J_k(r),$$

где $J_k(r)$ — k -я функция Бесселя; сходимость равномерная на любом отрезке.

Доказательство. План доказательства такой же, как для многочленов Лежандра. Сначала мы проверим сходимость в точке 0. Затем найдем дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют функции

$$X_n(r) = n^{-k} P_n^{k, \beta} \left(1 - \frac{r^2}{2n^2} \right) \quad \text{и} \quad X = 2^k r^{-k} J_k$$

и вычислим коэффициенты Тейлора этих функций. После этого мы проверим условия леммы 6.3.7 и выведем из нее утверждение теоремы.

Сходимость в точке 0. Имеем:

$$X_n(0) = n^{-k} P_n^{k, \beta}(1) = n^{-k} C_{n+k}^n = \frac{(n+k)(n+k-1)\dots(n+1)}{n^k k!} \rightarrow \frac{1}{k!} \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty.$$

С другой стороны, $X(0) = 2^k r^{-k} J_k(r)|_{r=0} = \frac{1}{k!}$ в силу условия нормировки для функции Бесселя. Сходимость в нуле проверена.

Теперь получим дифференциальные уравнения на функции X_n и X . Напомним, что многочлен $P_n^{k, \beta}$ при целых $\alpha = k$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $L_{k, \beta} x = -n(n+k+\beta+1)x$, то есть

$$\frac{d}{dt} (1-t^2) \frac{dx}{dt} + (\beta - k - (k+\beta)t) \frac{dx}{dt} + n(n+k+\beta+1)x = 0.$$

Таким же образом, как для многочленов Лежандра (см. (6.43)), мы получаем, что функция $X_n(r) = n^{-k} P_n^{k,\beta}(1 - \frac{r^2}{2n^2})$ удовлетворяет уравнению

$$r \frac{d}{dr} \left(\left(1 - \frac{r^2}{4n^2}\right) r \frac{dx}{dr} - (\beta - k - (k + \beta) \left(1 - \frac{r^2}{2n^2}\right)) r \frac{dx}{dr} + r^2 \left(1 + \frac{k + \beta + 1}{n}\right) x \right) = 0. \quad (6.52)$$

Теперь найдем уравнение, которому удовлетворяет функция $X = 2^k r^{-k} J_k$. Так как функция $J_k(r) = 2^{-k} r^k X$ удовлетворяет уравнению Бесселя порядка k , имеем

$$r \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} r^k X \right) + (r^2 - k^2) r^k X = 0 \quad (6.53)$$

Так как

$$r \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} r^k X \right) = r \frac{d}{dr} (r^{k+1} X' + k r^k X) = r^{k+2} X'' + (2k + 1) r^{k+1} X' + k^2 r^k X,$$

уравнение (6.53) после деления на r^k принимает вид

$$r^2 X'' + (2k + 1) r X' + r^2 X = 0$$

Это же уравнение можно записать следующим образом:

$$r \frac{d}{dr} r \frac{dX}{dr} + 2kr \frac{dX}{dr} + r^2 X = 0. \quad (6.54)$$

6 Уравнения в частных производных и теоремы Штурма

Итак, функция X удовлетворяет уравнению (6.54), а функции X_n — уравнению (6.52). Левая часть уравнения (6.52) стремится к левой части уравнения (6.54) при $n \rightarrow \infty$. Однако мы по-прежнему не можем воспользоваться теоремой о непрерывной зависимости решения от параметра, поскольку коэффициент при старшей производной обращается в ноль при $r = 0$. Если разрешить уравнение (6.52) или (6.54) относительно старшей производной, то правая часть будет иметь особенность в нуле.

Мы воспользуемся тем же приемом, что в доказательстве теоремы Мелера – Гейне для многочленов Лежандра. Вычислим коэффициенты Тейлора функций $X = r^{-k} J_k$ и X_n , точнее, выразим их через $X(0)$, $X_n(0)$. Затем воспользуемся леммой 6.3.7.

Для функции J_k разложение в ряд получено в разделе 6.1.8, но мы выведем рекуррентное соотношение для коэффициентов X непосредственно из уравнения (6.54), чтобы проиллюстрировать сходство X и X_n . Разложим X в ряд: $X = \sum_0^\infty a_m r^m$. Отметим, что

$$r \frac{dX}{dr} = \sum_{m=0}^{\infty} m a_m r^m.$$

Поэтому коэффициент при r^m в левой части уравнения (6.54) имеет вид:

$$(m^2 + 2km)a_m + a_{m-2}.$$

Получаем, заменяя m на $2m$:

$$a_{2m} = c_m a_{2m-2}, \quad c_m = -\frac{1}{4m^2 + 4km}; \quad a_n = a_0 \prod_{l=0}^m c_l.$$

Теперь разложим X_n в ряд: $X_n = \sum a_{n,m} r^m$, и подставим его в уравнение (6.52). Приравнявая к нулю коэффициенты полученного ряда при r^m , получаем:

$$m^2 a_{n,m} - \frac{m(m-2)}{4n^2} a_{n,m-2} + 2km a_{n,m} - \frac{(m-2)(k+\beta)}{2n^2} a_{n,m-2} + \left(1 + \frac{k+\beta+1}{n}\right) a_{n,m-2} = 0.$$

Отсюда

$$a_{n,m} = \frac{\frac{m(m-2)}{4n^2} + \frac{(m-2)(k+\beta)}{2n^2} - 1 - \frac{k+\beta+1}{n}}{m^2 + 2km} a_{n,m-2}.$$

Заменяя m на $2m$, получим:

$$a_{n,2m} = c_{n,m} a_{n,2m-2}, \quad c_{n,m} = \frac{\frac{2m(2m-2)}{4n^2} + (k+\beta) \frac{(2m-2)(k+\beta)}{2n^2} - 1 - \frac{k+\beta+1}{n}}{4m^2 + 4km};$$

$$a_{n,2m} = a_{n,0} \prod_{l=0}^m c_{n,l}.$$

Все коэффициенты при нечетных степенях нулевые, так как $X_m(r) = n^{-k} P_n^{k,\beta} \left(1 - \frac{r^2}{2n^2}\right)$ — четная функция. Видно, что $c_{n,m} \rightarrow c_m$ при $n \rightarrow \infty$, и $c_{n,m} \rightarrow 0$ при $\min(n, m) \rightarrow \infty$. Поэтому для рядов $\frac{1}{a_0} X = \frac{X}{X(0)}$ и $\frac{1}{a_{n,0}} X_n = \frac{X_n}{X_n(0)}$ выполнены условия леммы 6.3.7. Выше мы проверили, что $X_n(0) \rightarrow X(0)$. Значит, $X_n \rightrightarrows X$ на любом отрезке. Это доказывает теорему. □

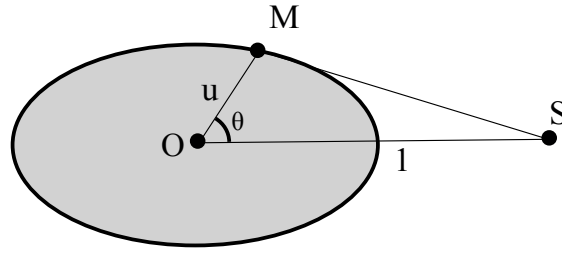


Рис. 6.10: Притяжение тела к эллипсоиду вращения.

6.3.4 Добавление: формула Родрига, рекуррентное соотношение и производящая функция для многочленов Лежандра

Система многочленов P_n впервые появилась в работе Лежандра²³ по небесной механике. Он исследовал силу притяжения тела к эллипсоиду вращения. Пусть центр эллипсоида расположен в начале координат O , а тело находится в точке S , $|OS| = 1$; рассмотрим точку M на эллипсоиде и положим $|OM| = u$. Ньютоновский потенциал, который создается точкой M , равен $\frac{1}{|SM|}$ в точке S . Пусть θ — угол между OS и OM , тогда $|SM| = \sqrt{1 + u^2 - 2u \cos \theta}$ (в силу теоремы косинусов). Чтобы узнать силу тяжести в точке S , выражение $\frac{1}{|SM|}$ следует проинтегрировать по эллипсоиду. Для удобства интегрирования Лежандр разложил выражение $\frac{1}{|SM|} = \frac{1}{\sqrt{1+u^2-2ut}}$, $t = \cos \theta$, по степеням t , u . Оказывается, что

$$\frac{1}{\sqrt{1+u^2-2ut}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t)u^n,$$

где P_n — многочлены Лежандра.

Говорят, что $\Psi(t, u) = \frac{1}{\sqrt{1-2tu+u^2}}$ является *производящей функцией* для многочленов Лежандра. Мы докажем этот факт, но перед этим найдем явную формулу и рекуррентную формулу для многочленов Лежандра.

Теорема 6.3.12 (Формула Родрига²⁴). *Для многочленов Лежандра P_n выполнено*

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} [(t^2 - 1)^n].$$

Доказательство. Положим $Q_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} [(t^2 - 1)^n]$. Понятно, что $\deg Q_n = n$. Мы проверим, что многочлены Q_n ортогональны относительно скалярного произведения $\int_{-1}^1 fg dt$ и $Q_n(1) = 1$; отсюда сразу следует, что многочлены Q_n совпадают с многочленами Лежандра.

²³Legendre, A.-M. (1785) [1782]. "Recherches sur l'attraction des sphéroïdes homogènes". Mémoires de Mathématiques et de Physique, présentés à l'Académie Royale des Sciences, par divers savans, et lus dans ses Assemblées. X. Paris. pp. 411–435.

²⁴Бенжамен Олинд Родриг (1795 – 1851) – математик, механик и экономист, в математике известен благодаря своим работам по геометрии и теории чисел.

$Q_n(\mathbf{1}) = 1$. При n -кратном дифференцировании выражения $(t^2 - 1)^n = (t - 1)^n(t + 1)^n$ получаются комбинации произведений $(t - 1)^l(t + 1)^{n-l}$, и единственное такое произведение, которое не обнуляется при подстановке $t = 1$ — выражение $(t + 1)^n((t - 1)^n)^{(n)}$, которое равно $2^n n!$ в единице. После деления на $2^n n!$ получаем $Q_n(\mathbf{1}) = 1$.

Многочлены Q_n попарно ортогональны. Пусть $n > m$. Чтобы проверить равенство $(Q_n, Q_m) = 0$, возьмем интеграл несколько раз по частям.

$$\int_{-1}^1 [(t^2 - 1)^n]^{(n)} [(t^2 - 1)^m]^{(m)} dt = [(t^2 - 1)^n]^{(n-1)} [(t^2 - 1)^m]^{(m)} \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 [(t^2 - 1)^n]^{(n-1)} [(t^2 - 1)^m]^{(m+1)} dt$$

Внеинтегральный член равен нулю, так как при $n - 1$ -кратном дифференцировании выражения $(t^2 - 1)^n$ получаются комбинации произведений $(t - 1)^l(t + 1)^{n+1-l}$ при $l = 1, \dots, n$, и все они равны нулю в точках -1 и 1 . Если повторить эту операцию n раз, мы получим выражение $\int_{-1}^1 [(t^2 - 1)^n]^{(n)} [(t^2 - 1)^m]^{(m+n)} dt$, что равно нулю, так как $\deg(t^2 - 1)^m = 2m < m + n$. \square

Теорема 6.3.13. *Многочлены Лежандра удовлетворяют рекуррентному соотношению*

$$(n + 1)P_{n+1}(t) = (2n + 1)tP_n(t) - nP_{n-1}(t). \quad (6.55)$$

Доказательство. Заметим, что многочлен $tP_n \in \mathcal{P}_{n+1}$ ортогонален всем многочленам степени не выше $n - 2$. Действительно, если $q \in \mathcal{P}_{n-2}$, то $(tP_n, q) = (P_n, tq) = 0$, так как $tq \in \mathcal{P}_{n-1}$, а многочлен P_n ортогонален всем многочленам меньшей степени.

Но в пространстве \mathcal{P}_{n+1} подпространство многочленов, ортогональных \mathcal{P}_{n-2} , порождено многочленами P_{n-1}, P_n и P_{n+1} . Поэтому

$$tP_n = aP_{n+1} + bP_n + cP_{n-1}.$$

Осталось выяснить значения коэффициентов a, b, c .

Напомним, что многочлены Лежандра четной степени — четные функции, а нечетной — нечетные. Поэтому многочлен tP_n имеет ту же четность, что и многочлены P_{n+1}, P_{n-1} , а многочлен P_n имеет другую четность. Отсюда $b = 0$.

В силу условия нормировки, $P_n(1) = 1$; подставляя $t = 1$ в уравнение, получаем $1 = a + c$.

Теперь сравним старшие коэффициенты в левой и правой части. В силу формулы Родрига, старший коэффициент многочлена P_n равен $\frac{1}{2^n n!} (t^{2n})^{(n)} = \frac{(2n)!}{2^n n! n!}$. Приравняв старшие коэффициенты, получаем

$$\frac{(2n)!}{2^n n! n!} = a \frac{(2n + 2)!}{2^{n+1} (n + 1)! (n + 1)!}$$

Отсюда $a = \frac{2(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{n+1}{2n+1}$, и в силу равенства $a + c = 1$, получаем $c = \frac{n}{2n+1}$. \square

Теорема 6.3.14 (Производящая функция для многочленов Лежандра). *Для всякого t найдется круг некоторого радиуса u_0 , такой что при $|u| \leq u_0$ выполнено*

$$\Psi(t, u) := \frac{1}{\sqrt{1 - 2ut + u^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) u^n.$$

6.3.4. *Добавление: формула Родрига, рекуррентное соотношение и производящая функция для многочленов.*

Доказательство. Для каждого t выпишем ряд Тейлора по u для функции $\Psi(t, u)$ в точке $u = 0$. Заметим, что все производные $\Psi(t, u)$ по u — это произведения многочленов по t, u на степени корня $\sqrt{1 - 2tu + u^2}$. При подстановке $u = 0$ этот корень принимает значение 1, поэтому ряд Тейлора функции $\Psi(t, u)$ по u имеет вид

$$\Psi(t, u) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(t)u^n$$

для некоторых многочленов Q_n . Более того, этот ряд получается подстановкой $x = -2ut + u^2$ из ряда для функции $(1 + x)^{-1/2}$, который сходится при $|x| < 1$. Значит, для каждого t ряд сходится для достаточно малого u .

Осталось показать, что многочлены Q_n совпадают с многочленами Лежандра. Мы получим дифференциальное уравнение на производящую функцию $\Psi(t, u)$, которое после подстановки ряда $\sum Q_n(t)u^n$ превратится в рекуррентное соотношение на Q_n ; окажется, что оно совпадает с известным нам рекуррентным соотношением для многочленов Лежандра.

Заметим, что

$$\frac{\partial \Psi}{\partial u} = \frac{d}{du} \frac{1}{\sqrt{1 - 2ut + u^2}} = \frac{t - u}{(1 - 2ut + u^2)^{3/2}} = \frac{t - u}{1 - 2ut + u^2} \Psi(t, u).$$

Умножая это равенство на знаменатель и подставляя $\Psi(t, u) = \sum Q_n(t)u^n$, получаем

$$(1 - 2ut + u^2) \sum nQ_n(t)u^{n-1} = (t - u) \sum Q_n(t)u^n.$$

Приравнивая коэффициенты при u^n , получаем

$$(n + 1)Q_{n+1}(t) - 2tnQ_n(t) + (n - 1)Q_{n-1}(t) = tQ_n(t) - Q_{n-1}(t).$$

Это уравнение равносильно рекуррентному уравнению (6.55). Значит, многочлены Q_n удовлетворяют тому же рекуррентному соотношению, что P_n . Осталось заметить, что $Q_0(t) = \Psi(t, 0) = 1 = P_0(t)$ и $Q_1(t) = \frac{\partial \Psi}{\partial u}|_{u=0} = t = P_1(t)$, поэтому многочлены Q_n совпадают с многочленами P_n . \square

Отметим, что для многочленов Якоби $P_n^{\alpha, \beta}$ тоже можно получить явную формулу (которая и в этом случае носит название формулы Родрига), рекуррентное соотношение и производящую функцию, но выкладки получаются более громоздкими. О многочленах Якоби и других ортогональных системах многочленов можно прочесть в книге Г.Сёге “Ортогональные многочлены”. В конце главы приведена серия задач о свойствах многочленов Чебышева, которые отличаются от $P_n^{-0.5, -0.5}$ только нормировкой; эти многочлены применяются в теории приближений.

Задачи к главе 6

Метод Фурье

1. а) Найдите все собственные функции и собственные значения оператора дифференцирования в пространстве а) вещественных, б) комплексно-значных бесконечно дифференцируемых функций на прямой.
 б) Тот же вопрос для функций на окружности $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.
2. Решите следующие задачи Коши:
 - а) Уравнение теплопроводности $u_t = u_{xx}$ на окружности $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ с начальным условием $u|_{t=0} = \sin^2 x$. Постройте графики функции $u(t, x)$ для $t = 0$ и $t = 1$.
 - б) Уравнение теплопроводности $u_t = u_{xx}$ на отрезке $[0, 2\pi]$ с нулевыми граничными условиями и начальным условием $u|_{t=0} = \sin^2 x$. Постройте графики функции $u(t, x)$ для $t = 0$ и $t = 1$. Почему решение не совпадает с решением предыдущей задачи?
 - в) Волновое уравнение $u_{tt} = u_{xx}$ на окружности $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ с начальными условиями $u|_{t=0} = \sin^2 x$, $u_t|_{t=0} = 0$.
 - г) Волновое уравнение $u_{tt} = u_{xx}$ на отрезке $[0, 1]$ с нулевыми граничными условиями и начальными условиями $u|_{t=0} = \sin 2\pi x$, $u_t|_{t=0} = 0$. Постройте графики функции $u(t, x)$ для $t = 0$, $t = 0.25$ и $t = 0.5$.
 - е) Волновое уравнение $u_{tt} = u_{xx}$ на окружности $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ с начальными условиями $u|_{t=0} = 0$, $u_t|_{t=0} = \sin^3 x$.
3. а) Выясните, каково предельное распределение температур в проволочном кольце в условиях теоремы 6.1.4: для задачи Коши $u_t = u_{xx}$, $u(0, x) = f(x)$ на окружности найдите предел $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t, x)$.
 б) Выясните, как меняется средняя температура проволочного кольца в условиях теоремы 6.1.4: для той же задачи Коши найдите зависимость средней температуры $\frac{1}{2\pi} \int_{S^1} u(t, x) dx$ от времени.
4. а) Найдите общее решение уравнения теплопроводности в пространстве тригонометрических многочленов степени не выше n на отрезке $[0, l]$ с нулевыми краевыми условиями.
 б) Найдите предельное распределение температур $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t, x)$ в куске проволоки длины l , на концах которой поддерживается нулевая температура.
5. Найдите общее решение волнового уравнения на отрезке $[0, l]$ с нулевыми краевыми условиями, то есть опишите колебания струны длины l с закрепленными концами. Покажите, что все решения периодичны по t . Как периоды решений зависят от l ?

6.3.4. Добавление: формула Родрига, рекуррентное соотношение и производящая функция для многочленов.

6. а) Нарисуйте траекторию $x(t)$ системы $\ddot{x} = -Ax$, где

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{x}(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- б) Решите волновое уравнение $u_{tt} = u_{xx}$ на окружности $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ со следующими начальными условиями:

$$\begin{aligned} u|_{t=0} &= 0, \\ u_t|_{t=0} &= 12 \cos^3 x - \cos x. \end{aligned}$$

- в) Найдите изоморфизм плоскости \mathbb{R}^2 на плоскость, порожденную функциями $\cos x$ и $\cos^3 x$, который переводит решения задачи а) в решения задачи б).

7. Докажите, что не все колебания квадратной мембраны периодичны.

8. Проверьте, что оператор Лапласа $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$ в полярных координатах имеет вид $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$.

Решение упражнения: По теореме о производной сложной функции,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

Продифференцируем это равенство еще раз:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \cdot \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \varphi} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Чтобы получить выражение для Δu , сложим это выражение с аналогичным выражением для $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. Имеем

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \cdot \overbrace{\left(\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2\right)}^1 + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \cdot \overbrace{\left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2\right)}^{\frac{1}{r^2}} + \\ &\quad + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \varphi} \cdot \underbrace{\left(\frac{\partial r}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)}_0 + \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \underbrace{\left(\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2}\right)}_{\frac{1}{r}} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \cdot \underbrace{\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right)}_0. \end{aligned}$$

Чтобы посчитать выражения в скобках, нужно подставить $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ и $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$. Стоит отметить, что в первых двух скобках написаны квадраты длин градиентов функций r и φ , в третьей — скалярное произведение этих градиентов (ср. с выкладкой из леммы 4.4.7 главы 4.4), а выражения в последних двух скобках — это $\Delta r = \frac{1}{r}$ и $\Delta \varphi = 0$.

9. Докажите аналог теоремы 6.1.4 для одномерного волнового уравнения: покажите, что ряд

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin \pi k x (a_k \cos \pi k t + b_k \sin \pi k t)$$

с коэффициентами

$$a_k = 2 \int_0^1 p(x) \sin \pi k x dx, \quad b_k = \frac{2}{\pi k} \int_0^1 v(x) \sin \pi k x dx \quad (6.56)$$

дает решение уравнения колебаний струны на отрезке $[0, 1]$ с нулевыми краевыми условиями и начальными условиями $p(x), v(x)$ класса C^4 .

Следующую задачу можно использовать в качестве леммы.

10. Пусть дифференцируемая функция $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ удовлетворяет условию $f(0) = f(1) = 0$. Докажите, что она представляется в виде $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \pi k x$, где a_k находятся по формулам (6.56). Докажите, что если функция f является C^4 -гладкой, то коэффициенты Фурье убывают как в теореме 6.1.5.

Подсказка: можно свести это утверждение к предложению о сходимости обычного ряда Фурье, если доопределить функцию f до нечетной 2-периодической функции на всей числовой оси и разложить эту новую функцию в обычный ряд Фурье по $\sin \pi k x, \cos \pi k x$. Как легко доказать, ряд Фурье нечетной функции не содержит косинусов.

Ортогональные многочлены

Многочлены Чебышева T_n — это система многочленов, ортогональных с весом $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ на отрезке $[-1, 1]$ и нормированных условием $T_n(1) = 1$. Многочлены Чебышева отличаются от многочленов Якоби с $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$ только нормировкой. Задачи 11. — 19. посвящены свойствам многочленов Чебышева.

11. Выпишите T_0, T_1, T_2, T_3 .
12. Выпишите дифференциальное уравнение для многочленов Чебышева.
13. Выясните, является ли T_n четной или нечетной функцией.
14. Докажите, что $\cos n\theta = T_n(\cos \theta)$.
- Указание:* сделайте замену $t = \cos \theta$ в дифференциальном уравнении для T_n .
15. Докажите, что на отрезке $[-1, 1]$ многочлен T_n удовлетворяет неравенству $|T_n(x)| \leq 1$. Докажите, что все n корней этого многочлена расположены на отрезке $[1, 1]$, и выясните, сколько раз он принимает значения $-1, 1$.
16. Докажите, что старший коэффициент многочлена T_n равен 2^{n-1} .

Указание: воспользуйтесь задачей 14. и формулой Муавра.

6.3.4. Добавление: формула Родрига, рекуррентное соотношение и производящая функция для многочленов.

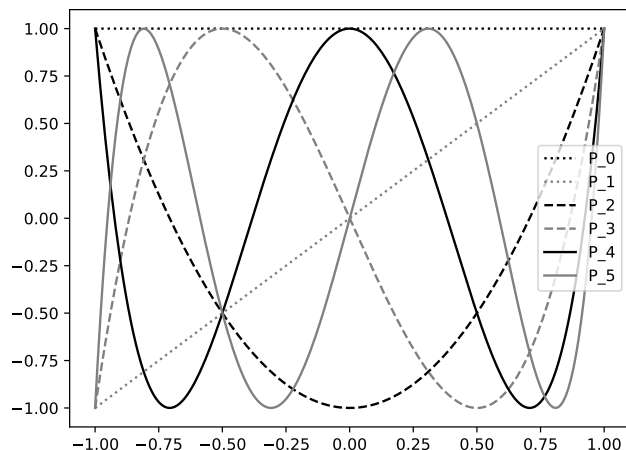


Рис. 6.11: Многочлены Чебышева T_n для $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

17. Докажите, что среди многочленов степени n со старшим коэффициентом 2^{n-1} , многочлен T_n наименее уклоняется от нуля на отрезке $[-1, 1]$: для любого многочлена p , $\deg p = n$, со старшим коэффициентом 2^{n-1} , значение $\max_{[-1,1]} |p(x)|$ не меньше, чем для многочлена Чебышева.

Указание: предположите, что некоторый многочлен p с тем же старшим коэффициентом уклоняется от нуля меньше, чем T_n . Рассмотрите разность $p - T_n$. Какую степень она имеет? В каких точках она заведомо положительна? Отрицательна?

18. Докажите рекуррентное соотношение $T_{n+1}(t) = 2tT_n(t) - T_{n-1}(t)$.

19. Получите производящую функцию для многочленов Чебышева: $\frac{1-ut}{1-2ut+u^2} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)u^n$.

Следующие задачи содержат путь к другому доказательству формулы Мелера – Гейне, с помощью производящих функций.

20. (*) (Интегральное представление многочленов Лежандра)

а) Докажите, что

$$P_n(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x + \sqrt{x^2 - 1} \cos \theta)^n d\theta$$

6 Уравнения в частных производных и теоремы Штурма

b) Выведите отсюда, что

$$P_n \left(1 - \frac{z^2}{2n^2} \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(1 + \frac{iz}{n} \cos \theta + o \left(\frac{1}{n} \right) \right)^n d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(iz \cos \theta) d\theta + o(1) \quad (6.57)$$

Указание: а) можно проверить, раскрыв по биному Ньютона и подынтегральное выражение, и $(t^2 - 1)^n$ в формуле Родрига.

21. (*) (Производящая функция для функций Бесселя)

a) Докажите, что

$$e^{\frac{z}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) t^n$$

b) Выведите отсюда, что $J_n = (-1)^n J_{-n}$.

c) Докажите, что

$$\cos(z \cos \theta) = J_0(z) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(z) (-1)^n \cos 2n\theta. \quad (6.58)$$

Указание: Первое утверждение можно доказать, разложив функции $J_n(z)$ и функцию $e^{\frac{z}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right)}$ в степенные ряды. Второе утверждение получится, если в это равенство вместо t подставить $-\frac{1}{t}$. Третье утверждение — это вещественная часть равенства а) при $t = e^{i(\theta + \frac{\pi}{2})}$ (здесь нужно использовать равенство b)).

22. (*) (Другое доказательство формулы Мелера–Гейне) Докажите, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n \left(1 - \frac{r^2}{2n^2} \right) = J_0(r).$$

Указание: Возьмите вещественную часть в (6.57), пользуясь тем, что $\operatorname{Re} \exp(iz \cos \theta) = \cos(z \cos \theta)$. Воспользуйтесь равенством (6.58) внутри интеграла и проинтегрируйте ряд почленно, чтобы получить $P_n(1 - x^2/2n) = J_0(x) + o(1)$.

Теоремы Штурма

23. (Теорема Сони́на) Рассмотрим уравнение Штурма $y'' + f(x)y = 0$. Пусть f — положительная C^1 -гладкая функция, определенная на всей прямой, причем $f' > 0$.

a) Докажите, что у любого ненулевого решения y бесконечно много нулей, и между каждыми двумя нулями заключена ровно одна точка локального максимума.

6.3.4. Добавление: формула Родрига, рекуррентное соотношение и производящая функция для многочленов.

- б) Пусть $\dots < x_{-1} < x_0 < x_1 < \dots$ — точки локального максимума. Докажите, что значения $|y|$ в этих точках убывают: $\dots > |y(x_0)| > |y(x_1)| > \dots$. Таким образом, решение колеблется все меньше и меньше.

Указание: рассмотрите выражение $\frac{(y')^2}{f(x)} + y^2$.

- с) Пусть функция f положительна и $f' < 0$. Может ли у решения y быть конечное множество нулей? Как ведут себя максимумы решения y в этом случае?

24. (Теорема Сони́на-Пойя-Бутле́вского) Обобщите второй пункт предыдущей задачи на случай уравнения вида $(k(x)y')' + f(x)y = 0$, где k, f — положительные C^1 -гладкие функции, определенные на всей прямой, причем $(kf)' > 0$.

7 Основные теоремы и их применения

7.1 Теорема существования и единственности решения дифференциального уравнения

В этом параграфе мы докажем теорему, которой пользовались в этой книге уже много раз — *теорему существования и единственности решения дифференциального уравнения*. Напомним её формулировку (см. теорему 2.4.3).

Рассмотрим уравнение

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (7.1)$$

где отображение $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ определено на открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Теорема (Локальная теорема существования и единственности). *Пусть отображение f непрерывно на Ω . Пусть для некоторой константы L при любом фиксированном значении t это отображение L -липшицево:*

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|$$

для любых точек $(t, x), (t, y) \in \Omega$. Тогда для любой точки $(t_0, x_0) \in \Omega$ уравнение $\dot{x} = f(t, x)$ с начальным условием $x(t_0) = x_0$ имеет решение, определенное в некоторой окрестности точки t_0 . Решение задачи Коши в этой окрестности единственно.

7.1.1 Метод Пикара

В основе доказательства существования решения лежит метод Пикара (в некоторых источниках — Пикара–Линделёфа¹), который позволяет приближённо находить решения уравнения $\dot{x} = f(t, x)$.

Метод Пикара описан в разделе 3.1.4 в одномерном случае. Заметим, что так же, как определяется интеграл от функции (с помощью интегральных сумм), мы можем определить интеграл от вектор-функции и операторно-значной функции. В координатах достаточно проинтегрировать вектор-функцию или матрицу оператора покомпонентно. Основные свойства интеграла (линейность, формула Ньютона–Лейбница) сохраняются.

Упражнение 127. *Докажите, что для интеграла от вектор-функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ выполнена оценка $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$, где $|\cdot|$ — норма в \mathbb{R}^n .*

Поэтому метод Пикара дословно переносится на многомерный случай.

Проверим, что дифференциальное уравнение $\dot{x} = f(t, x)$ с начальным условием $x(t_0) = x_0$ равносильно интегральному уравнению на непрерывную вектор-функцию $x(t)$:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau))d\tau. \quad (7.2)$$

¹Эрнст Леонард Линделёф (1870 – 1946) — математик, известный работами по теории дифференциальных уравнений, теории рядов и теории аналитических функций.

7.1.2. Полные метрические пространства и принцип сжимающих отображений

Действительно, если вектор-функция $x(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению и начальному условию, то (7.2) получается интегрированием дифференциального уравнения по отрезку $[t_0, t]$. Если непрерывная вектор-функция $x(t)$ удовлетворяет интегральному уравнению, то она дифференцируема по теореме о производной интеграла с переменным верхним пределом, и её производная равна $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$; начальное условие $x(t_0) = x_0$ следует из (7.2) при $t = t_0$.

Рассмотрим оператор A , который вектор-функцию ψ переводит в вектор-функцию вида

$$(A\psi)(t) := x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \psi(\tau))d\tau. \quad (7.3)$$

Тогда искомое решение интегрального уравнения (а значит, и задачи Коши для дифференциального уравнения) — это *неподвижная точка* оператора A : вектор-функция φ , для которой $A\varphi = \varphi$.

Метод Пикара заключается в том, чтобы искать эту неподвижную точку как предел последовательности φ_n :

$$\varphi_0(t) \equiv x_0, \quad \varphi_1 = A\varphi_0, \quad \varphi_2 = A\varphi_1, \dots$$

Наша задача — доказать, что такой метод работает в общем случае.

Мы приведем два доказательства теоремы 2.4.3. Для первого из них нам понадобится понятие полного метрического пространства и принцип сжимающих отображений.

7.1.2 Полные метрические пространства и принцип сжимающих отображений

Материал этого раздела полностью или частично содержится в курсе математического анализа. Читатель, знакомый с принципом сжимающих отображений в полном метрическом пространстве, может его пропустить.

Метрическое пространство — это множество X , на котором определено расстояние $d(x, y)$ между любыми двумя его точками x, y .

Определение 7.1.1. Пара (X, d) из множества X и функции $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ называется *метрическим пространством* с метрикой d , если функция d удовлетворяет следующим условиям.

- симметричность: $d(x, y) = d(y, x)$.
- положительность: $d(x, y) \geq 0$; равенство достигается тогда и только тогда, когда $x = y$.
- неравенство треугольника: $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$.

В метрических пространствах можно ввести определение сходящейся и фундаментальной последовательностей, дословно повторяющие аналогичные определения для отрезка.

Определение 7.1.2. Последовательность $\{x_n\}$ точек метрического пространства (X, d) называется *сходящейся* к точке a , если $d(x_n, a) \rightarrow 0$: другими словами,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \quad d(x_n, a) < \varepsilon.$$

Последовательность $\{x_n\}$ точек метрического пространства (X, d) называется *фундаментальной*, если с некоторого места точки последовательности близки друг к другу:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m > N \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Упражнение 128. Докажите, что у последовательности точек метрического пространства может быть не более одного предела.

Упражнение 129. Докажите, что сходящаяся последовательность обязательно фундаментальна.

Упражнение 130. Приведите пример метрического пространства, в котором есть фундаментальная, но не сходящаяся последовательность.

Указание: если из метрического пространства выкинуть несколько точек, то свойство фундаментальности последовательности не нарушится, а вот предел может исчезнуть.

Как известно, фундаментальная последовательность вещественных чисел (а также точек \mathbb{R}^n) всегда имеет предел. Это свойство выполнено для достаточно широкого класса метрических пространств.

Определение 7.1.3. Метрическое пространство (X, d) называется *полным*, если любая фундаментальная последовательность точек этого пространства имеет предел.

Упражнение 131. Являются ли метрическими пространствами следующие пары:

1. (\mathbb{R}^2, d) , где $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$;
2. (\mathbb{R}^2, d) , где $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|)$;
3. (\mathbb{N}, d) , где $d(n, m) = \frac{|n-m|}{1+|n-m|}$ (заметьте, что $d(n, m) \leq 1$, то есть все натуральные числа лежат внутри некоторого единичного шара).
4. (X, d) , где $X = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid |v| < 1\}$, $d(v_1, v_2) = |v_1 - v_2|$ (здесь $|\cdot|$ — обычная евклидова норма)?

Являются ли они полными метрическими пространствами?

Нам понадобится метрическое пространство, точки которого — непрерывные вектор-функции.

7.1.2. Полные метрические пространства и принцип сжимающих отображений

Определение 7.1.4. Метрическое пространство $C([a, b], \mathbb{R}^n)$ — пространство непрерывных вектор-функций $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Расстояние между вектор-функциями $\varphi, \psi \in C([a, b], \mathbb{R}^n)$ равно

$$d(\varphi, \psi) = \max_{[a, b]} |\varphi(t) - \psi(t)|. \quad (7.4)$$

(здесь $|\cdot|$ — обычная евклидова норма в \mathbb{R}^n). Эта метрика называется метрикой C , или *метрикой равномерной сходимости*.

Следующее упражнение мотивирует это название.

Упражнение 132. Последовательность вектор-функций сходится в метрическом пространстве $C([a, b], \mathbb{R}^n)$ тогда и только тогда, когда она равномерно сходится.

Следующее утверждение — критерий Коши равномерной сходимости для последовательности вектор-функций — входит в стандартный курс математического анализа.

Предложение 7.1.5. Пространство непрерывных вектор-функций $C([a, b], \mathbb{R}^n)$ с метрикой (7.4) полно. Другими словами, фундаментальная (относительно метрики (7.4)) последовательность вектор-функций равномерно сходится.

Доказательство. Пусть последовательность вектор-функций $\{g_n\}$ фундаментальна. Тогда для любого t последовательность $g_n(t)$ тем более фундаментальна, ведь $|g_n(t) - g_m(t)| \leq \max |g_n(t) - g_m(t)| = d(g_n, g_m)$. Значит, при фиксированном t числовая последовательность $g_n(t)$ сходится; её предел обозначим $g(t)$. Проверим равномерную сходимость.

В силу фундаментальности последовательности $\{g_n\}$, для любого $\varepsilon > 0$ найдется N , для которого $n, m > N$ влечет $|g_n(t) - g_m(t)| < \varepsilon$ при всех $t \in [a, b]$. Заметим, что

$$|g_n(t) - g(t)| = \lim_{m \rightarrow \infty} |g_n(t) - g_m(t)|,$$

поэтому из последней оценки следует $|g_n(t) - g(t)| \leq \varepsilon$ для всякого $n > N$ и любого $t \in [a, b]$. Итак, для всякого $\varepsilon > 0$ найдется N , такое что из $n > N$ следует $|g_n(t) - g(t)| < \varepsilon$ при всех $t \in [a, b]$. Это и означает, что g_n равномерно сходится к g .

Вектор-функция g непрерывна как равномерный предел непрерывных вектор-функций, поэтому принадлежит пространству $C([a, b], \mathbb{R}^n)$. \square

Теорему 2.4.3 мы будем доказывать с помощью принципа сжимающих отображений.

Определение 7.1.6. Отображение A метрического пространства в себя называется *сжимающим*, если для некоторой константы $q, q \in [0, 1)$, выполнено

$$d(Ax, Ay) \leq qd(x, y). \quad (7.5)$$

Теорема 7.1.7 (Принцип сжимающих отображений). Любое сжимающее отображение A полного метрического пространства X в себя имеет единственную неподвижную точку $x, Ax = x$.

Доказательство. Если неподвижных точек хотя бы две — x и y , то $d(Ax, Ay) = d(x, y)$, и неравенство (7.5) не выполнено.

Докажем, что неподвижная точка существует. Возьмём произвольную точку $x_0 \in X$ и последовательность её образов $\{x_n\}$ под действием A : $x_n = Ax_{n-1}$. Покажем, что предел этой последовательности является неподвижной точкой.

Действительно, этот предел существует: ведь из (7.5) следует, что для любого $k \in \mathbb{N}$ выполнено

$$d(x_k, x_{k+1}) \leq q^k d(x_0, x_1), \quad (7.6)$$

поэтому для любых $n < m$

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq \sum_{k=n}^{m-1} d(x_k, x_{k+1}) \leq \sum_{k=n}^{m-1} q^k d(x_0, x_1) = d(x_0, x_1) q^n \frac{1 - q^{m-n}}{1 - q} \leq \\ &\leq d(x_0, x_1) \frac{q^n}{1 - q}. \end{aligned}$$

Последнее выражение стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, так как $q < 1$. Поэтому последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна. Значит, она сходится к некоторой точке x .

Покажем, что x — неподвижная точка A . Действительно, $d(x_{n+1}, Ax) \leq qd(x_n, x)$ и $d(x_n, x) \rightarrow 0$; значит, $d(x_{n+1}, Ax) \rightarrow 0$. Отсюда следует, что $x_n \rightarrow Ax$. Так как у последовательности может быть только один предел, то $Ax = x$. \square

7.1.3 Доказательство теоремы существования и единственности с помощью принципа сжимающих отображений

Доказательство основано на том, что оператор A , определенный формулой (7.3), — сжимающий на некотором подмножестве пространства $C([t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon], \mathbb{R}^n)$ для правильно выбранного ε .

Применение принципа сжимающих отображений к оператору A мы проведем в три этапа. Сначала выберем метрическое пространство, на котором действует оператор A . Потом докажем, что оператор A переводит это пространство в себя. Наконец, проверим, что оператор сжимает.

Начнем с выбора метрического пространства. Рассмотрим такое компактное множество Π , что $(t_0, x_0) \in \Pi \subset \Omega$. Для простоты возьмём в качестве Π многомерный цилиндр: произведение отрезка $[t_0 - a, t_0 + a]$ на шар $B_b(x_0)$ радиуса b с центром x_0 . Мы выберем такие a, b , что $\Pi \subset \Omega$. Положим $m = \max_{\Pi} |f|$. Напомним, что L — константа Липшица по переменной x для отображения f . Рассмотрим настолько малое ε , что

1. $L\varepsilon < 1$;

2. конус $K_{(t_0, x_0)} = \{(t, x) \mid |t - t_0| < \varepsilon, |x - x_0| \leq m|t - t_0|\}$ содержится в Π , см. рис. 7.1.

7.1.3. Доказательство теоремы существования и единственности с помощью принципа сжимающих отображений

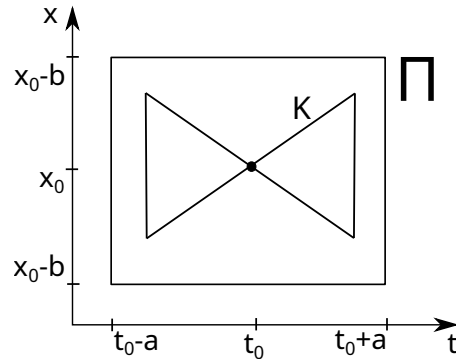


Рис. 7.1: Конус $K = K_{(t_0, x_0)}$ и цилиндр Π в одномерном случае.

Например, оба условия будут выполнены, если

$$\varepsilon = \min\left(a, \frac{b}{m}, \frac{1}{2L}\right). \quad (7.7)$$

Положим $I := [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$. В качестве пространства, на котором будет действовать A , возьмём пространство \mathcal{M}_I непрерывных вектор-функций на I , графики которых лежат в конусе $K_{(t_0, x_0)}$:

$$\mathcal{M}_I := \{\varphi \in C(I, \mathbb{R}^n) \mid |\varphi(t) - x_0| \leq m|t - t_0|\}.$$

Заметим, что если существует решение $x(t)$ дифференциального уравнения $\dot{x} = f(t, x)$ с начальным условием $x(t_0) = x_0$, определенное на отрезке I , то оно принадлежит пространству \mathcal{M}_I . Действительно, производная вектор-функции $x(t)$ равна $f(t, x)$, поэтому её норма не превосходит m ; значит, $|x(t) - x_0| \leq m|t - t_0|$.

Упражнение 133. Проверьте, что множество $\mathcal{M}_I \subset C(I, \mathbb{R}^n)$ с метрикой (7.4) полно.

Указание: достаточно доказать, что \mathcal{M}_I замкнуто. Замкнутое подмножество полного метрического пространства всегда полно (докажите это!).

Осталось доказать такие две леммы.

Лемма 7.1.8. Оператор A корректно определен на пространстве \mathcal{M}_I и отображает это пространство в себя.

Лемма 7.1.9. Оператор A сжимает на пространстве \mathcal{M}_I с константой $q = L\varepsilon$.

Доказательство леммы 7.1.8. Возьмем функцию $\varphi \in \mathcal{M}_I$. По определению \mathcal{M}_I , все точки графика вектор-функции φ лежат в конусе $K_{(t_0, x_0)} \subset \Pi \subset \Omega$, на котором отображение f определено. Поэтому подынтегральное выражение в определении оператора A (7.3) определено при всех $t \in I$. Так как это выражение непрерывно, функция $A\varphi$ корректно определена.

7 Основные теоремы и их применения

Теперь проверим, что $A\varphi \in \mathcal{M}_I$. Понятно, что $A\varphi$ непрерывно по переменной t ; неравенство

$$|A\varphi(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau \right| \leq m|t - t_0|,$$

показывает, что график функции $A\varphi$ лежит в конусе $K_{(t_0, x_0)}$. Итак, $A\varphi \in \mathcal{M}_I$. \square

Доказательство леммы 7.1.9. Пусть $\varphi, \psi \in \mathcal{M}_I$. Нам нужно оценить $\text{dist}(A\varphi, A\psi) = \max_I |A\varphi(t) - A\psi(t)|$. Заметим, что

$$\begin{aligned} |A\varphi(t) - A\psi(t)| &= \left| \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi(\tau)) - f(\tau, \psi(\tau)) d\tau \right| \leq \\ &\leq \int_{t_0}^t L|\varphi(\tau) - \psi(\tau)| d\tau \leq L|t - t_0| \max_{\tau \in [t_0, t]} |\varphi(\tau) - \psi(\tau)| \leq L\varepsilon \text{dist}(\varphi, \psi). \end{aligned} \quad (7.8)$$

Так как $L\varepsilon < 1$, оператор A сжимает с константой $q = L\varepsilon$. \square

По теореме о сжимающем отображении, оператор A имеет неподвижную точку. Эта неподвижная точка и является локальным (определённым на $I = [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$) решением уравнения $\dot{x} = f(t, x)$ с начальным условием $x(t_0) = x_0$. Это завершает доказательство теоремы о существовании.

Учитывая выбор ε , одновременно мы доказали следующее уточнение теоремы существования.

Следствие 7.1.10. *В условиях локальной теоремы существования и единственности, пусть цилиндр $\Pi = [t_0 - a, t_0 + a] \times B_b(x_0)$ содержится в Ω , и $m = \max_{\Pi} |f|$. Тогда существует решение задачи Коши, определенное на отрезке $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$, где*

$$\varepsilon = \min\left(a, \frac{b}{m}, \frac{1}{2L}\right). \quad (7.9)$$

Решение задачи Коши является пределом равномерно сходящейся последовательности приближений Пикара. Расстояние между последовательными приближениями Пикара оценивается следующим образом:

$$\text{dist}(\varphi_{n+1}, \varphi_n) \leq mL^n \varepsilon^{n+1}. \quad (7.10)$$

Доказательство. Все утверждения, кроме последней оценки, следуют из доказательства теоремы 2.4.3. Последнее неравенство следует из того, что оператор A сжимает с константой $q = L\varepsilon$, поэтому в силу (7.6), $\text{dist}(\varphi_{n+1}, \varphi_n) \leq L^n \varepsilon^n \text{dist}(\varphi_1, \varphi_0)$. Так как $\varphi_0(t) \equiv x_0$ и график функции $\varphi_1(t)$ лежит в K , мы имеем $\text{dist}(\varphi_1, \varphi_0) \leq m\varepsilon$, откуда получаем оценку 7.10. \square

В следующем разделе мы увидим, что на самом деле приближения Пикара сходятся гораздо быстрее.

7.1.4. Другое доказательство теоремы существования и единственности

Единственность решения задачи Коши мы уже доказали выше (теорема 2.4.10 раздела 2.4.2) с помощью неравенства Гронуолла. Дадим доказательство с помощью принципа сжимающих отображений. Допустим, у задачи Коши два разных решения; пусть пересечение их областей определения — интервал $J \subset I$, $t_0 \in J$. Тогда оба решения в ограничении на J являются неподвижными точками сжимающего оператора A на пространстве M_J . Так как у сжимающего отображения могут быть только одна неподвижная точка, эти решения совпадают на J . Итак, любые два решения задачи Коши совпадают там, где они оба определены. В этом случае мы условились считать эти решения одинаковыми. Теорема 2.4.3 доказана.

7.1.4 Сверхэкспоненциальная сходимостъ пикаровских приближений и другое доказательство теоремы существования и единственности

Преыдущее доказательство дает способ строить решение дифференциального уравнения как предел последовательности пикаровских приближений $\varphi_0 \equiv x_0, \varphi_1 = A\varphi_0, \dots$. Принцип сжимающих отображений (теорема 7.1.7) гарантирует, что последовательность пикаровских приближений сходится со скоростью геометрической прогрессии на интервале $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$, где ε выбрано как в (7.9).

Мы приведем другое доказательство теоремы существования и единственности. Его идея состоит в том, чтобы непосредственно исследовать последовательность приближений Пикара, не ссылаясь на принцип сжимающих отображений. Мы покажем, что эта последовательность сходится, причем на большем отрезке и с более высокой скоростью, чем это обеспечивает принцип сжимающих отображений.

Размер окрестности $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$, на которой мы ищем решение, определим следующим образом. Как и ранее, выберем a и b так, что цилиндр $\Pi = [t_0 - a, t_0 + a] \times B_b(x_0)$ целиком содержится в Ω . Положим $m = \max_{\Pi} |f|$.

Теорема 7.1.11. *В условиях локальной теоремы существования и единственности, решение уравнения $\dot{x} = f(t, x)$ с начальным условием $x(t_0) = x_0$ существует и единственно на отрезке $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$, где $\varepsilon := \min(a, \frac{b}{m})$.*

Итак, решение определено в окрестности радиуса $\varepsilon = \min(a, \frac{b}{m})$. Этот размер, вообще говоря, больше, чем в предыдущем разделе, и не зависит от L — константы Липшица отображения f .

Доказательство. Положим $\varphi_0(t) \equiv x_0$ и рассмотрим последовательность итераций $\varphi_n = A^n \varphi_0$.

Шаг 1: Все вектор-функции $\varphi_n(t) = A^n \varphi_0$ определены.

Достаточно показать, что $(\tau, \varphi_n(\tau)) \in \Pi$ для любого $\tau \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$: это будет означать, что отображение f определено в точках $(\tau, \varphi_n(\tau))$, так как его область определения Ω содержит Π . Утверждение $(\tau, \varphi_n(\tau)) \in \Pi$ мы докажем по индукции. База ($n = 0$) очевидна. Сделаем шаг индукции. Пусть $(\tau, \varphi_{k-1}(\tau)) \in \Pi$, тогда

$$|\varphi_k(\tau) - x_0| = \left| \int_{t_0}^{\tau} f(u, \varphi_{k-1}(u)) du \right| \leq |\tau - t_0| m \leq \varepsilon m \leq b,$$

откуда $(\tau, \varphi_k(\tau)) \in \Pi$. Шаг индукции сделан; итак, $(\tau, \varphi_n(\tau)) \in \Pi$ для всех натуральных n .

Шаг 2: последовательность $\{\varphi_n\}$ фундаментальна.

Ключевую роль играет следующая оценка: при $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$

$$|\varphi_{n+1}(t) - \varphi_n(t)| \leq m \frac{L^n}{(n+1)!} |t - t_0|^{n+1}. \quad (7.11)$$

Тот факт, что оператор A сжимает (см. предыдущий раздел), позволял получить более слабую оценку (7.10).

Неравенство (7.11) мы докажем по индукции. База ($n = 0$):

$$|\varphi_1(t) - \varphi_0(t)| \leq \left| \int_{t_0}^t f(\tau, x_0) d\tau \right| \leq m|t - t_0|,$$

что и требовалось.

Теперь сделаем шаг индукции. Пусть неравенство (7.11) уже доказано для $n = k - 1$. Считая $t > t_0$, для $n = k$ получаем

$$\begin{aligned} |\varphi_{k+1}(t) - \varphi_k(t)| &= \left| \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi_k(\tau)) - f(\tau, \varphi_{k-1}(\tau)) d\tau \right| \leq \\ &\leq L \int_{t_0}^t |\varphi_k(\tau) - \varphi_{k-1}(\tau)| d\tau \leq L \cdot m \frac{L^{k-1}}{k!} \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^k d\tau = m \frac{L^k}{(k+1)!} |t - t_0|^{k+1}. \end{aligned}$$

В последнем неравенстве мы применили предположение индукции. В случае $t < t_0$ доказательство аналогично.

Итак, мы доказали оценку (7.11). Из неё следует, что последовательность вектор-функций $\varphi_n(t)$ на отрезке $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ фундаментальна. Действительно, при $n > l$

$$\max_{t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]} |\varphi_n(t) - \varphi_l(t)| \leq \sum_{k=l+1}^n \max_{t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]} |\varphi_{k+1}(t) - \varphi_k(t)| \leq m \sum_{k=l+1}^{\infty} \frac{L^k}{(k+1)!} |t - t_0|^{k+1}.$$

Так как ряд $\sum \frac{L^k}{(k+1)!} |t - t_0|^{k+1}$ сходится (это ряд для экспоненты $L^{-1} e^{L|t-t_0|}$), правая часть стремится к нулю, когда l стремится к бесконечности. Поэтому последовательность $\varphi_n(t)$ фундаментальна. В силу предложения 7.1.5 о полноте пространства $C([a, b], \mathbb{R}^n)$, существует равномерный предел $x(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t)$.

Шаг 3: предел $x(t)$ последовательности φ_n является решением дифференциального уравнения.

Достаточно доказать, что функция $x(t)$ удовлетворяет интегральному уравнению (7.2). Заметим, что

$$\max_{t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]} |f(t, \varphi_n(t)) - f(t, x(t))| \leq L \max_{t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]} |\varphi_n(t) - x(t)|,$$

поэтому $f(t, \varphi_n(t))$ равномерно сходится к $f(t, x(t))$. Перейдем к пределу в равенстве

$$\varphi_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi_n(\tau)) d\tau,$$

7.1.5. Теорема о непрерывной зависимости решения от начальных условий

пользуясь тем, что под знаком интеграла можно переходить к равномерному пределу. Получим, что вектор-функция $x(t)$ удовлетворяет интегральному уравнению (7.2).

Шаг 4: Единственность решения задачи Коши.

Пусть x и y — два разных решения уравнения $\dot{x} = f(t, x)$ с начальным условием $x(t_0) = x_0$, определенных на отрезке $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$. По индукции докажем следующую оценку: для $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$

$$|A^n x(t) - A^n y(t)| \leq L^n \frac{|t - t_0|^n}{n!} \max_{[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]} |x(t) - y(t)|. \quad (7.12)$$

Оценка доказывается почти так же, как неравенство (7.11). База индукции ($n = 0$) очевидна. Выполним шаг индукции. Считая, что для $n = k$ неравенство (7.12) верно, мы получаем для $n = k + 1$ и $t > t_0$

$$\begin{aligned} |A^{k+1}x(t) - A^{k+1}y(t)| &= \left| \int_{t_0}^t f(\tau, A^k x(\tau)) - f(\tau, A^k y(\tau)) d\tau \right| \leq \\ &\leq L \int_{t_0}^t |A^k x(\tau) - A^k y(\tau)| d\tau \leq L \frac{L^k}{k!} \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^k d\tau \max_{[t_0, t_0 + \varepsilon]} |x(t) - y(t)| = \\ &= \frac{L^{k+1}}{(k+1)!} (t - t_0)^{k+1} \max_{[t_0, t_0 + \varepsilon]} |x(t) - y(t)|. \end{aligned}$$

В последнем неравенстве мы воспользовались предположением индукции. Случай $t < t_0$ рассматривается аналогичным образом. Неравенство (7.12) доказано.

Правая часть неравенства (7.12) стремится к нулю при любом фиксированном t и $n \rightarrow \infty$, а левая часть равна $|x(t) - y(t)|$, так как $Ax = x$, $Ay = y$. Значит, для любого $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ выполнено $x(t) = y(t)$. Мы получили противоречие с тем, что функции x и y — два разных решения дифференциального уравнения на отрезке $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$. \square

7.1.5 Теорема о непрерывной зависимости решения от начальных условий

Напомним, что для фиксированного t_0 вектор-функция $t \mapsto \varphi(t, x_0)$ — решение уравнения $\dot{x} = f(t, x)$ с начальным условием $\varphi(t_0) = x_0$.

Теорема (Локальная теорема о непрерывности решения по начальным условиям). *В условиях теоремы 2.4.3 решение уравнения $\dot{x} = f(t, x)$ непрерывно зависит от начального условия и времени.*

Более точно, для любой точки $(t_0, x_0) \in \Omega$ существует её окрестность $U \subset \Omega$, такая что отображение $(t, x) \mapsto \varphi(t, x)$ определено на U и непрерывно по совокупности переменных в U .

Подчеркнем, что мы фиксируем t_0 -координату начального условия (t_0, x_0) и утверждаем непрерывную зависимость только от начального условия x_0 и времени t , но не от начального времени t_0 .

Задача 134. Ссылаясь на предыдущую теорему, докажите, что решение непрерывно зависит и от начального времени t_0 .

Доказательство. Мы докажем, что последовательность приближений Пикара непрерывно зависит от начального условия, а сходимость в методе Пикара равномерна по начальному условию. Из этого будет следовать, что предел приближений Пикара, то есть точное решение уравнения, тоже непрерывно зависит от начального условия.

Будем считать, что $t_0 = x_0 = 0$. Пусть цилиндр $\Pi = [-a, a] \times B_b(0)$ целиком лежит в Ω . Для любой точки $x \in B_{b/2}(0)$ цилиндр $[-a, a] \times B_{b/2}(x)$ лежит в Ω . Следствие 7.1.10 показывает, что на отрезке $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, где $\varepsilon = \min(a, \frac{b}{2m}, \frac{1}{2L})$, приближения Пикара $\varphi_n(t, y)$ для уравнения $\dot{x} = f(t, x)$ с начальным условием $y \in B_{b/2}(0)$ сходятся к решению $\varphi(t, y)$ с начальным условием $x(0) = y$.

Более того, в силу (7.11), выполнено неравенство

$$|\varphi_{n+1}(t, y) - \varphi_n(t, y)| \leq m \frac{L^n}{(n+1)!} \varepsilon^{n+1}$$

для $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ (впрочем, нам хватит и более слабой оценки (7.10) из следствия 7.1.10). Эта оценка не зависит от y . Значит, сходимость $\varphi_n(t, y) \rightarrow \varphi(t, y)$ будет равномерна по y .

Осталось заметить, что все вектор-функции $\varphi_n(t, y)$ непрерывны по совокупности переменных. Действительно, для $\varphi_0(t, y) \equiv y$ это очевидно, а для $\varphi_{n+1} = A\varphi_n$ — следует из теоремы о непрерывной зависимости интеграла от параметра y и переменного верхнего предела. Так как равномерный предел непрерывных вектор-функций непрерывен, вектор-функция $\varphi(t, y)$ непрерывна по совокупности переменных на множестве $U = \{t \in [-\varepsilon, \varepsilon], y \in B_{b/2}(0)\}$. \square

7.1.6 Теоремы о выходе на границу компакта. Область определения решения уравнения

Теорема (Теорема о выходе интегральной кривой на границу компакта). *В условиях теоремы существования и единственности, пусть $K \subset \Omega$ — компактное множество. Пусть $(t_0, x_0) \in K$. Тогда существует решение $x(t)$ уравнения $\dot{x} = f(t, x)$ с начальным условием $x(t_0) = x_0$, график которого (интегральная кривая) выходит на границу K : для некоторого $t_1 > t_0$*

$$(t_1, x(t_1)) \in \partial K.$$

Доказательство. Заметим, что если две разных вектор-функции являются решениями уравнения $\dot{x} = f(t, x)$ с одним и тем же начальным условием, то в силу теоремы 2.4.3 они совпадают на пересечении областей определения. Рассмотрим решение $x(t)$ с максимальной по включению областью определения. Допустим, что его график лежит внутри K .

Для каждой точки $(t, x) \in K$ рассмотрим цилиндр, содержащий эту точку и целиком лежащий в Ω . Уменьшим цилиндры, сделав их открытыми. Мы получили открытое покрытие компакта K . Выберем из него конечное подпокрытие и

7.1.7. Ломаные Эйлера и теорема Пеано о существовании решения

возьмем замыкания цилиндров. Теперь у нас есть конечное количество цилиндров $\Pi_i := [t_i - a_i, t_i + a_i] \times B_{b_i}(x_i)$, $i = 1, \dots, N$, покрывающих K и лежащих в Ω . Пусть $m := \max_i \max_{\Pi_i} |f|$.

Пусть $a = \min a_i$, $b = \min b_i$. Для каждой точки $(t, x) \in K$ покрывающий её цилиндр Π_i (а значит, и меньший цилиндр $\Pi = [t - a, t + a] \times B_b(x)$) целиком лежит в Ω . По следствию 7.1.10, решение с начальным условием $(t, x) \in K$ определено на отрезке $[t - \varepsilon, t + \varepsilon]$, где значение $\varepsilon = \min(a, \frac{b}{m}, \frac{1}{2L})$ не зависит от t, x . В частности, область определения вектор-функции $x(t)$ вместе с любой точкой t содержит её ε -окрестность, где ε не зависит от t . Отсюда следует, что вектор-функция $x(t)$ определена на луче $t > t_0$.

График вектор-функции $x(t)$, $t \in (t_0, \infty)$, — неограниченное множество, поэтому он не может содержаться в ограниченном множестве K . Противоречие показывает, что график максимального решения не может содержаться внутри K , поэтому выходит на границу ∂K . \square

7.1.7 Ломаные Эйлера и теорема Пеано о существовании решения

Если правая часть уравнения непрерывна, но не липшицева, решение уравнения все равно существует (но оно может не быть единственным). Мы докажем это только в двумерном случае.

Теорема (Теорема Пеано). *Задача Коши для дифференциального уравнения на прямой с непрерывной правой частью имеет решение в малой окрестности начального условия.*

Более точно, пусть функция $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна в области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Пусть прямоугольник $\Pi = [t_0 - a, t_0 + a] \times [x_0 - b, x_0 + b]$ заключен внутри области Ω и $m := \max_{\Pi} |f|$. Положим $\alpha := \min(a, \frac{b}{m})$.

Тогда уравнение $\dot{x} = f(t, x)$ с начальным условием $x(t_0) = x_0$ имеет хотя бы одно решение, определенное на отрезке $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$.

Мы докажем, что последовательность приближений Эйлера, которую мы построили в разделе 3.1, — точнее, её подпоследовательность, — равномерно сходится к точному решению.

Естественно задать вопрос: Пусть g_k — непрерывные функции на отрезке. При каких условиях из последовательности $\{g_n\}$ можно выбрать равномерно сходящуюся подпоследовательность?

Понятно, что непрерывные функции g_k должны быть ограничены в совокупности, то есть ограничены общей константой. Иначе последовательности $g_k(x)$ могут оказаться неограниченными. Из следующего упражнения видно, что этого недостаточно.

Упражнение 135. Докажите, что из последовательности $g_k(t) = \sin kt$ нельзя выбрать равномерно сходящуюся подпоследовательность.

Ключевым оказывается условие *равностепенной непрерывности*.

Определение 7.1.12. Последовательность функций $g_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ называется *равностепенно непрерывной*, если достаточно близкие точки под действием всех функций g_n переходят в близкие:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall n (|t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow |g_n(t_1) - g_n(t_2)| < \varepsilon).$$

Теорема 7.1.13 (Теорема Арцела² – Асколи³). Пусть последовательность непрерывных функций $\{g_n\}$ на отрезке I

1. равномерно ограничена: $\sup |g_n(t)| < +\infty$;
2. равностепенно непрерывна.

Тогда из неё можно выбрать равномерно сходящуюся подпоследовательность.

Заметим, что если производные функций g_n ограничены общей константой m , то $|g_n(t_1) - g_n(t_2)| \leq m|t_1 - t_2|$, поэтому последовательность g_n равностепенно непрерывна.

Доказательство. Заметим, что для каждой точки $x \in I$ последовательность $g_n(x)$ ограничена. Значит, по теореме Больцано-Вейерштрасса из неё можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Однако для разных точек x эти последовательности будут разными.

Рассмотрим счетное всюду плотное множество $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ на отрезке I — например, множество рациональных чисел. Сначала с помощью *диагонального метода* мы выберем подпоследовательность g_{m_1}, g_{m_2}, \dots нашей последовательности функций, которая будет сходиться в каждой точке x_k . Затем мы докажем, что эта подпоследовательность равномерно сходится; только в этой части рассуждения применяется равностепенная непрерывность.

Диагональный метод

Пусть у нас есть бесконечная таблица чисел $y_{kn}, k, n \in \mathbb{N}$, ограниченных в совокупности. Как выбрать подпоследовательность её строк так, чтобы при вычеркивании всех остальных строк все столбцы таблицы превратились в сходящиеся последовательности?

Ответ дает диагональный метод, описанный ниже. Мы применяем этот метод для таблицы $y_{nk} = g_n(x_k)$.

Мы сформируем искомую последовательность строк m_1, m_2, \dots следующим образом. Сначала из первого столбца таблицы y_k^1 выберем сходящуюся подпоследовательность $y_{n_1}^1, y_{n_2}^1, \dots$. Вычеркнем все строки, кроме строк n_1, n_2, \dots ; теперь первый столбец таблицы — сходящаяся последовательность. Положим $m_1 = n_1$, то есть первую строку мы больше вычеркивать не будем.

²Чезаре Арцела (1847 – 1912) — математик, известный работами по алгебре, теории функций и математической физике.

³Джулио Асколи (1843 – 1896) — математик, известный своим вкладом в теорию функций вещественного переменного и теорию рядов Фурье.

7.1.7. Ломаные Эйлера и теорема Пеано о существовании решения

Теперь из второго столбца оставшейся таблицы $y_{n_1}^2, y_{n_2}^2, y_{n_3}^2 \dots$ выберем сходящуюся подпоследовательность $y_{k_1}^2, y_{k_2}^2, \dots$ (мы считаем $k_1 > 1$) и вычеркнем все строки, кроме первой и k_1, k_2, \dots . Второй столбец таблицы тоже стал сходящейся подпоследовательностью. Положим $m_2 = k_1$.

На очередном шаге конструкции мы уже добились того, чтобы первые s столбцов таблицы были сходящимися последовательностями, а первые s оставшихся строк m_1, m_2, m_s уже зафиксированы и вычеркиваться не будут. Мы рассматриваем $s+1$ -й столбец, выбираем из его элементов сходящуюся подпоследовательность $y_{l_1}^{s+1}, y_{l_2}^{s+1}, \dots$ (считая $l_1 > m_s$), и вычеркиваем все строки из оставшейся таблицы, кроме строк l_1, l_2, \dots и первых s строк. Тогда $(s+1)$ -й столбец тоже становится сходящейся последовательностью. Положим $m_{s+1} = l_1$.

Так определенная последовательность m_k обладает тем свойством, что если оставить в таблице только строки с номерами m_1, m_2, \dots , то все столбцы таблицы окажутся сходящимися последовательностями.

Применяя доказанное утверждение к таблице $y_n^k = g_n(x_k)$, мы находим последовательность m_1, m_2, \dots , для которой последовательность функций g_{m_k} сходится во всех точках x_1, x_2, \dots .

Равностепенная непрерывность и равномерная сходимость

Мы докажем следующее утверждение: если последовательность непрерывных функций f_k равностепенно непрерывна и сходится на последовательности $\{x_k\}$, плотной в I , то она равномерно сходится на I .

Проверим критерий Коши равномерной сходимости: для любого ε существует N , такой что для любых $m, k > N$ и для любого x выполнено $|f_m(x) - f_k(x)| < \varepsilon$.

Фиксируем ε . В силу равностепенной непрерывности, для некоторого δ из $|x - y| < \delta$ следует $|f_l(x) - f_l(y)| < \varepsilon$ для всех l . Так как множество $\{x_n\}$ всюду плотно, можно выбрать такой номер M , что в каждом отрезке длины δ содержится одна из точек x_1, \dots, x_M (говорят, что набор точек x_1, \dots, x_M образует δ -сеть). Наконец, так как все последовательности $f_n(x_l)$ сходятся, мы можем выбрать общий номер K , начиная с которого все значения $f_n(x_l)$, $1 \leq l \leq M$, ε -близки к пределу $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_l)$.

Мы готовы проверить, что критерий Коши выполнен для 4ε и номера K .

Для каждой точки x найдем точку δ -сети x_l , $1 \leq l \leq M$, которая к ней δ -близка. Тогда значения $f_n(x)$ и $f_n(x_l)$ будут ε -близки для любого n в силу равностепенной непрерывности. Но для всех $n > K$ значения $f_n(x_l)$ будут ε -близки к пределу $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_l)$, поэтому попарно 2ε -близки. Значит, значения $f_n(x)$ для разных $n > K$ попарно 4ε -близки, что и требовалось доказать. \square

Мы применим теорему Арцела-Асколи в доказательстве теоремы Пеано.

Доказательство теоремы Пеано. Мы найдем решение уравнения на отрезке $[t_0, t_0 + \alpha]$; на отрезке $[t_0 - \alpha, t_0]$ рассуждение аналогично. Построим последовательность кусочно-линейных функций $\varphi_n(t)$ с помощью метода Эйлера (см. раздел 3.1.2).

А именно, разобьем отрезок $[t_0, t_0 + \alpha]$ на n подотрезков одинаковой длины $\delta_n = \alpha/n$; пусть $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n = t_0 + \alpha$ — их концы. Обозначим через $[t]_n$ ближайшую слева к t точку из набора $\{\tau_j\}$. Тогда *приближение Эйлера* с шагом δ_n

— это непрерывная кусочно-линейная функция φ_n , которая имеет изломы в точках τ_i и удовлетворяет условию $\varphi'_n(t) = f(\tau_i, \varphi_n(\tau_i))$ для любого $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$, то есть

$$\varphi'_n(t) = f([t]_n, \varphi_n([t]_n)) \text{ для } t \in [t_0, t_0 + \alpha]. \quad (7.13)$$

Это условие, вместе с начальным условием $\varphi_n(t_0) = x_0$, позволяет вычислять функцию φ_n последовательно на отрезках $[\tau_0, \tau_1], [\tau_1, \tau_2], \dots$; значения функции в концах отрезков равны

$$\varphi_n(\tau_{k+1}) = \varphi_n(\tau_k) + \delta_n f(\tau_k, \varphi_n(\tau_k)).$$

Убедимся, что правая часть этого равенства корректно определена. Надо проверить, что точка $(\tau_k, \varphi_n(\tau_k))$ лежит в Ω . Действительно, $\tau_k < t_0 + \alpha < t_0 + a$; кроме того, по индукции легко доказать оценку $|\varphi_n(\tau_k) - \varphi_n(\tau_0)| < m|\tau_k - \tau_0| \leq m\alpha \leq b$. Из этого следует, что точка $(\tau_k, \varphi_n(\tau_k))$ лежит в Π , поэтому содержится в Ω . Итак, все приближения Эйлера корректно определены.

Производные $\varphi'_n(t)$ ограничены величиной $\max_{\Pi} |f| = m$, поэтому последовательность функций φ_n равномерно непрерывна. Кроме того, значения $\varphi_n(t)$ лежат в $[x_0 - b, x_0 + b]$ по доказанному выше, то есть последовательность φ_n равномерно ограничена. Поэтому последовательность φ_n удовлетворяет условию теоремы Арцела–Асколи. Выберем из неё равномерно сходящуюся подпоследовательность φ_{n_k} . Докажем, что её предел $\varphi(t)$ — одно из решений дифференциального уравнения. Нам будет проще пользоваться интегральной формой дифференциального уравнения, потому что равномерная сходимостъ позволяет переходить к пределу под знаком интеграла.

Интегрируя (7.13), получаем

$$\varphi_{n_k}(t) - \varphi_{n_k}(0) = \int_0^t f([\tau]_{n_k}, \varphi_{n_k}([\tau]_{n_k})) d\tau.$$

Левая часть равномерно сходится к $\varphi(t) - \varphi(0)$ при $k \rightarrow \infty$. Функции $f([\tau]_{n_k}, \varphi_{n_k}([\tau]_{n_k}))$ равномерно сходится к $f(\tau, \varphi(\tau))$, так как функции $[\tau]_{n_k}$ равномерно сходятся к τ , функции φ_{n_k} равномерно сходятся к φ , а функция f непрерывна на компакте Π и потому равномерно непрерывна.

Переходя к пределу под знаком интеграла, получаем

$$\varphi(t) - \varphi(0) = \int_0^t f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau,$$

поэтому φ — дифференцируемая функция, и её производная равна $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$. \square

Более подробное доказательство можно найти в следующих книгах:

1. И. Г. Петровский, «Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений» — М.: Изд-во МГУ, 1984. см. стр. 42 (III.11 “Доказательство существования решения дифференциального уравнения методом Пеано”).

7.1.8. Точность метода Эйлера: оценка через показатель сжатия оператора Пикара

2. А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, «Элементы теории функций и функционального анализа». - М., Наука, 1976. см. стр. 111 (II.7.5 “Теорема Пеано”).
3. Ф. Хартман, «Обыкновенные дифференциальные уравнения». - М., Мир, 1970. см. стр. 21 (II.2 “Теорема Пеано”).

В последней книге идея доказательства теоремы Пеано несколько другая: она состоит в том, чтобы построить последовательность гладких функций f_n , стремящихся к f , и сперва решить уравнения с правыми частями f_n , а потом рассмотреть предел таких решений.

7.1.8 Точность метода Эйлера: оценка через показатель сжатия оператора Пикара

В разделе 3.1.3 мы оценили скорость сходимости метода Эйлера, используя неравенство Гроуолла. В учебнике Арнольда “Обыкновенные дифференциальные уравнения” приведена идея другого способа оценить точность метода Эйлера на небольших отрезках. Предлагается использовать тот факт, что оператор Пикара сжимает — точнее, следующее предложение.

Предложение 7.1.14. Пусть $A: M \rightarrow M$ — сжимающий оператор относительно метрики $d(\cdot)$ на метрическом пространстве M . Пусть константа сжатия равна $q < 1$. Пусть p_0 — неподвижная точка для оператора A . Тогда расстояние от произвольной точки $p \in M$ до неподвижной точки следующим образом оценивается через $d(Ap, p)$:

$$d(p, p_0) \leq \frac{d(p, Ap)}{1 - q}.$$

Доказательство. Поскольку точка p_0 — неподвижная для оператора A , получаем $d(Ap, p_0) \leq qd(p, p_0)$. По неравенству треугольника

$$d(p, p_0) \leq d(p, Ap) + d(Ap, p_0) \leq d(p, Ap) + qd(p, p_0).$$

Отсюда следует предложение. □

Точное решение $x(t)$ задачи Коши

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \tag{7.14}$$

— это неподвижная точка оператора Пикара A . Оно будет играть роль p_0 в предыдущем предложении. Приближение Эйлера φ будет играть роль p . На достаточно коротком отрезке оператор Пикара сжимает, поэтому мы можем оценить $\text{dist}(\varphi, x)$ с помощью предыдущего предложения — для этого достаточно оценить $\text{dist}(A\varphi, \varphi)$.

Предложение 7.1.15. Пусть функция f ограничена константой m и L -липшицева по совокупности переменных. Пусть отрезок $[t_0, T] = [t_0, t_0 + \varepsilon]$ достаточно короткий, так что соответствующий оператор Пикара сжимает: длина отрезка ε удовлетворяет неравенству (7.7).

7 Основные теоремы и их применения

Пусть φ — ломаная Эйлера для задачи (7.14) с шагом δ , а x — точное решение задачи Коши (7.14). Тогда

$$|\varphi(t) - x(t)| \leq \frac{\delta \varepsilon L(m+1)}{(1 - \varepsilon L)} \text{ при } t \in [t_0, T].$$

Доказательство. Напомним, что в методе Эйлера мы рассматриваем точки $t_0 < t_1 < t_2 < \dots$ на равном расстоянии δ друг от друга и строим приближение Эйлера — непрерывную функцию φ , линейную на каждом отрезке $[t_k, t_{k+1}]$, причем

$$\varphi'(t) = f(t_k, \varphi(t_k)) \text{ для } t \in [t_k, t_{k+1}]. \quad (7.15)$$

По определению оператора Пикара

$$A\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau.$$

С другой стороны,

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t \varphi'(\tau) d\tau.$$

Вычтем эти неравенства, чтобы оценить $|\varphi - A\varphi|$:

$$|A\varphi(t) - \varphi(t)| \leq \int_{t_0}^t |f(\tau, \varphi(\tau)) - \varphi'(\tau)| dt.$$

Оценим подынтегральное выражение. По (7.15), производная $\varphi'(\tau)$ в точке $\tau \in [t_k, t_{k+1}]$ равна $f(t_k, \varphi(t_k))$, то есть близка к $f(\tau, \varphi(\tau))$ в силу липшицевости f :

$$\begin{aligned} |\varphi'(\tau) - f(\tau, \varphi(\tau))| &= |f(t_k, \varphi(t_k)) - f(\tau, \varphi(\tau))| \leq \\ &\leq L \cdot \text{dist}((t_k, \varphi(t_k)), (\tau, \varphi(\tau))) \leq L(|\tau - t_k| + |\varphi(\tau) - \varphi(t_k)|) \leq L(\delta + m\delta). \end{aligned}$$

Последнее неравенство следует из оценки

$$|\varphi(\tau) - \varphi(t_k)| \leq |\tau - t_k| \cdot \max_{[t_k, t_{k+1}]} |\varphi'| \leq \delta m.$$

Итак, мы оценили подынтегральное выражение и получили

$$|A\varphi(t) - \varphi(t)| \leq \int_{t_0}^T L(m+1)\delta dt = (T - t_0)L(m+1)\delta = \varepsilon L(m+1)\delta.$$

По лемме 7.1.9, оператор Пикара сжимает с константой εL . Теперь из предложения (7.1.14) следует требуемая оценка на $\text{dist}(x, \varphi)$. \square

Это предложение даёт оценку на скорость сходимости в методе Эйлера. Мы показали, что φ находится на расстоянии не более $O(\delta)$ от точного решения при условии, что длина рассматриваемого отрезка достаточно маленькая. Таким образом, скорость сходимости метода Эйлера обратно пропорциональна длине шага δ .

7.1.8. Точность метода Эйлера: оценка через показатель сжатия оператора Пикара

Полученная оценка на точность метода Эйлера несколько отличается от оценки из леммы 3.1.4 раздела 3.1.3, которую мы получали с помощью неравенства Гронуолла. Но и эта оценка линейна по длине шага δ , то есть погрешность в методе Эйлера равна $O(\delta)$.

Заметим, что предложение 7.1.15 неприменимо при $T > \frac{1}{2L}$, между тем как оценка из леммы 3.1.4 работает при всех T . Однако и в той оценке присутствует член e^{LT} , который очень велик при $T \gg \frac{1}{L}$.

7.2 Теоремы о гладкости и уравнение в вариациях

В этом разделе мы докажем ряд теорем о гладкой зависимости решений дифференциального уравнения от начальной точки, от времени и дополнительных параметров. В частности, мы докажем теорему 2.4.6 о C^r -гладкой зависимости решения от начального условия. Начнем с $r = 1$.

7.2.1 Формулировка теоремы о C^1 -гладкости

Рассмотрим дифференциальное уравнение в \mathbb{R}^n :

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (t, x) \in \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (7.16)$$

Фиксируем начальный момент времени $t_0 \in \mathbb{R}$. Пусть $t \mapsto \varphi(t, x_0)$ — решение уравнения (7.16) с начальным условием $\varphi(t_0) = x_0$.

Следующая теорема — это теорема 2.4.6 о C^r -гладкости для $r = 1$.

Теорема 7.2.1. *В условиях теоремы 2.4.3, если $f \in C^2(\Omega)$, то решение уравнения $\dot{x} = f(t, x)$ C^1 -гладко зависит от начального условия и времени.*

Более точно, для любой точки $(t_0, x_0) \in \Omega$ существует её окрестность $U \subset \Omega$, такая что отображение $(t, x) \mapsto \varphi(t, x)$ является C^1 -гладким на U .

Для доказательства теоремы мы сначала получим дифференциальное уравнение в вариациях — уравнение на дифференциал по x отображения $x \mapsto \varphi(t, x)$.

7.2.2 Уравнение в вариациях

Пусть мы точно знаем решение уравнения (7.1) с начальным условием $(0, x_0)$ — вектор-функцию $x(t) := \varphi(t, x_0)$, $x(0) = x_0$. Чтобы найти близкое решение $t \mapsto \varphi(t, x)$ с начальным условием $x \approx x_0$ с точностью $o(x - x_0)$, достаточно знать дифференциал по x отображения $x \mapsto \varphi(t, x)$ в точке x_0 :

$$X(t) = \left. \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x} \right|_{x=x_0} \quad (7.17)$$

так как по определению дифференциала

$$\varphi(t, x) = \varphi(t, x_0) + X(t)(x - x_0) + o(x - x_0). \quad (7.18)$$

В фиксированной системе координат матрица оператора $X(t): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ имеет компоненты $X_{ij}(t) = \frac{\partial \varphi_i(t)}{\partial x_j}$, где $\varphi(t, x) = (\varphi_1(t, x), \varphi_2(t, x), \dots, \varphi_n(t, x))$.

Теорема 7.2.2 (Уравнение в вариациях). *В условиях теоремы о C^1 -гладкости (теорема 7.2.1) пусть $x(t)$ — решение уравнения с начальным условием $x(0) = x_0$. Тогда оператор $X(t) = \left. \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x} \right|_{x=x_0}$ удовлетворяет линейному неавтономному уравнению*

$$\dot{X} = A(t)X \quad (7.19)$$

с начальным условием $X(0) = E$, где

$$A(t) = \left. \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} \right|_{x=x(t)}$$

— дифференциал по x правой части дифференциального уравнения в точке $x(t)$. Уравнение (7.19) называется **уравнением в вариациях по начальному условию** вдоль решения $x(t)$.

Уравнение (7.19) — это уравнение на операторно-значную функцию $X(t)$. В координатной записи оно превращается в систему из n^2 уравнений на элементы матрицы $X_{ij}(t)$, зависящие от времени: $\dot{X}_{ij} = \sum_k A_{ik}(t)X_{kj}$.

Замечание 7.2.3. Заметим, что операторно-значная функция $A(t)$ определяется по решению $x(t)$ исходного уравнения. Поэтому, чтобы только выписать уравнение в вариациях, нужно уже знать $x(t)$.

Полное доказательство теоремы 7.2.2 — часть доказательства теоремы 7.2.1. Ниже мы приводим эвристическое доказательство теоремы 7.2.2, которое объясняет, почему уравнение в вариациях имеет такой вид.

Эвристическое доказательство теоремы 7.2.2 об уравнении в вариациях. Запишем дифференциальное уравнение (7.1) на вектор-функцию $\varphi(t, x_0 + h)$:

$$\dot{\varphi}(t, x_0 + h) = f(t, \varphi(t, x_0 + h)).$$

Допустим, гладкость вектор-функции φ достаточна, чтобы продифференцировать это равенство по h при $h = 0$:

$$\left. \frac{\partial}{\partial h} \right|_{h=0} \frac{\partial}{\partial t} \varphi(t, x_0 + h) = \left. \frac{\partial}{\partial x} f(t, x) \right|_{x=\varphi(t, x_0)=x(t)} \cdot \left. \frac{\partial}{\partial h} \varphi(t, x_0 + h) \right|_{h=0} = A(t)X(t).$$

Допустим, мы можем поменять местами операции дифференцирования в левой части равенства. Мы получим производную по времени от $\left. \frac{\partial}{\partial h} \right|_{h=0} \varphi(t, x_0 + h) = X(t)$. Итак,

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t),$$

что и требовалось. □

Из уравнения в вариациях легко получить следующее важное утверждение.

Теорема 7.2.4 (Линейная часть преобразования фазового потока в особой точке векторного поля). *Рассмотрим автономное уравнение $\dot{x} = v(x)$ с особой точкой в нуле. Пусть $v(x) = Ax + o(x)$. Тогда $\varphi(t, x) = e^{At}x + o(x)$: линейная часть отображения фазового потока вблизи особой точки совпадает с отображением фазового потока линейного уравнения $\dot{x} = Ax$.*

Доказательство. Пусть $\varphi(t, x) = X(t)x + o(x)$. Тогда операторно-значная функция $X(t)$ удовлетворяет уравнению в вариациях вдоль нулевого решения $x(t) \equiv 0$. Оператор $A(t) = \frac{\partial v}{\partial x}|_{x(t)}$ в этом случае не зависит от времени, так как $x(t) \equiv 0$, и совпадает с линейной частью A векторного поля в особой точке. Уравнение в вариациях

$$\begin{aligned}\dot{X} &= AX \\ X(0) &= E\end{aligned}$$

— это линейное уравнение с постоянной правой частью. Его решением будет экспонента оператора At : $X(t) = e^{At}$, что и требовалось. \square

7.2.3 Расширенная система

Перейдем к доказательству теоремы 7.2.1 и теоремы 7.2.2. Выпишем *расширенную систему* уравнений в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}$ на отображения φ, X :

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = f(t, \varphi) \\ \dot{X} = A(t, \varphi)X, \end{cases} \quad (7.20)$$

где $A(t, \varphi) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, \varphi)$. Зададим начальные условия $\varphi(0) = x$, $X(0) = E$. Правая часть уравнения (7.20) принадлежит классу C^1 , значит, по теореме существования и единственности, уравнение имеет решение (φ, X) . Вектор-функция φ , в силу первого уравнения системы, и есть решение нашего уравнения (7.1) с начальным условием x . Оператор $X(t)$ — решение второго уравнения системы, то есть уравнения в вариациях вдоль решения $\varphi(t, x_0)$.

Теперь мы докажем, что X — это действительно производная решения по начальному условию; это не следует из вида системы (7.20).

7.2.4 Пикаровские приближения

Наше доказательство теоремы о непрерывной зависимости решения от начального условия опиралось на то, что пикаровские приближения к решению дифференциального уравнения равномерно (по начальному условию x_0) сходятся к точному решению.

Выпишем пикаровские приближения для расширенной системы (7.20) с начальным условием (x, E) . Интегральное уравнение, которое соответствует расширенной системе, имеет такой вид:

$$\begin{aligned}\varphi(t, x) &= x + \int_0^t f(\tau, \varphi(\tau, x))d\tau \\ X(t, x) &= E + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(\tau, \varphi(\tau, x))X(\tau, x)d\tau\end{aligned}$$

Пикаровские приближения для начального условия $\varphi(0) = x, X(0) = E$ в этом случае определяются равенствами: $(\varphi_0, X_0) = (x, E)$,

$$\begin{aligned}\varphi_{m+1}(t, x) &= x + \int_0^t f(\tau, \varphi_m(\tau, x)) d\tau \\ X_{m+1}(t, x) &= E + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(\tau, \varphi_m(\tau, x)) X_m(\tau, x) d\tau\end{aligned}$$

Мы знаем, что пикаровские приближения (φ_m, X_m) равномерно по x сходятся к (φ, X) в некоторой малой окрестности $t \in [\varepsilon, \varepsilon]$ (см. следствие 7.1.10). Сейчас мы докажем по индукции (см. лемму 7.2.5 ниже), что $\frac{\partial \varphi_m}{\partial x} = X_m$. Пользуясь равномерной сходимостью пикаровских приближений (φ_m, X_m) к (φ, X) , перейдем к пределу при $m \rightarrow \infty$; мы получаем равенство $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = X$. В силу второго уравнения из (7.20), операторно-значная функция $X(t, x_0)$ для фиксированного x_0 удовлетворяет уравнению в вариациях; по доказанному, $X(t, x_0) = \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x}|_{x=x_0}$. Поэтому $\frac{\partial \varphi}{\partial x}|_{x=x_0}$ удовлетворяет уравнению в вариациях. Теорема 7.2.2 об уравнении в вариациях доказана по модулю леммы 7.2.5.

Завершим доказательство теоремы 7.2.1 о гладкости по модулю леммы 7.2.5. Операторно-значная функция $X(t, x)$ непрерывна по t, x как решение дифференциального уравнения (7.20), поэтому дифференциал $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = X$ непрерывно зависит от t, x . Непрерывность производной $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ следует из самого дифференциального уравнения на φ . Теорема о гладкости 7.2.1 доказана по модулю следующей леммы.

Лемма 7.2.5. *В условиях теоремы о C^1 -гладкости (теорема 7.2.1) для пикаровских приближений уравнения (7.20) с начальным условием (x, E) , где x принадлежит малой окрестности точки x_0 , выполнено $\frac{\partial \varphi_m}{\partial x} = X_m$.*

Доказательство. Докажем лемму по индукции. База индукции очевидна: $\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} = E$, так как E — дифференциал тождественного отображения.

Пусть для (φ_m, X_m) утверждение доказано; тогда для (φ_{m+1}, X_{m+1}) получаем

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi_{m+1}}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(x + \int_0^t f(\tau, \varphi_m(\tau, x)) d\tau \right) = E + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(\tau, \varphi_m(\tau, x)) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \varphi_m(\tau, x) d\tau = \\ &= E + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(\tau, \varphi_m(\tau, x)) X_m(\tau, x) d\tau = X_{m+1}(t, x).\end{aligned}\quad (7.21)$$

□

Лемма доказана, тем самым доказана теорема об уравнении в вариациях и теорема о гладкости.

Сформулируем без доказательства более сильный вариант теоремы о гладкости, см. учебник В.И. Арнольда «Обыкновенные дифференциальные уравнения».

Теорема 7.2.6 (Усиление теоремы о гладкости). *В теореме 7.2.1 достаточно требовать $v \in C^1(\Omega)$.*

7.2.5 Теорема о C^r -гладкости (теорема 2.4.6)

Теорема (Теорема о гладкости решения по начальным условиям). *В условиях теоремы 2.4.3, если $f \in C^r(\Omega)$, $r \geq 2$, то решение уравнения $\dot{x} = f(t, x)$ C^{r-1} -гладко зависит от начального условия и времени.*

Более точно, для любой точки $(t_0, x_0) \in \Omega$ существует её окрестность $U \subset \Omega$, такая что отображение $(t, x) \mapsto \varphi(t, x)$ является C^{r-1} -гладким на U .

Доказательство. Докажем это утверждение индукцией по r . Базу даёт теорема 7.2.1.

Пусть утверждение уже доказано для произвольного уравнения с C^{r+1} -гладкой правой частью. Для $f \in C^{r+2}(\Omega)$ выпишем расширенную систему (7.20); её правая часть принадлежит $C^{r+1}(\Omega)$, поэтому в силу предположения индукции $(\varphi, X) \in C^r(U)$. Значит, $X \in C^r(U)$, то есть дифференциал вектор-функции φ по пространственным переменным C^r -гладкий. Производная по времени от вектор-функции φ тоже C^r -гладкая, потому что она равна $f(t, \varphi)$. Итак, дифференциал вектор-функции φ — C^r -гладкий. Поэтому $\varphi \in C^{r+1}(\Omega)$, что и требовалось. \square

Если в этом доказательстве сослаться на теорему 7.2.6, а не на теорему 7.2.1, то получим усиленную версию теоремы о гладкости: решение уравнения с C^r -гладкой правой частью C^r - (а не C^{r-1} -) гладко зависит от начального условия и времени.

7.2.6 Производная решения уравнения по параметру

Рассмотрим семейство дифференциальных уравнений, зависящих от (многомерного) параметра ε :

$$\dot{x} = f(t, x, \varepsilon), \quad (t, x) \in \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}, \quad \varepsilon \in B \subset \mathbb{R}^k, \quad (7.22)$$

где B — открытое множество. Решение такого уравнения с начальным условием x мы обозначим $\varphi(t, x, \varepsilon)$.

Вопрос: каким образом решение φ зависит от этого параметра ε ?

Ответ даёт следующая теорема, которая немедленно следует из теоремы о C^r -гладкости.

Теорема 7.2.7. *Пусть $f \in C^r(\Omega \times B)$, $r \geq 2$. Тогда у любой точки вида $(0, x_0, \varepsilon_0)$ в $\Omega \times B$ есть окрестность $U \subset \Omega \times B$, такая что $\varphi \in C^{r-1}(U)$.*

Иными словами, решение уравнения (7.22) гладко зависит и от начального условия, и от параметра.

Доказательство. Мы применим такой приём: семейство уравнений (7.22) превратим в одно уравнение

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, \varepsilon), \\ \dot{\varepsilon} = 0 \end{cases} \quad (7.23)$$

(см. рис. 7.2). После этого утверждение теоремы следует из теоремы о C^r -гладкости 2.4.6. \square

7.2.6. Производная решения уравнения по параметру

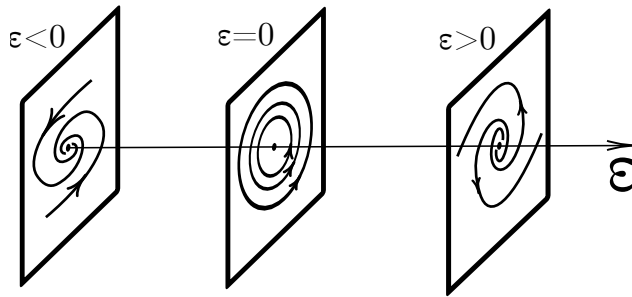


Рис. 7.2: Фазовый портрет системы (7.23)

Для того, чтобы анализировать производную решения по параметру, бывает полезно выписать *уравнение в вариациях по параметру*. Оно выписывается так же, как и уравнение в вариациях по начальным условиям. Мы ищем уравнение на *вариацию по параметру* — на операторно-значную функцию

$$Y(t, x) := \left. \frac{\partial \varphi(t, x, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}.$$

Эта функция показывает, каким образом меняется решение уравнения при малом изменении ε : ведь $\varphi(t, x, \varepsilon) = \varphi(t, x, 0) + Y(t, x)\varepsilon + o(|\varepsilon|)$.

Упражнение 136. *Выпишите систему уравнений в вариациях для системы 7.23. Найдите в этой системе уравнение на $Y(t, x)$.*

Эта задача дает один способ выписать уравнение в вариациях по параметру; мы воспользуемся другим способом — повторим рассуждения раздела 7.2.2.

Пусть $f \in C^r(\Omega \times B)$, $r \geq 3$. Тогда по теореме 7.2.7 вектор-функция φ является C^2 -гладкой по переменным x и ε . Продифференцируем по ε при $\varepsilon = 0$ тождество

$$\dot{\varphi}(t, x, \varepsilon) = f(t, \varphi(t, x, \varepsilon), \varepsilon).$$

Производные по t и по ε в левой части равенства можно переставлять, так как $\varphi \in C^2(U)$. Мы получаем *уравнение в вариациях по параметру*

$$\dot{Y}(t, x) = A(t)Y + b(t), \tag{7.24}$$

где

$$A(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, \varphi(t, x, 0), 0), \quad b(t) = \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(t, \varphi(t, x, 0), 0).$$

Так как $\varphi(0, x, \varepsilon) \equiv x$ (поток за нулевое время — тождественное отображение), то $Y(0, x) = 0$; это — начальное условие для уравнения в вариациях по параметру.

Заметим, что (7.24) — линейное неоднородное уравнение, а его однородная часть — обычное уравнение в вариациях по начальным условиям для уравнения $\dot{x} = f(t, x, 0)$.

Мы получили следующую теорему.

Теорема 7.2.8. *В условиях теоремы 7.2.7 при $r \geq 2$ дифференциал решения уравнения $\dot{x} = f(t, x, \varepsilon)$ по параметру удовлетворяет уравнению в вариациях по параметру (7.24) с начальным условием $Y(0, x) = 0$.*

7.2.7 Теорема об искажении фазового объема

Вопрос: в каких случаях отображение потока $g_v^t(x)$ векторного поля $\dot{x} = v(x)$ увеличивает объем, $\text{Vol}(g_v^t(U)) > \text{Vol} U$? Когда оно уменьшает объем? При каких условиях на $v(x)$ отображение потока сохраняет объем?

Как видно из следующей теоремы, на этот вопрос отвечает дивергенция векторного поля $\text{div } v$.

Пусть в фазовом пространстве задана евклидова структура и выбран базис, ортонормированный относительно этой евклидовой структуры. В этом базисе мы будем записывать координаты точек и компоненты векторного поля.

Определение 7.2.9. Дивергенцией векторного поля называется след матрицы якобиана

$$\text{div } v := \text{tr} \left(\frac{dv}{dx} \right).$$

Например, для поля на плоскости $v(x, y) = (p(x, y), q(x, y))$ получается $\text{div } v(x, y) = \frac{\partial p}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial q}{\partial y}(x, y)$.

Теорема 7.2.10. Если в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ дивергенция поля v отрицательна, $\text{div } v < 0$, и траектории из области U не покидают Ω : $g_v^t(U) \subset \Omega$ при $t \in [0, T]$, то фазовый объем уменьшается: $\text{Vol } g_v^T(U) < \text{Vol } U$.

Если дивергенция поля положительна в Ω , фазовый объем увеличивается. Если дивергенция равна нулю в Ω , фазовый объем сохраняется.

Доказательство. Рассмотрим случай $\text{div } v < 0$; остальные случаи рассматриваются аналогично.

По формуле о замене переменных в интеграле,

$$\text{Vol } g_v^T(U) = \int_{g_v^T(U)} 1 d\tilde{x} = \int_U \det \left| \frac{\partial g_v^T(x)}{\partial x} \right| dx$$

(мы сделали замену $\tilde{x} = g_v^T(x)$). Мы покажем, что в случае $\text{div } v < 0$ подынтегральное выражение всегда меньше единицы. Тогда интеграл окажется меньше $\text{Vol } U$, и утверждение будет доказано.

Заметим, что выражение под интегралом $X(t) = \frac{\partial g_v^T(x)}{\partial x}$ — это вариация решения по начальному условию. Фиксируем начальное условие $x_0 \in U$, и вблизи решения $x(t), x(0) = x_0$, выпишем уравнение в вариациях:

$$\dot{X}(t) = \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x(t)} X(t).$$

Это линейное уравнение на матрицу X вида $\dot{X} = A(t)X$. Формула Лиувилля — Остроградского (см. теорему 5.1.20) позволяет понять, как меняется определитель X с течением времени:

$$\frac{d}{dt} \det X = a(t) \det X,$$

где $a(t) = \operatorname{tr} A(t) = \operatorname{div} v(x(t))$. Такое линейное одномерное уравнение легко решается:

$$\det X(t) = \det X(0) e^{\int_0^t a(t) dt} = 1 \cdot e^{\int_0^t \operatorname{div} v(x(t)) dt}. \quad (7.25)$$

Так как дивергенция поля v отрицательна, интеграл тоже будет отрицателен, поэтому $\det X = \det \frac{\partial g_v^T(x)}{\partial x}$ всегда меньше единицы. Это и требовалось. \square

7.3 Теорема о выпрямлении

Как устроен фазовый портрет векторного поля локально, в окрестности данной точки a фазового пространства?

- Если a — особая точка, это сложный вопрос; ему посвящена целая теория, введение в которую содержится в разделе 8.3.
- Если a — неособая точка, поле вблизи неё всегда устроено одинаково. Фазовый портрет поля в окрестности неособой точки a можно *выпрямить*: существует диффеоморфизм H , переводящий исходное векторное поле в постоянное поле $\dot{x} = (1, 0, \dots, 0)$.

Действие диффеоморфизма на векторное поле мы определили в разделе 4.1.3.

Теорема 7.3.1 (Теорема о выпрямлении). Пусть $v \in C^2(\Omega)$ — векторное поле в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $v(a) \neq 0$. Тогда в некоторой окрестности $U \ni a$ существует диффеоморфизм H , который переводит поле v в поле $H_*v = (1, 0, \dots, 0)$.

Доказательство. Выберем систему координат так, что $a = 0$, и для вектора $v(0) = (v_1(0), \dots, v_n(0))$ выполнено $v_1(0) \neq 0$.

Рассмотрим пространство \mathbb{R}^n с координатами (t, x') , $t \in \mathbb{R}$, $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$, и гиперплоскость $\Gamma = \{t = 0\}$. Определим отображение G формулой

$$G((t, x')) := \varphi(t, (0, x')),$$

где $t \mapsto \varphi(t, x_0)$ — решение дифференциального уравнения $\dot{x} = v(x)$ с начальным условием x_0 . Тогда отображение G переводит траектории поля $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ в траектории поля v , см. рис. 7.3. Действительно, при этом отображении каждая прямая $x' = \text{const}$ переходит в траекторию векторного поля, $\varphi(t, (0, x'))$, которая начинается в точке $(0, x')$. Итак, прямые $x' = \text{const}$ — траектории поля e_1 — переходят в траектории поля v .

Искомое отображение H — обратное к G . Нам надо только проверить, что оно существует и тоже C^1 -гладко в малой окрестности нуля. Для этого достаточно доказать, что дифференциал G невырожден в нуле, и применить теорему об обратном отображении. Матрица Якоби отображения G в точке 0 имеет вид

$$\frac{dG}{d(t, x')}(0) = \begin{pmatrix} \left. \frac{d\varphi}{dt} \right|_{t=0, x'=0} & \left. \frac{d\varphi}{dx'} \right|_{t=0, x'=0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1(0) & 0 & \dots & 0 \\ v_2(0) & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ v_n(0) & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

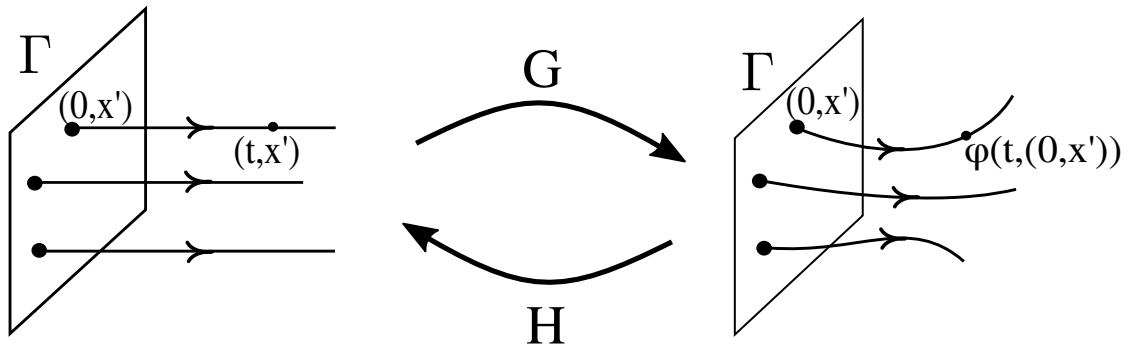


Рис. 7.3: Выпрямление векторного поля

Первый столбец равен производной решения $t \mapsto \varphi(t, (0, x'))$ по времени, то есть вектору векторного поля $v(0)$. Единичный минор возникает как якобиан тождественного отображения $\varphi(0, (0, x')) \equiv (0, x')$. Матрица Якоби имеет определитель $v_1(0) \neq 0$, что и требовалось. \square

Следствие 7.3.2. *Фазовый поток сохраняет свой генератор: $(g_v^t)_* v = v$.*

Доказательство следствия 7.3.2 для малых t . Докажем, что под действием g_v^t вектор $v(a)$ перейдет в вектор $v(g_v^t(a))$. Для этого применим диффеоморфизм H из теоремы 7.3.1 к полю v . Поле v перейдет в поле $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, фазовый поток перейдет в $g_{e_1}^t = x + te_1$ — семейство горизонтальных сдвигов. Горизонтальные сдвиги переводят горизонтальные векторы в горизонтальные, поэтому $(g_{e_1}^t)_* e_1 = e_1$. Значит, такое утверждение верно и до применения диффеоморфизма H , то есть для исходного поля v . \square

Упражнение 137. *Докажите следствие для всех t , для которых определен поток g_v^t .*

Следствие 7.3.3 (Существование интегрирующих множителей). *Любое автономное уравнение на плоскости*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y), \\ \dot{y} &= g(x, y) \end{aligned} \tag{7.26}$$

в окрестности неособой точки имеет первый интеграл. Кроме того, его можно домножить на функцию $q(x, y)$ (интегрирующий множитель) так, что оно станет уравнением в полных дифференциалах.

Доказательство. Пусть $H = (H_1, H_2)$ — диффеоморфизм, выпрямляющий поле v в окрестности неособой точки. Тогда линии уровня функции $F = H_2$ являются траекториями поля v в этой окрестности. Поэтому эта функция является первым интегралом уравнения. Первое утверждение доказано.

По критерию первого интеграла (предложение 4.3.4), $f(x, y) \frac{\partial F}{\partial x} + g(x, y) \frac{\partial F}{\partial y} = 0$. Значит, $\frac{f(x, y)}{g(x, y)} = -\frac{F_y}{F_x}$, и домножением можно превратить уравнение (7.26) в уравнение $\dot{x} = -F_y, \dot{y} = F_x$, которое эквивалентно пфаффову уравнению $F_x dx + F_y dy = 0$ в полных дифференциалах. \square

В некоторых случаях бывает полезно выпрямить поле не вблизи (неособой) точки, а *вдоль траектории*. Если траектория представляет собой замкнутую кривую, такого выпрямления не существует — поле $(1, 0, \dots, 0)$ не имеет замкнутых траекторий.

Теорема 7.3.4 (Теорема о трубке траекторий). Пусть $v \in C^2(\Omega)$ — векторное поле в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, и пусть $\gamma(t), t \in [0, T]$ — дуга его траектории, которая не является ни точкой, ни замкнутой кривой. Тогда в некотором открытом множестве U , содержащем эту дугу, определен диффеоморфизм H , который переводит поле v в поле $H_*v = (1, 0, \dots, 0)$.

При необходимости уменьшив U , мы можем считать, что множество $H(U)$ представляет собой цилиндр — декартово произведение отрезка по первой координате и шара по остальным координатам. Полученное множество U называется *трубкой траекторий* вокруг γ . Поэтому теорема и называется теоремой о трубке траекторий.

Доказательство. Доказательство во многом повторяет доказательство теоремы о выпрямлении. Пусть $a = \gamma(0)$ — начальная точка кривой $\gamma(t)$. Как и ранее, выберем систему координат так, что $a = 0$ и первая компонента поля v в этой точке ненулевая: $v_1(0) \neq 0$. Положим $\Gamma = \{t = 0\}$. Определим отображение G формулой $G((t, x')) = \varphi(t, (0, x'))$; на плоскости Γ отображение G тождественно. Так как решение уравнения $\dot{x} = v(x)$ с начальным условием $x(0) = 0$ определено на отрезке $[0, T]$ (оно соответствует траектории $\gamma(t)$), определены и решения этого уравнения с начальными условиями, близкими к нулю, на отрезке времени $[0, T]$. Значит, отображение G определено в некоторой окрестности V отрезка $[0, T] \times \{0\}$.

Как и ранее, покажем, что дифференциал отображения G невырожден в каждой точке отрезка $[0, T] \times \{0\}$. Действительно, этот дифференциал равен

$$\frac{dG}{d(t, x')} = \begin{pmatrix} \frac{d\varphi}{dt} & \frac{d\varphi}{dx'} \end{pmatrix},$$

но теперь нам надо доказать его невырожденность при $x' = 0$ и всех $t \in [0, T]$, а не только при $t = 0$.

Мы знаем, что дифференциал $\frac{d\varphi}{dx}$ является решением (линейного) уравнения в вариациях с начальным условием $\frac{d\varphi}{dx}|_{x=0} = E$. Поэтому этот дифференциал невырожден (например, в силу формулы Лиувилля-Остроградского, см. вычисление (7.25)). Матрица Якоби $\frac{dG}{d(t, x')}$ отличается от матрицы Якоби $\frac{d\varphi}{dx}$ только первым столбцом. Этот первый столбец $\frac{d\varphi}{dt}$ равен вектору векторного поля в точке $\gamma(t)$. Имеем

$$\frac{d\varphi}{dt} = v(\gamma(t)) = (g_v^t)_*v(0) = \frac{d\varphi}{dx}v(0) = \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}v_1(0) + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}v_2(0) + \dots + \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}v_n(0).$$

Второе равенство выполнено по следствию 7.3.2. Значит, первый столбец матрицы $\frac{dG}{d(t,x')}$ является линейной комбинацией столбцов матрицы $\frac{d\varphi}{dx}$ — векторов $\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}$, причем коэффициент при $\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}$ в этой линейной комбинации равен $v_1(0) \neq 0$. Значит, матрица $\frac{dG}{d(t,x')}$ невырождена в каждой точке отрезка $[0, T] \times \{0\}$.

Доказательство еще не завершено: следует показать, что отображение G будет инъективным в достаточно малой окрестности отрезка $[0, T] \times \{0\}$. В отличие от теоремы о выпрямлении, здесь инъективность не следует сразу из невырожденности дифференциала. После этого останется положить $H = G^{-1}$, и доказательство будет закончено.

Покажем, что отображение G является инъективным в достаточно малой окрестности отрезка $[0, T] \times \{0\}$. Пусть это не так; тогда $\varphi(t, (0, x')) = \varphi(t', (0, x''))$ для двух разных точек (t, x') и (t', x'') из окрестности отрезка $[0, T] \times \{0\}$; будем считать, что $t \leq t'$. Имеем

$$(0, x') = \varphi(0, (0, x')) = \varphi(t' - t, (0, x'')) = \varphi(\tau, (0, x'')). \quad (7.27)$$

Итак, траектория точки $(0, x'') \in \Gamma$ снова пересекает Γ в точке $(0, x')$ для некоторых малых x', x'' и некоторого τ из некоторой окрестности отрезка $[0, T]$. Покажем, что это невозможно.

При доказательстве теоремы о выпрямлении мы доказали, что отображение G инъективно в некоторой окрестности нуля. Поэтому существует такое s , что при $0 < |\tau| < s$ и при малых x', x'' выполнено $(0, x') \neq \varphi(\tau, (0, x''))$.

Мы знаем, что траектория $\gamma(t)$ не является ни точкой, ни замкнутой кривой. Покажем, что она не имеет самопересечений. Действительно, если траектория $\gamma(t)$ самопересекается, $0 = \gamma(T) = g_v^T 0$ для $T \neq 0$, то по групповому свойству фазового потока $\gamma(s) = g_v^s 0 = g_v^s g_v^T 0 = g_v^{T+s} 0 = \gamma(T+s)$ для любого s , то есть вектор-функция $t \mapsto \gamma(t)$ является T -периодическим решением уравнения $\dot{x} = v(x)$. Поэтому траектория $\gamma(t)$ — точка или замкнутая кривая, и мы получаем противоречие с предположением теоремы.

Так как кривая γ несамопересекающаяся, для малых ε дуга траектории $\{\gamma(t), t \in [s, T + \varepsilon]\}$ не посещает некоторую окрестность точки $0 = \gamma(0)$, поэтому и любая близкая дуга траектории поля v не посещает её. Итак, если точка $(0, x'')$ достаточно близка к нулю, то дуга её траектории $\{\varphi(t, (0, x'')), t \in (-s, s)\}$, не пересекает Γ в силу выбора s , а дуга $\{\varphi(t, (0, x'')), t \in [s, T + \varepsilon]\}$ — в силу близости к дуге $\{\gamma(t), t \in [s, T + \varepsilon]\}$. Поэтому равенство (7.27) невозможно, и отображение G инъективно в малой окрестности отрезка $[0, T] \times \{0\}$. □

7.4 Первые интегралы и уравнения в частных производных первого порядка

7.4.1 Независимые системы первых интегралов

Напомним, что первый интеграл уравнения

$$\dot{x} = v(x), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

— это функция, постоянная вдоль фазовых кривых. Напомним критерий первого интеграла (предложение 4.3.4): *функция F является первым интегралом уравнения $\dot{x} = v(x)$, если $\mathcal{L}_v F \equiv 0$, то есть*

$$v_1(x) \frac{\partial F}{\partial x_1}(x) + v_2(x) \frac{\partial F}{\partial x_2}(x) + \cdots + v_n(x) \frac{\partial F}{\partial x_n}(x) \equiv 0. \quad (7.28)$$

Если поле в \mathbb{R}^n имеет $n - 1$ *разных* первых интегралов, это позволяет решить соответствующее уравнение. Точная формулировка и доказательство этого утверждения будут даны ниже, см. примечание 7.4.5.

Определение 7.4.1. Система $F = (F_1, \dots, F_m)$ первых интегралов класса C^1 называется *функционально независимой* в точке a , если ранг оператора $\frac{\partial F}{\partial x}$ в точке a равен m :

$$\text{rank} \frac{\partial F}{\partial x}(a) = m, \quad (7.29)$$

то есть если дифференциалы $dF_i(a)$ линейно независимы.

Пример 7.4.2. Рассмотрим векторное поле $\dot{x} = e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ в пространстве \mathbb{R}^n . Пусть $x = (x_1, x')$, то есть $x' = (x_2, \dots, x_n)$. Тогда первым интегралом будет любая функция вида $\Phi(x')$, и наоборот: любой первый интеграл имеет такой вид. Действительно, первый интеграл должен принимать одинаковые значения во всех точках траектории — прямой $(t, x_2, x_3, \dots, x_n), t \in \mathbb{R}^n$, поэтому он должен быть функцией координат x_2, \dots, x_n .

Простейшая система $n - 1$ функционально независимых первых интегралов состоит из координатных функций $F_1(x) = x_2, F_2(x) = x_3, \dots, F_{n-1}(x) = x_n$. Любой другой первый интеграл выражается через них, то есть имеет вид $F = \Phi(F_1, \dots, F_{n-1})$.

Определение 7.4.3. Система $n - 1$ функционально независимых первых интегралов уравнения $\dot{x} = v(x)$ в \mathbb{R}^n называется *полной* системой первых интегралов.

Теорема 7.4.4. У уравнения $\dot{x} = v(x)$ с C^2 -гладкой правой частью в окрестности неособой точки a всегда существует полная система первых интегралов.

Для любой полной системы первых интегралов $\{F_1, \dots, F_{n-1}\}$ в некоторой окрестности точки a любой другой первый интеграл F выражается через $\{F_1, \dots, F_{n-1}\}$: $F = \Phi(F_1, \dots, F_{n-1})$.

Доказательство. Свойство функции быть первым интегралом и свойство функциональной независимости системы функций не зависят от системы координат, поэтому мы будем доказывать теорему в той системе координат, в которой она проще всего.

Перейдем в выпрямляющую координату поля v ; теперь утверждение достаточно доказать для векторного поля $\dot{x} = e_1$. Существование полной системы первых интегралов доказано в примере 7.4.2.

Пусть $\{F_1, \dots, F_{n-1}\}$ — полная система первых интегралов. По рассуждению из примера 7.4.2, любой первый интеграл уравнения $\dot{x} = e_1$ есть функция переменных x_2, \dots, x_n , поэтому F_1, \dots, F_{n-1}, F есть функции от x_2, \dots, x_n .

Применим теорему об обратной функции к отображению $(x_2, \dots, x_n) \mapsto (F_1, \dots, F_{n-1})$; дифференциал отображения невырожден в силу условия (7.29) с $m = n - 1$. Получим, что существует обратное отображение:

$$(x_2, \dots, x_n) = \Psi(F_1(x_2, \dots, x_n), \dots, F_{n-1}(x_2, \dots, x_n)).$$

Так как F есть функция от x_2, \dots, x_n , она тоже выражается через F_1, \dots, F_{n-1} , что и требовалось. \square

Замечание 7.4.5. Если мы нашли $n-1$ независимых первых интегралов F_1, \dots, F_{n-1} автономного C^2 -гладкого уравнения $x' = v(x)$ в окрестности точки a , это всегда позволяет решить уравнение. Действительно, без ограничения общности будем считать, что векторы $\text{grad } F_1|_a, \dots, \text{grad } F_{n-1}|_a, e_n$ образуют базис, где e_n — n -й координатный вектор. Тогда замена координат $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (F_1, \dots, F_{n-1}, x_n)$ невырождена в окрестности точки a .

После этой замены первые $n - 1$ уравнений системы примут тривиальный вид $F'_j = 0$, так как функции F_j — первые интегралы исходного уравнения. Последнее уравнение примет вид $x'_n = w(F_1, \dots, F_{n-1}, x_n)$ для некоторой функции w . Так как все первые интегралы постоянны, то последнее уравнение является одномерным автономным уравнением, поэтому его можно решить методом разделения переменных.

7.4.2 Линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка

Уравнение в частных производных — это уравнение на частные производные неизвестной функции $u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ в каждой точке некоторой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Такие уравнения часто встречаются в приложениях (см., например, раздел 6). Теория уравнений в частных производных достаточно сложна; даже для того, чтобы обеспечить существование и единственность решения, приходится налагать на уравнение нетривиальные дополнительные условия.

Уравнение в частных производных *первого порядка* — это уравнение, в которое входят только первые частные производные искомой функции. Оно называется *линейным*, если искомая функция и её производные входят в уравнение линейно.

В этом разделе нас будут интересовать уравнения вида

$$a_1(x) \frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2(x) \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + a_n(x) \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0. \quad (7.30)$$

7.4.3. Задача Коши для линейного однородного уравнения в частных производных

Замечание 7.4.6. Это уравнение есть критерий первого интеграла (7.28) для поля $v = (a_1(x), a_2(x), \dots, a_n(x))$. Поэтому уравнение (7.30) означает, что функция $u(x)$ не меняется вдоль траекторий векторного поля v .

Это наблюдение мотивирует следующее определение.

Определение 7.4.7. По уравнению в частных производных (7.30) определим векторное поле $v := (a_1(x), a_2(x), \dots, a_n(x))$. Уравнение $\dot{x} = v(x)$ называется *уравнением характеристик* для уравнения (7.30); фазовые кривые поля v называются *характеристиками* уравнения (7.30) в частных производных.

Теорема 7.4.8. Пусть $\dot{x} = v(x)$ — уравнение характеристик для (7.30). Тогда любое решение $u(x)$ уравнения (7.30) постоянно вдоль характеристик.

В окрестности неособой точки поля v общее решение (7.30) имеет вид $u = \Phi(F_1, \dots, F_{n-1})$, где Φ — произвольная функция из $C^1(\mathbb{R}^{n-1})$, а $F = (F_1, \dots, F_{n-1})$ — полная система первых интегралов уравнения характеристик в окрестности точки a .

Доказательство. Уравнение (7.30) можно переписать в виде

$$\mathcal{L}_v u = 0. \quad (7.31)$$

Это условие равносильно тому, что функция u — первый интеграл уравнения характеристик (см. критерий первого интеграла (7.28)). По теореме 7.4.4, любой первый интеграл выражается через интегралы полной системы; отсюда следует, что $u = \Phi(F_1, \dots, F_{n-1})$. \square

7.4.3 Задача Коши для линейного однородного уравнения в частных производных

В предыдущем разделе мы нашли все решения уравнения (7.30). Но уравнения в частных производных первого порядка часто возникают вместе с *начальными условиями*; требуется найти то единственное решение, которое удовлетворяет начальному условию.

Для уравнения (7.30) естественное начальное условие выглядит следующим образом. Рассмотрим *задачу Коши* — уравнение вида

$$\begin{aligned} a_1(x) \frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2(x) \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + a_n(x) \frac{\partial u}{\partial x_n} &= 0, \\ u|_{\Gamma} &= f \end{aligned} \quad (7.32)$$

где $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ — гладкая гиперповерхность (поверхность размерности $n - 1$). Условие $u|_{\Gamma} = f$ называется *начальным условием* для уравнения (7.30), а сама поверхность Γ называется *начальной поверхностью*; мы будем обозначать её $\hat{\Gamma}$.

Определение 7.4.9. Точка $p \in \Gamma$ называется *характеристической*, если в этой точке характеристика касается Γ , и *нехарактеристической* в противном случае.

Теорема 7.4.10 (Теорема существования и единственности для уравнения (7.32)). *Задача Коши для уравнения (7.32) всегда однозначно разрешима в окрестности нехарактеристической точки.*

Доказательство. Вблизи нехарактеристической точки $p \in \Gamma$ выпустим из всех точек Γ характеристики – фазовые кривые поля v . Они заполнят всю окрестность точки p . Уравнение (7.32) означает, что вдоль характеристик значение u не меняется; на гиперповерхности Γ оно нам известно. Поэтому мы можем определить значение u в полной окрестности u (см. рис. 7.4).

Формально говоря, мы выпрямляем поле v в окрестности точки p . Поле v станет постоянным полем $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$. Положим $x' = (x_2, \dots, x_n)$. Поверхность Γ в новой карте станет гладкой поверхностью, которая не касается e_1 вблизи p . По теореме о неявной функции, её можно представить в виде графика функции: $\Gamma = \{(x_1, x') \in U \mid x_1 = g(x')\}$. Мы знаем, что искомая функция u постоянна вдоль характеристик, то есть не зависит от x_1 . Выпустим из точки (x_1, x') характеристику – прямую, параллельную оси Ox_1 . Она пересечёт Γ в точке $(g(x'), x') \in \Gamma$. Поэтому единственный способ задать функцию u – это положить $u(x_1, x') := f(g(x'), x')$; такая функция постоянна вдоль характеристик $\{x' = const\}$ и совпадает с f на $\Gamma = \{(g(x'), x')\}$.

Это доказывает теорему существования и единственности для уравнения (7.32). \square

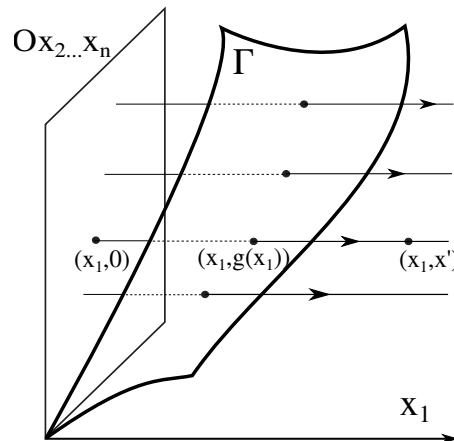


Рис. 7.4: Начальная поверхность Γ и характеристики уравнения (7.32) в выпрямляющей карте поля v

Упражнение 138. *Приведите пример такого уравнения вида (7.30) и такой характеристической точки $p \in \Gamma$, чтобы решение уравнения в некоторой окрестности точки p*

- не существовало;

7.4.4. Неоднородные линейные уравнения в частных производных первого порядка

- не было единственным.

Подсказка: Пусть характеристики касаются поверхности Γ так, как показано на рисунке 7.5; значения $u|_{\Gamma} = f$ известны. В какой области мы можем определить значения u ?

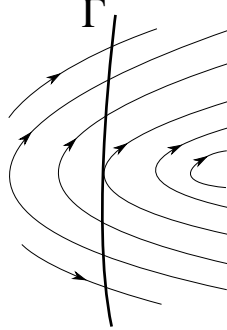


Рис. 7.5: Характеристическая точка на поверхности Γ

7.4.4 Неоднородные линейные уравнения в частных производных первого порядка

В этом разделе мы рассмотрим задачу Коши вида

$$a_1(x) \frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2(x) \frac{\partial u}{\partial x_2} + \cdots + a_n(x) \frac{\partial u}{\partial x_n} = b(x), \quad (7.33)$$

$$u|_{\Gamma} = f$$

которая отличается от (7.32) наличием неоднородности в правой части.

В этом случае характеристики и характеристические точки определяются так же, как и раньше. Но теперь u не постоянна вдоль характеристик. Уравнение (7.33) можно записать в виде $\mathcal{L}_v u = b(x)$: мы знаем производную функции u вдоль характеристики в каждой точке.

Доказательство следующей теоремы конструктивно: оно содержит способ решения уравнения (7.33).

Теорема 7.4.11 (Теорема существования и единственности для уравнения (7.33)). *Задача Коши для уравнения (7.33) всегда однозначно разрешима в окрестности нехарактеристической точки.*

Доказательство. Как и раньше, выпрямим поле v в окрестности нехарактеристической точки $p \in \Gamma$. Будем считать, что поле v совпадает с постоянным полем $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, а поверхность Γ есть множество точек вида $(g(x'), x')$. Если мы решим уравнение в новых координатах, достаточно будет сделать обратную замену координат, чтобы решить его в старых координатах.

После замены координат уравнение (7.33) принимает вид $\frac{\partial}{\partial x_1} u(x) = \tilde{b}(x)$. Это одномерное дифференциальное уравнение на функцию $u(\cdot, x')$ на каждой прямой

$\{x' = \text{const}\}$, и его начальное условие имеет вид $u(g(x'), x') = f(g(x'), x')$. Единственное решение такого уравнения на каждой прямой $x' = \text{const}$ — это функция

$$u(x_1, x') = f(g(x'), x') + \int_{g(x')}^{x_1} \tilde{b}(\tau, x') d\tau.$$

□

7.4.5 Квазилинейные уравнения в частных производных первого порядка

7.4.5.1 Определения

Уравнение вида

$$a_1(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + a_n(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_n} = b(x, u). \quad (7.34)$$

на неизвестную функцию $u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ называется квазилинейным уравнением в частных производных первого порядка. Мы будем считать, что коэффициенты уравнения — функции a_k и b — непрерывно-дифференцируемы.

Левая часть уравнения линейна по производным искомой функции u , но коэффициенты этой линейной зависимости могут зависеть от x, u . Поэтому уравнение теряет сходство с критерием первого интеграла. Уравнение (7.34) рассматривают вместе с начальным условием вида

$$u|_{\Gamma} = f, \quad (7.35)$$

где $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ — $(n-1)$ -мерная гладкая поверхность, а функция $f: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^n$ непрерывно-дифференцируема. График функции $f: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ называют *начальной поверхностью*. Задача (7.34), (7.35) называется *задачей Коши для квазилинейного уравнения*.

Рассмотрим расширенное $(n+1)$ -мерное фазовое пространство (x, z) , $x \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}$. В этом пространстве лежит график искомой функции u .

Определение 7.4.12. Векторное поле $v(x, z) := (a_1(x, z), \dots, a_n(x, z), b(x, z))$ в расширенном фазовом пространстве называется *характеристическим векторным полем* уравнения (7.34). Соответствующее обыкновенное дифференциальное уравнение называется *характеристическим*, а его фазовые кривые — *характеристиками*.

7.4.5.2 Роль характеристик при решении квазилинейных уравнений

Следующая лемма описывает связь между квазилинейным уравнением и его характеристиками.

Лемма 7.4.13. Уравнение (7.34) для гладкой функции u равносильно тому, что график функции $u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ в каждой своей точке касается вектора характеристического векторного поля.

Гладкая функция $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ удовлетворяет уравнению (7.34) если и только если вместе с каждой своей точкой график функции u содержит участок характеристики, проходящей через эту точку.

7.4.5. Квазилинейные уравнения в частных производных первого порядка

Доказательство. Найдем касательную гиперповерхность к графику функции u в точке $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$.

Пересечение графика функции u с вертикальной плоскостью вида $\{x_1 = p_1\}$ — это кривая $(p_1 + t, p_2, \dots, p_n, u(p_1 + t, p_2, \dots, p_n))$; касательный вектор к этой кривой имеет вид $(1, 0, \dots, 0, \frac{\partial u}{\partial x_1}|_p)$. Аналогичным образом можно построить еще $(n-1)$ вектора, которые касаются графика функции u , а именно $(0, 1, 0, \dots, 0, \frac{\partial u}{\partial x_2}|_p)$, $(0, 0, 1, \dots, 0, \frac{\partial u}{\partial x_3}|_p)$ и т.д. Касательная гиперповерхность к графику функции u в точке p содержит все эти векторы, поэтому перпендикулярна их общему перпендикуляру $n_p = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, -1 \right)|_p$, приложенному в точке $(p, u(p))$.

Осталось заметить, что уравнение (7.34) равносильно уравнению $(v, n) = 0$, то есть условию, что вектор характеристического поля v перпендикулярен n_p для каждого p . Значит, уравнение равносильно тому, что векторы векторного поля v касаются графика функции u в каждой его точке. Это доказывает первое утверждение леммы.

Отсюда ясно, что второе утверждение леммы должно быть верно. Дадим строгое доказательство.

Если график функции u вместе с каждой своей точкой содержит участок характеристики, то касательная плоскость к графику содержит вектор характеристического поля. В силу первого утверждения леммы, u удовлетворяет уравнению (7.34). Докажем обратное утверждение.

Рассмотрим характеристическое уравнение $x'_i = a_i(x, z)$, $z' = b(x, z)$ и сделаем в нём замену переменной: вместо z введем переменную $w(x, z) = u(x) - z$ (другими словами, сделаем замену координат в \mathbb{R}^{n+1}). График функции u перейдет при такой замене координат в гиперплоскость $w = 0$. Последнее уравнение характеристической системы заменится на уравнение

$$w' = \left(\sum a_k(x, z) \frac{\partial u}{\partial x_k}(x) - b(x, z) \right) |_{z=w-u(x)}.$$

Когда $w = 0$, то есть когда $u(x) = z$, это выражение равно нулю в силу уравнения. Итак, после замены координат мы получили векторное поле, векторы которого на плоскости $w = 0$ содержатся в этой плоскости. Значит, у нового поля любая фазовая кривая, которая начинается на плоскости $w = 0$, целиком содержится в ней. Поэтому до замены координат характеристика, начинавшаяся на графике функции u — на поверхности $(u(x) - z = 0)$ — целиком лежала на этом графике, откуда следует второе утверждение леммы. □

7.4.5.3 Метод решения квазилинейных уравнений

Метод решения уравнения (7.34) состоит в том, чтобы воспользоваться леммой 7.4.13 и составить n -мерный график искомой функции u из 1-мерных характеристик. Начальное условие (7.35) позволяет однозначно выбрать эти характеристики: их следует выпускать из точек начальной поверхности $\tilde{\Gamma} = \{(p, f(p)) \mid p \in \Gamma\}$.

С аналитической точки зрения, для нахождения функции u нужно сделать следующее:

- Найти уравнение для характеристики, проходящей через точку (x_0, z_0) расширенного фазового пространства; назовем эту кривую $\varphi(x_0, z_0, t)$.
- Параметризовать начальную поверхность — график $\hat{\Gamma} = \{(p, f(p)) \mid p \in \Gamma\}$ функции f . Пусть этот график совпадает с поверхностью $s \mapsto \gamma(s)$, $s \in \mathbb{R}^{n-1}$.
- Искомый график функции u — это поверхность $(s, t) \mapsto \varphi(\gamma(s), t)$; она состоит из характеристик, выпущенных из точек начальной поверхности $\hat{\Gamma}$. Осталось представить эту поверхность как график некоторой функции u , то есть выразить u через x из равенства $(x, u) = \varphi(\gamma(s), t)$.

Чтобы последний шаг был возможен, мы налагаем следующее условие.

Определение 7.4.14. Точка $P = (p, f(p)) \in \hat{\Gamma}$ называется *нехарактеристической*, если проекция вектора $v(P)$ на Ox (то есть вектор $(a_1(P), \dots, a_n(P))$) не касается поверхности Γ в точке p .

Теорема 7.4.15 (Теорема существования и единственности для уравнения (7.34)). *У задачи Коши для уравнения (7.33) всегда есть единственное C^1 -гладкое решение, определенное в окрестности нехарактеристической точки $P = (p, f(p)) \in \hat{\Gamma}$.*

Доказательство. По лемме 7.4.13, функция u удовлетворяет уравнению (7.34) если и только если её график состоит из характеристик.

Параметризуем график функции f : пусть он совпадает с образом C^1 -гладкого невырожденного отображения $s \mapsto \gamma(s)$. Выпустим характеристику $\varphi(q, t)$ из каждой точки $q = \gamma(s)$ этого графика, близкой к точке P . Объединение этих характеристик — поверхность $(s, t) \mapsto \varphi(\gamma(s), t)$ — должна быть графиком искомой функции u .

Заметим, что эта параметризация C^1 -гладкая по теореме о гладкости фазового потока. Невырожденность параметризации и тот факт, что поверхность является графиком, следуют из того, что точка P нехарактеристическая. Действительно, производная функции $\varphi(\gamma(s), t)$ по t совпадает с вектором поля v , а её дифференциал по s при $t = 0$ совпадает с дифференциалом отображения $s \mapsto \gamma(s)$. Поэтому образ дифференциала отображения $(s, t) \mapsto \varphi(\gamma(s), t)$ в точке, соответствующей P , является суммой касательной плоскости к $\hat{\Gamma}$ и вектора $v(P)$. Из условия нехарактеристичности следует, что это линейное пространство n -мерно и невырожденно проектируется на пространство Ox .

По теореме о неявной функции, полученный участок поверхности является графиком гладкой функции вблизи точки P . □

Пример 7.4.16. (см. рис. 7.6) Пусть газовая смесь движется в узкой трубе; координатная ось x направлена вдоль оси трубы. Мы считаем, что скорость смеси одинакова во всех точках каждого сечения трубы $x = x_0$ и равна $v(t, x_0)$ в момент времени t . Пусть $\rho(t, x)$ — *линейная* плотность одного из газов в точке x в момент времени t , то есть масса газа на единицу длины трубы. Скорость и плотность газа

7.4.5. Квазилинейные уравнения в частных производных первого порядка

связаны *уравнением непрерывности* (в других источниках — уравнение неразрывности, сплошности):

$$\rho_t + v\rho_x + \rho v_x = 0. \quad (7.36)$$

Чтобы вывести уравнение непрерывности, рассмотрим участок трубы $[x_0, x_0 + \delta]$. Масса газа, который находится в этом участке, равна $\int_{x_0}^{x_0+\delta} \rho(t, x) dx$. Эта масса меняется за счет того, что газ проникает в наш участок трубы через сечения $x = x_0, x = x_0 + \delta$ со скоростью $v(x_0)$ и $-v(x_0 + \delta)$ соответственно. Так как плотность газа в этих точках равна $\rho(t, x_0)$ и $\rho(t, x_0 + \delta)$, мы получаем

$$\frac{d}{dt} \int_{x_0}^{x_0+\delta} \rho(t, x) dx = \int_{x_0}^{x_0+\delta} \frac{d}{dt} \rho(t, x) dx = v(t, x_0)\rho(t, x_0) - v(t, x_0 + \delta)\rho(t, x_0 + \delta).$$

Если разделить это уравнение на δ и перейти к пределу при $\delta \rightarrow 0$, мы получим $\rho_t = -(v\rho)'_x$, что и требовалось.

Пусть поле скоростей v имеет вид $v(t, x) = x$. Уравнение (7.36) принимает вид

$$\rho_t + x\rho_x + \rho = 0;$$

заметим, что две переменные t, x в этом уравнении играют роль x . Решим это квазилинейное уравнение с начальным условием $\rho(0, x) = f(x)$ (здесь $f(x)$ — начальная плотность газа).

Характеристическое уравнение имеет вид

$$t'_s = 1, x'_s = x, \rho'_s = -\rho.$$

Время в характеристическом уравнении мы обозначили s , так как переменная t уже занята в исходном уравнении. Кривая $\Gamma = (0, x)$ всюду трансверсальна векторам $(1, x)$, поэтому условие теоремы 7.4.15 выполнено.

Характеристика, выпущенная из точки (t_0, x_0, ρ_0) , имеет вид $t = s + t_0, x = x_0 e^s, \rho = \rho_0 e^{-s}$. Характеристика, выпущенная из точки $(0, x_0, f(x_0))$, задана уравнением $t = s, x = x_0 e^s, \rho = f(x_0) e^{-s}$. Эти формулы — параметрически заданный график функции ρ ; переменные s, x_0 служат параметрами на поверхности. Осталось выразить ρ через t, x . Получим, что решением квазилинейного уравнения является функция

$$\rho(t, x) = f(x/e^t) e^{-t}.$$

Из этого равенства видно, что график плотности растягивается со временем, но общее количество газа $\int \rho(t, x) dx$ со временем не меняется.

7.4.5.4 Глобально определенные решения и ударная волна

Теорема 7.4.15 позволяет находить решение квазилинейного уравнения в малой окрестности начального условия. Существует ли глобально определенное решение квазилинейного уравнения? Ответ на этот вопрос зависит от расположения характеристик, выпущенных из точек начальной поверхности $\hat{\Gamma}$.

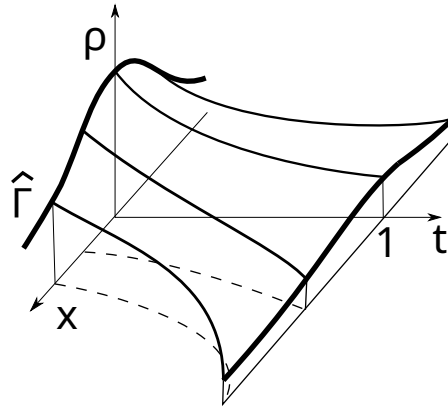


Рис. 7.6: Решение уравнения непрерывности в тонкой трубе для поля скоростей $v(x) = x$. Жирным выделены графики плотности при $t = 0$ (начальная поверхность $\hat{\Gamma}$) и при $t = 1$. На рисунке показаны характеристики, выпущенные из точек $\hat{\Gamma}$ и образующие график функции $\rho(t, x)$. Пунктиром отмечены проекции характеристик на плоскость Otx .

Рассмотрим проекции этих характеристик на пространство Ox . Если проекции характеристик заполняют некоторую область Ω и не пересекаются в Ω , то поверхность, образованная характеристиками, биективно проецируется на Ω , поэтому решение квазилинейного уравнения определено в области Ω (так, в примере 7.4.16 это верно для $\Omega = \mathbb{R}^2$). Если же проекции пересекаются, то две точки на этих характеристиках лежат одна над другой. Поэтому поверхность, образованная характеристиками, не является графиком функции, и решение u не определено в точке пересечения проекций характеристик. Мы продемонстрируем этот эффект на примере уравнения Бюргерса $u_t + uu_x = \nu u_{xx}$ для нулевой вязкости, $\nu = 0$.

Задача 36. показывает, что уравнение Бюргерса с нулевой вязкостью описывает движение частиц в узкой трубе в предположении, что частицы не взаимодействуют и потому скорость каждой частицы постоянна.

Замечание 7.4.17 (О происхождении уравнения Бюргерса). *В общем случае движение жидкости или газа описывает система уравнений Навье⁴-Стокса⁵. Об уравнениях Навье-Стокса можно прочитать в книге⁶. Исследование уравнений Навье-Стокса представляет большую трудность. В 1948 году Я.Бюргерс⁷ предложил уравнение $u_t + uu_x = \nu u_{xx}$ как упрощенный вариант одного из уравнений системы Навье-Стокса.*

⁴Клод Луи Мари Анри Навье (1785 – 1836) – механик и инженер, известный своим вкладом в механику сплошных сред. Один из основателей теории упругости.

⁵Сэр Джордж Габриель Стокс (1819 – 1903) – физик и математик, внесший значительный вклад в гидродинамику, оптику, математическую физику.

⁶Бэтчелор Дж., Введение в динамику жидкости, М:Мир, 1973.

⁷Йоханнес (Ян) Мартинус Бюргерс (1895 – 1981) – физик, известный своими работами в области гидродинамики и газовой динамики; также изучал дефекты в кристаллических решетках.

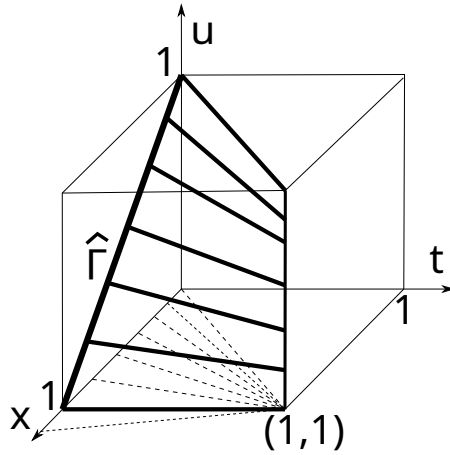


Рис. 7.7: Решение уравнения $u_t + uu_x = 0$ для начального поля скоростей $u(0, x) = 1 - x$. На рисунке показаны характеристики, выпущенные из точек начальной поверхности $\hat{\Gamma}$ и образующие график функции $u(t, x)$ при $t < 1$. При $t = 1$ поверхность содержит вертикальную прямую, проходящую через точку $(1, 1) \in Otx$. Пунктиром отмечены проекции характеристик на плоскость Otx .

Пример 7.4.18. Рассмотрим уравнение Бюргера с нулевой вязкостью $u_t + uu_x = 0$. Его характеристическое уравнение имеет вид $t'_s = 1$, $x'_s = u$, $u'_s = 0$. Решения этого уравнения —

$$u = u_0, \quad x = u_0 s + x_0, \quad t = s + t_0. \quad (7.37)$$

Пусть начальное условие имеет вид $u(0, x) = 1 - x$. Характеристики, выпущенные из точек начальной поверхности $(t_0, x_0, u_0) = (0, x_0, 1 - x_0)$, имеют вид

$$t = s, \quad x = (1 - x_0)s + x_0, \quad u = 1 - x_0. \quad (7.38)$$

Это уравнение задает график функции u . Выразим u через t, x :

$$u(t, x) = 1 - \frac{x - t}{1 - t} = \frac{1 - x}{1 - t}.$$

Проекция характеристик на плоскость Otx представляют собой пучок прямых $x = (1 - x_0)t + x_0$. Все они пересекаются в точке $(1, 1)$, поэтому при $t \geq 1$ уравнение не имеет решения: поверхность, которая должна была быть графиком функции u , не проектируется на плоскость Otx (см. рис. 7.7).

Действительно, в полученной формуле для u значение $u(1, x)$ не определено. Значение u при $t > 1$ не имеет физического смысла.

Пример 7.4.19. Рассмотрим теперь начальное условие $f(x) = e^{-4x^2}$ для того же уравнения $u_t + uu_x = 0$. Его характеристики заданы уравнением (7.37) с $t_0 = 0$, $u_0 = e^{-4x^2}$. Их проекции на плоскость Otx — это пучок прямых $x = e^{-4x^2}t + x_0$; как

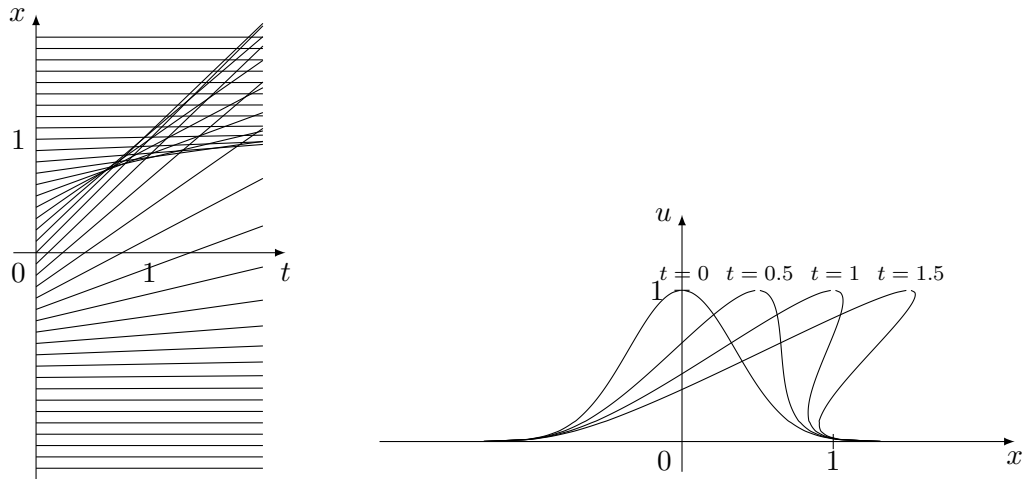


Рис. 7.8: Слева — проекции характеристик на плоскость Otx для уравнения $u_t + uu_x = 0$ с начальным условием $u(0, x) = e^{-4x^2}$. Ударная волна формируется при $t \approx 0.6$. Справа — решения этой задачи Коши, полученные методами раздела 7.4.5.5, для $t = 0, 0.5, 1, 1.5$. Начиная с $t \approx 0.6$ полученные кривые не являются графиками функций — настоящие решения уравнения имеют разрыв.

видно по рис. 7.8, эти прямые пересекаются в правой полуплоскости начиная с $t \approx 0.6$. Значит, при больших t у этого уравнения нет решения — поверхность, которая должна быть графиком функции u , не проектируется однозначно на плоскость Otx .

Легко показать, что характеристики будут пересекаться в правой полуплоскости для любой начальной функции $u(0, x)$, у которой есть участки убывания. Такой эффект возникает и для других, более сложных уравнений в газовой динамике. Как же будет двигаться газ, если у уравнения нет решения? Оказывается, во многих случаях движение газа описывает *разрывное* решение уравнения, которое удовлетворяет уравнению в точках непрерывности. Говорят, что формируется *ударная волна*. Вообще говоря, ударная волна — это скачкообразное изменение давления или других характеристик газа или жидкости. Покажем, как строится такое разрывное решение.

Проведем разрез $(t, c(t))$ в плоскости Otx , начиная с той точки, где характеристики пересеклись впервые. Будем искать решение, разрывное только на разрезе $(t, c(t))$. Говорят, что по трубе движется ударная волна: в момент времени t она находится в точке $x = c(t)$.

В силу уравнения, функция u по-прежнему постоянна вдоль отрезков прямых $x = u(x_0)t + x_0$, но эти отрезки больше не продолжают за разрез $(t, c(t))$, так как на разрезе уравнение не выполняется. Во многих случаях разрез можно провести так, что отрезки прямых $x = u(x_0)t + x_0$ не пересекаются — значит, функция u однозначно определяется условием, что она постоянна вдоль этих отрезков.

Как узнать, где проходит разрез? Одного уравнения здесь недостаточно. В газовой

7.4.5. Квазилинейные уравнения в частных производных первого порядка

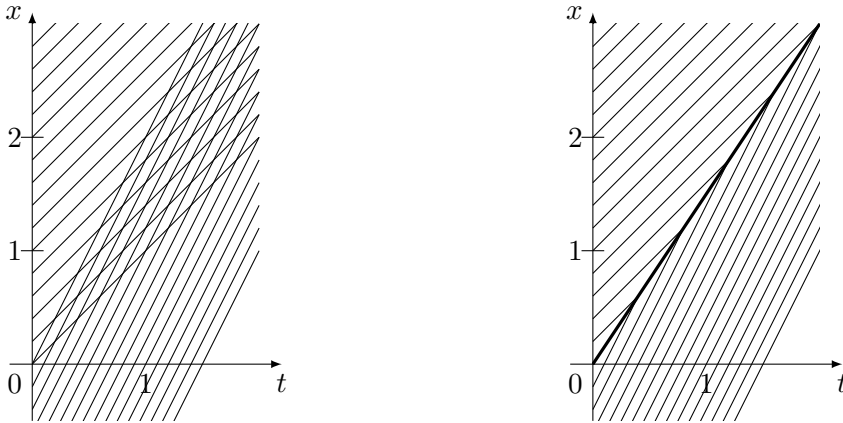


Рис. 7.9: Проекция характеристик на плоскость Otx (слева) и ударная волна (справа) для уравнения $u_t + uu_x = 0$ с начальным условием из примера 7.4.20.

динамике для этого применяют условия Рэнкина⁸-Гюгонно⁹, которые следуют из законов сохранения. Для уравнения $u_t + uu_x = 0$ условие Рэнкина-Гюгонно имеет вид

$$c'(t) = \frac{u_+(t, c(t)) + u_-(t, c(t))}{2} \quad (7.39)$$

— скорость движения ударной волны равна среднему скоростей газа слева и справа от разрыва. В задаче 38. предлагается вывести это условие из интегральной формы уравнения Бюргерса.

Пользуясь условием (7.39), можно предсказать, как будет двигаться ударная волна — в том числе в случае, когда начальное условие уравнения разрывно (как бывает, например, при взрывах). Разрывное решение бывает трудно найти аналитически, и обычно его находят численно. Приведем простой пример, когда разрывное решение можно найти аналитически.

Пример 7.4.20. (см. рис. 7.9) Рассмотрим уравнение $u_t + uu_x = 0$ с разрывным начальным условием: $u(x) = 1$ при $x > 0$ и $u(x) = 2$ при $x < 0$. Проекция характеристик этого уравнения заданы уравнением $x = u(x_0)t + x_0$; они пересекаются на плоскости Oxt . Пусть разрывное решение уравнения u имеет разрыв на кривой $(t, c(t))$, которая начинается в точке $(0, 0)$. Тогда над разрезом $u = 1$, а под разрезом — $u = 2$ (так как функция u постоянна вдоль отрезков прямых $x = u(x_0)t + x_0$ вплоть до разреза). В силу условия Рэнкина-Гюгонно, скорость распространения ударной волны равна $c'(t) = 1.5$, поэтому $c(t) = 1.5t$, то есть разрез задан уравнени-

⁸Уильям Джон Макуорн Ранкин (Ренкин) (1820 – 1872) — инженер, физик и механик, один из основоположников термодинамики.

⁹Пьер-Анри Гюгонно (1851 – 1887) — математик и механик, один из основоположников газовой динамики.

ем $x = 1.5t$. Это позволяет решить уравнение:

$$u(t, x) = \begin{cases} 1, & x > 1.5t, \\ 2, & x < 1.5t. \end{cases}$$

Мы видим, что в трубе движется ударная волна со скоростью 1.5, и в точках ударной волны скорость газа меняется с 1 до 2.

Еще один пример уравнения, в котором возможно формирование ударной волны — транспортное уравнение, описывающее движение машин по прямолинейной дороге, см. задачу 44.

7.4.5.5 Неявные решения квазилинейных уравнений

Заметим, что уравнение Бюргера гораздо труднее решить, если начальное условие нелинейно. Затруднение возникает с последним шагом рассуждения, когда u нужно выразить через остальные переменные. Мы приведем еще один способ решения квазилинейных уравнений, который не зависит от сложности начального условия — решение получается в неявном виде. Идея состоит в том, чтобы записать уравнение начальной поверхности в терминах первых интегралов характеристического уравнения. Так как первые интегралы постоянны вдоль фазовых кривых, это уравнение будет выполнено во всех точках графика u , поэтому будет неявным уравнением на искомую функцию u .

Подробнее, применение этого метода к задаче 7.34, 7.35 выглядит следующим образом.

- Найдем полную систему первых интегралов уравнения характеристик в окрестности точки p . Обозначим эти первые интегралы $\varphi_1, \dots, \varphi_n$.
- Параметризуем поверхность Γ . Пусть параметризация имеет вид $\xi: \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \Gamma \subset \mathbb{R}^n$, и пусть q — координата на \mathbb{R}^{n-1} ; тогда начальная поверхность $\hat{\Gamma}$ задана условием $u = f(\xi(q))$.
- Через каждую точку Γ проведем вертикальную (параллельную оси Ou) прямую. Получим гиперповерхность $Z = \{(\xi(q), u)\}$, которая содержит начальную поверхность $\hat{\Gamma}$. Если точка $P = (p, f(p))$ нехарактеристическая, первые интегралы задают локальную систему координат на Z , как показано в предложении 7.4.21 ниже. Выразим старые координаты (q, u) на Z через новые: пусть $u = U(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ и $q = Q(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$.

Итак, уравнение $u = f(\xi(q))$, задающее начальную поверхность $\hat{\Gamma} \subset Z$, равносильно условию

$$U(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = f(Q(\varphi_1, \dots, \varphi_n))$$

на Z .

7.4.5. Квазилинейные уравнения в частных производных первого порядка

- Так как первые интегралы постоянны вдоль характеристик, это равенство будет сохраняться вдоль каждой характеристики. Значит, неявное уравнение на искомую функцию u имеет вид

$$U(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = f(Q(\varphi_1, \dots, \varphi_n)).$$

Предложение 7.4.21. Если точка $P = (p, f(p))$ нехарактеристическая для квазилинейного уравнения, то полная система первых интегралов характеристического уравнения в окрестности точки P задаёт локальную систему координат на $Z = \{(x, u) \mid x \in \Gamma\}$ в окрестности точки P .

Доказательство. Пусть $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ — полная система первых интегралов характеристического уравнения. Тогда дифференциал отображения $x \mapsto F(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$ в точке p имеет ранг n , поскольку первые интегралы независимы. На векторе $v(p)$ характеристического векторного поля дифференциал dF обнуляется: $d\varphi_k(v) = 0$, так как функции φ_k — первые интегралы. Итак, одномерное ядро дифференциала $dF|_p$ порождено вектором $v(p)$.

Так как точка p нехарактеристическая, вектор $v(p)$ не касается Z . Поэтому ядро ограничения $dF(p)|_Z$ пусто, а значит, F задаёт локальную систему координат в окрестности точки p . \square

Пример 7.4.22. Вновь рассмотрим уравнение Бюргера с нулевой вязкостью $u_t + uu_x = 0$. Пусть начальное условие таково: $u(0, x) = f(x)$.

Напомним, что характеристическое уравнение имеет вид $t'_s = 1, x'_s = u, u'_s = 0$, а его решения — $u = u_0, x = u_0 s + x_0, t = s + t_0$. В качестве системы из двух независимых первых интегралов возьмем $\varphi_1(t, x, u) = x - tu$ и $\varphi_2(t, x, u) = u$. Тогда в ограничении на плоскость $Z = (0, x, u)$ мы можем выразить x, u через φ_1, φ_2 : $x = \varphi_1, u = \varphi_2$.

Значит, уравнение, задающее $\hat{\Gamma} \subset Z$, имеет вид $\varphi_2 = f(\varphi_1)$.

На каждой характеристике значения φ_1, φ_2 постоянны, поэтому это соотношение сохранится вдоль каждой характеристики, выпущенной из точки $\hat{\Gamma}$. Итак, $\varphi_2 = f(\varphi_1)$ и есть неявное уравнение на искомую функцию u . Окончательно получаем

$$f(x - tu) = u. \tag{7.40}$$

Для некоторых функций f (например, для функции $f(x) = 1 - x$ из примера 7.4.18) уравнение (7.40) удастся решить относительно u и получить явную формулу для u . Заметим, что вдали от точки p это может быть невозможно, как происходит при $t = 1$ в примере 7.4.18; при $t > 1$ полученное этим методом решение не имеет физического смысла.

Для других функций f решить такое уравнение невозможно, но и неявное решение позволяет многое сказать о функции u . Например, для $f(x) = e^{-4x^2}$ (см. пример 7.4.19) получаем неявное уравнение $e^{-4(x-tu)^2} = u$, из которого не удаётся явно выразить u . Графики функций $u(t, x)$ для некоторых значений t показаны на рис. 7.8. В области, где характеристики пересекаются, кривые $e^{-4(x-tu)^2} = u$ в плоскости

7 Основные теоремы и их применения

Oxi перестают быть графиками, поэтому не дают решение уравнения. Настоящее решение будет иметь разрыв.

Упражнение 139. *Определите, при каком значении t для этого уравнения формируется ударная волна.*

7.5 Задачи к главе 7

Теоремы существования и единственности. Принцип сжимающих отображений

1. Полно ли пространство непрерывных функций на отрезке $[0, 1]$ с нормой $\|f\| = \int_0^1 |f(x)| dx$?
2. а) Найдите пикаровские приближения к решению задачи Коши $\dot{x} = Ax$, $x(0) = x_0$, где A — линейный оператор.
б) Найдите ломаные Эйлера с шагом h для этой задачи.
3. а) Найдите три первых пикаровских приближения к решению задачи Коши $\dot{x} = x^2 + t$, $x(0) = 1$.
б) Используя конструкцию из доказательства теоремы существования и единственности, оцените снизу область существования решения задачи Коши $\dot{x} = x^2 + t$, $x(0) = 0$.
4. Рассмотрим пространство $\mathcal{M} = \{f \in C([0, 1]) \mid f(0) = 0, \text{Lip } f \leq 1\}$. Докажите, что оператор $\Phi: f \mapsto g$, $g(t) = f(t/2) + \frac{t}{3}$ переводит \mathcal{M} в себя, и найдите все неподвижные точки этого оператора.
5. Является ли сжимающим в пространстве $C\left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right)$ оператор

$$\Phi: f \mapsto g, \quad g(t) = t - \frac{t^3}{3} + \int_0^t \tau f(\tau) d\tau?$$

Найдите все неподвижные точки этого оператора.

6. Найдите число решений следующих задач:

а)

$$(a+5)(a^2+3a+2)y''' + (a+1)(a+2)y'' - (a+5)y' + (a+1)y = 3x^4 - 1,$$

$$y(0) = -1, \quad y'(0) = \frac{1}{4},$$

б)

$$a(a^2 - a - 2)y''' + a(a - 2)y'' - (a + 1)y' + 4y = x^3,$$

$$y(0) = 3, \quad y'(0) = 4,$$

в зависимости от параметра a .

Теоремы о гладкости решения по начальным условиям. Уравнение в вариациях

7 Основные теоремы и их применения

7. Найдите производную по параметру ε при $\varepsilon = 0$ периодического решения уравнения

$$\dot{x} = -x + \varepsilon \sin t.$$

8. Найдите производную по начальному условию a в точке $a = 2$ решения следующей задачи Коши:

$$\dot{x} = -x^4 + 2x^2 + 8, x(0) = a.$$

9. Найдите производную по начальному условию $x(0)$ нулевого решения для следующих уравнений и систем.

a) $\dot{x} = x \sin t + x^2, x \in \mathbb{R}^1;$

b) $\dot{x} = Ax + (x, x)t^2, x \in \mathbb{R}^2, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$

c)

$$\dot{x}_1 = \sin x_1 + 2 \sin x_3$$

$$\dot{x}_2 = \sin x_2 + 2 \sin x_3$$

$$\dot{x}_3 = \sin x_3 + \sin^2 x_1$$

d)

$$\dot{x} = (\sin t)(\sin x) + x^2 \frac{\sin t}{t}.$$

e)

$$\dot{x} = -\sin y$$

$$\dot{y} = \log(1 + x)$$

f)

$$\dot{x} = \sin(x - 5y) + \sin^2(x - y),$$

$$\dot{y} = \sin(x - y) + \sin^2(x - 5y)$$

10. Найдите производную по параметру для решений следующих систем с нулевым начальным условием:

a)

$$\dot{x} = -\sin y$$

$$\dot{y} = \log(1 + x) + \mu \sin t$$

по μ при $\mu = 0$;

- b) $\dot{z} = z^2 + \varepsilon \sin t$ по ε при $\varepsilon = 0$, где $z \in \mathbb{C}$;

с)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sin x - \sin y, \\ \dot{y} &= \sin x + \sin y + \varepsilon e^t\end{aligned}$$

по ε при $\varepsilon = 0$.11. Пусть $\{g_v^t | t \in \mathbb{R}\}$ — фазовый поток векторного поля

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x - 5y + \frac{1}{x^2 + 1} \\ \dot{y} &= x - y + \frac{1}{y^2 + 1},\end{aligned}$$

 D — единичный круг с центром в нуле. Верно ли неравенство $V(g_v^t D) \geq e^{2t} V(D)$, где V — объем?12. При каком достаточном условии на функцию $a(t)$ нулевое решение уравнения

$$\dot{x} = xa(t) + x^2 f(t, x)$$

с 2π -периодической правой частью

- a) является изолированным 2π -периодическим решением?
 - b) сохраняется при малом возмущении (т.е. близкое уравнение с 2π -периодической правой частью имеет близкое 2π -периодическое решение)?
13. a) Найти производную по начальному условию $x(0) = a$ при $a = 0$ решения уравнения $\dot{x} + \sin x = 0$.
- b) Найти производную по параметру ε решения уравнения $\dot{x} + \sin x = \varepsilon \cos t$ с начальным условием $x(0) = 0$ при $\varepsilon = 0$.
- c) Найти производную 2π -периодического решения уравнения $x'' + \sin x = \varepsilon \cos t$, обращаемого при $\varepsilon = 0$ в $x \equiv 0$, по ε при $\varepsilon = 0$.

Теорема о выпрямлении

14. Выпрямите векторное поле $v(x)$ на прямой в окрестности точки $x = 1$, где $v(x) = x$; $v(x) = x^2$; $v(x) = x^n$; $v(x) = \sin x$; $v(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.
15. Выпрямите векторное поле $v(x)$ на плоскости в окрестности точки $(1, 1)$, где $v(x)$ равно $2x$; $(-x_1, x_2)$; $(x_1, 2x_2)$; $(x_2, -x_1)$; $(2x_1 + x_2, -x_1 + 2x_2)$; $(x_1, \sin x_2)$; $(x_2, x_1 - x_1^2)$; $(x_2, -\sin x_1)$ (в последних двух задачах интегралов можно не брать).
16. Выпрямите фазовые кривые уравнения $\ddot{x} = x - x^2$ в окрестности точки $x = 0, \dot{x} = 1$.

17. Выпрямите интегральные кривые уравнения $\dot{x} = x + \cos t$.
 18. Выпрямите поле направлений уравнения $\dot{x} = x + te^t$.

Первые интегралы и уравнения в частных производных первого порядка

19. а) Найдите все непрерывные первые интегралы системы

$$\dot{x} = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

определенные в окрестности нуля.

- б) Для каких значений λ система

$$\dot{x} = (A - \lambda E)x$$

имеет непостоянные непрерывные первые интегралы, определенные в окрестности нуля?

20. Существует ли непостоянный первый интеграл системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x^2 - 1, \\ \dot{y} &= 1 - y^2, \end{aligned}$$

непрерывный

- а) в единичном круге $(-1, 1)$?
 б) на всей плоскости?
21. Найдите общее решение уравнения $yu_x + (x - x^3)u_y = 0$.
 22. Найдите общее решение уравнения $yu_x + (x^3 - x)u_y = 0$.
 23. Имеет ли единственное решение следующая задача Коши в окрестности точки $(0, 0)$: $yu_x + (x^3 - x)u_y = 0$, $u|_{x=0} = \sin y$?
 24. Имеет ли единственное решение следующая задача Коши в окрестности точки $(0, 0)$: $yu_x + (x^3 - x)u_y = 0$, $u|_{x=0} = \cos y$?
 25. Существует ли решение задачи Коши

$$yu_x + (x^2 - 1)u_y = 0, \quad u|_{x=0} = y^2?$$

Если существует, то единственно ли оно?

26. Существует ли решение задачи Коши для уравнения

$$(x^2 - y^2)u_x + 2xyu_y = 0 \quad (7.41)$$

с начальным условием $u|_{y=1} = \cos x$? Если существует, то единственно ли оно?

27. Найдите общее решение уравнения (7.41).

28. Имеют ли решение в окрестности точки $(0, 1)$ следующие задачи Коши:

$$(x^2 - y^2)u_x + 2xyu_y = 0$$

а) $u|_{x^2+y^2=1} = \sin x$;

б) $u|_{x^2+y^2=1} = \cos x$.

29. а) Существует ли решение задачи Коши:

$$(x^2 - 1)u_x + (1 - y^2)u_y = 0, \quad u|_{x+y=2} = x$$

в окрестности точки $(1, 1)$?

б) Единственно ли оно?

30. Верно ли, что все первые интегралы системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x^2(1-x)^2, \\ \dot{y} &= y, \end{aligned}$$

непрерывные на всей плоскости, постоянны?

31. Найдите общее решение системы

$$u_x y + u_y (5x + x^2) = 0$$

Существует ли решение задачи Коши для этого уравнения с начальными условиями $u|_{y=1} = \sin x$, определенное во всей полуплоскости $y \geq 1$?

32. Найдите общее решение уравнения $u_x + (-y + \cos 2x)u_y = 0$. Верно ли, что любая гладкая замкнутая несамопересекающаяся начальная кривая содержит хотя бы одну характеристическую точку этого уравнения?

33. Напишите квазилинейное уравнение, характеристики которого являются интегральными кривыми уравнения $\dot{x} = f(x, u)$, $\dot{u} = g(x, u)$.

34. (*) Найдите все интегрирующие множители для уравнения $\alpha y dx + \beta x dy = 0$.

Указание: эта задача приводит к квазилинейному уравнению на интегрирующий множитель.

35. Решите уравнение непрерывности

$$\rho_t + v\rho_x + \rho v_x = 0$$

(см. пример 7.4.16) для скорости движения газа $v(t, x) = -x$ с начальным условием $\rho(0, x) = f(x)$. Нарисуйте проекции характеристик уравнения на плоскость Otx .

36. Проверьте, что уравнение Бюргера с нулевой вязкостью $u_t + uu_x = 0$ следует из того, что каждый малый объем воды движется с постоянной скоростью.
37. Докажите, что для гладкой функции u из уравнения Бюргера с нулевой вязкостью $u_t + uu_x = 0$ следует, что

$$\frac{d}{dt} \int_a^b u dx = \frac{1}{2}(u^2(a) - u^2(b)).$$

38. Считая это интегральное уравнение выполненным для разрывного решения уравнения Бюргера, при котором формируется ударная волна $(t, c(t))$, докажите условие Рэнкина-Гюгонио $c'(t) = \frac{1}{2}(u_+(t, c(t)) - u_-(t, c(t)))$.

Указание: покажите, что для такого разрывного решения выполнено

$$\frac{d}{dt} \int_a^b u dx = \int_a^b u_t dx + c'(t) (u_-(t, c(t)) - u_+(t, c(t))).$$

Теперь первое слагаемое можно вычислить, пользуясь интегральным уравнением на интервалах непрерывности $[a, c(t)]$ и $[c(t), b]$; с другой стороны, мы можем применить интегральное уравнение на всем интервале $[a, b]$.

39. Решите задачу Коши для уравнения $u_t + uu_x = 0$, $u|_{t=0} = f(x)$, нарисуйте проекции характеристик уравнения на плоскость Otx и укажите максимальный отрезок $[a, b]$, $a \leq 0 \leq b$, для которого решения существуют при всех (t, x) , $t \in [a, b]$:
- $f(x) = 1$;
 - $f(x) = x$;
 - $f(x) = -x$;
 - $f(x) = \sin x$.

При каких f решение определено на всей плоскости (t, x) ?

40. Решите задачу Коши для уравнения $u_t - uu_x = x$, $u|_{t=0} = f(x)$, нарисуйте проекции характеристик уравнения на плоскость Otx и укажите максимальный отрезок $[a, b]$, $a \leq 0 \leq b$, для которого решения существуют при всех (t, x) , $t \in [a, b]$:
- $f(x) = 1$;

b) $f(x) = \alpha x$; исследуйте ответ в зависимости от α .

41. Решите задачу Коши $u_t - uu_x = \sin x$, $u|_{t=0} = 2 \cos \frac{x}{2}$. Нарисуйте проекции характеристик уравнения на плоскость Otx .

Ответ: $u(t, x) = 2 \cos \frac{x}{2}$.

42. (Преобразование Коле-Хопфа) Уравнение Бюргерса с вязкостью $\mu = 1$ имеет вид

$$u_t + uu_x = u_{xx}.$$

Убедитесь, что функции вида $u = -2\varphi_x/\varphi$, где φ удовлетворяет уравнению теплопроводности $\varphi_t = \varphi_{xx}$, являются решениями уравнения Бюргерса.

43. Рассмотрим транспортное уравнение, описывающее движение машин по прямолинейной дороге:

$$\rho_t + (1 - 2\rho)\rho_x = 0.$$

Здесь ρ — плотность транспортного потока, то есть количество машин на единицу длины трассы.

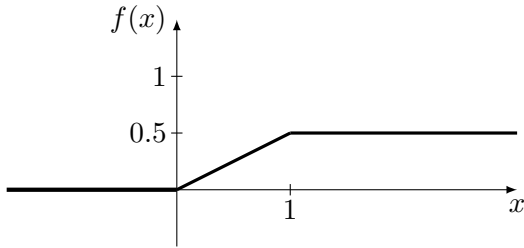
Выведите это уравнение, считая, что скорость машин $v(t, x)$ связана с плотностью транспортного потока $\rho(t, x)$ соотношением $v = 1 - \rho$, и плотность ρ всегда заключена между нулем и единицей.

Подсказка: скорость и плотность потока машин связаны уравнением непрерывности.

44. Решите транспортное уравнение

$$\rho_t + (1 - 2\rho)\rho_x = 0$$

с начальным условием $\rho(0, x) = f(x)$; график функции f приведен ниже.



Нарисуйте проекции характеристик уравнения на плоскость Otx и определите момент формирования ударной волны. Нарисуйте графики функций $\rho(0.5, x)$ и $\rho(1, x)$.

8 Элементы нелинейной теории

8.1 Устойчивость по Ляпунову положений равновесия уравнений и отображений

Теория устойчивости — один из самых широко применимых на практике разделов теории дифференциальных уравнений. Известно, что особой точке векторного поля соответствует постоянное решение. Но в какой мере это решение описывает стационарный процесс? Представим себе, что наше уравнение моделирует химическую реакцию в промышленной установке. Мы подобрали концентрации реактивов на входе так, что на выходе ежесекундно получается одно и то же количество нужных нам веществ. Можем ли мы быть уверены, что реакция действительно будет идти так, как нам нужно? Нет, если мы не убедились в том, что особая точка дифференциального уравнения, соответствующая найденному стационарному состоянию процесса, *устойчива*. В противном случае малое изменение начального условия (которого на практике невозможно избежать) приведет к тому, что решение уйдет далеко от положения равновесия, и реакция выйдет из-под контроля.

Конечно, реальная работа химического реактора происходит гораздо сложнее. Но изложенный выше мысленный эксперимент ставит нас перед вопросом, который решает описанная ниже *теория устойчивости*.

8.1.1 Определение устойчивости для векторных полей

Пусть векторное поле v имеет особую точку $a \in \mathbb{R}^n$, то есть $v(a) = 0$. Тогда соответствующая система уравнений $\dot{x} = v(x)$ имеет постоянное решение $x(t) \equiv a$. Точка a называется *положением равновесия* для системы уравнений.

Неформально говоря, положение равновесия называется *устойчивым*, если решения системы $\dot{x} = v(x)$ с близкими начальными условиями не уходят далеко от положения равновесия с течением времени (скажем, стремятся к этому положению равновесия). В противном случае положение равновесия называется *неустойчивым*. Дадим формальное определение.

Всюду в этой главе $U_\varepsilon(a)$ будет обозначать ε -окрестность точки a .

Определение 8.1.1. Положение равновесия a для системы $\dot{x} = v(x)$ называется *устойчивым по Ляпунову*¹, если в любой его ε -окрестности $U_\varepsilon(a)$ найдется (меньшая) δ -окрестность $U_\delta(a)$, такая что решение, начинающееся в $U_\delta(a)$, никогда в будущем не покинет $U_\varepsilon(a)$. То есть

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \quad \forall t \geq 0 (|x - a| < \delta \Rightarrow |g_v^t x - a| < \varepsilon).$$

Другими словами, $g_v^t(U_\delta(a)) \subset U_\varepsilon(a)$ для всех $t \geq 0$.

Определение 8.1.2. Положение равновесия a для системы $\dot{x} = v(x)$ называется *асимптотически устойчивым*, если

¹Александр Михайлович Ляпунов (1857 – 1918) — математик и механик, известный как создатель теории устойчивости движения, а также своим вкладом в теорию вероятностей и математическую физику.

8.1.1. Определение устойчивости для векторных полей

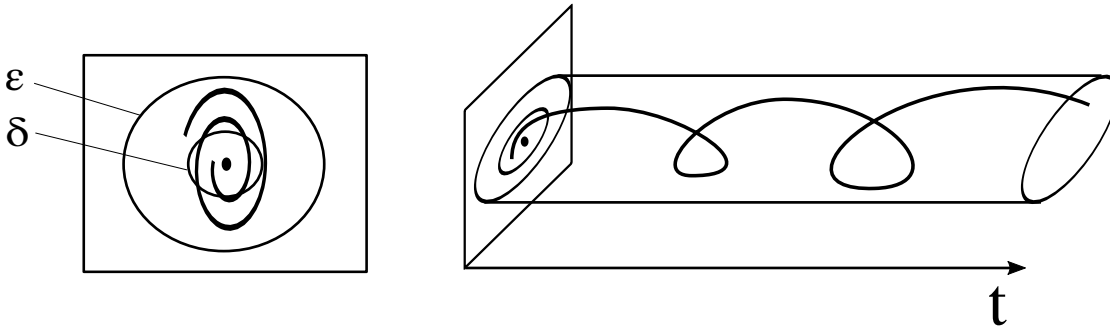


Рис. 8.1: Траектория, начинающаяся в δ -окрестности особой точки, не покидает её ε -окрестность. Рисунок в фазовой плоскости и в расширенной фазовой плоскости.

- оно устойчиво по Ляпунову;
- все решения, начинающиеся в некоторой окрестности положения равновесия, в будущем стремятся к нему:

$$\exists \delta_0 > 0 : (|x - a| < \delta_0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} g_v^t x = a).$$

Поясним, почему в этом определении нельзя ограничиться только вторым пунктом. Кажется бы, если все решения из окрестности точки a стремятся к этой точке, то точка a должна быть устойчива в смысле любого определения (в том числе — по Ляпунову). Следующие примеры показывают, что это не так.

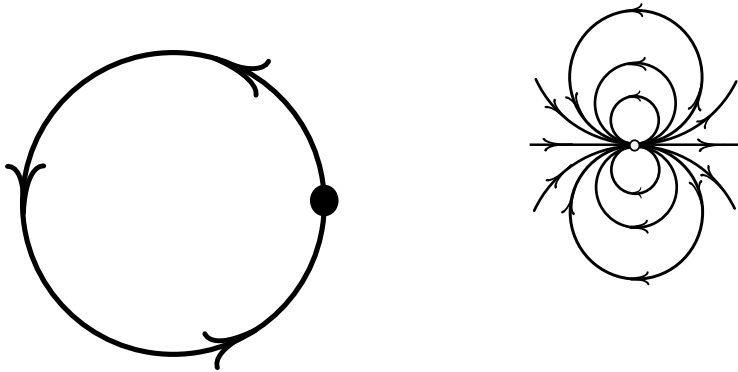


Рис. 8.2: Полуустойчивая точка на окружности и на плоскости



Пример 8.1.3 (Полуустойчивая неподвижная точка). Рассмотрим векторное поле, определенное на окружности и имеющее там только один ноль (см. рис. 8.2); например, можно взять поле $1 - \cos \alpha$, где $\alpha \in [0, 2\pi]$ — угловая координата на окружности.

Любая траектория, начинающаяся в правой полукрестности точки $\alpha = 0$, сначала делает полный оборот вокруг окружности, и только потом стремится к нулю слева. Поэтому в определении асимптотической устойчивости второй пункт выполнен, а первый — нет. Точка 0 не устойчива и в «интуитивном» смысле (такую точку естественно назвать *полуустойчивой*).

Пример легко модифицировать так, чтобы получалось векторное поле на плоскости с тем же свойством. Например, годится уравнение $\dot{z} = z^2$ на комплексной плоскости (или $\dot{x} = x^2 - y^2, \dot{y} = 2xy$ в вещественных координатах), см. рис. 8.2.

А следует ли асимптотическая устойчивость из устойчивости по Ляпунову? Приведем полезный пример, который даёт отрицательный ответ на этот вопрос.

Пример 8.1.4 (Устойчивость по Ляпунову и асимптотическая устойчивость). Возьмем уравнение $\dot{x} = \lambda x, x \in \mathbb{R}^1$. Исследуем, при каких λ положение равновесия $x = 0$ будет устойчивым:

	Устойчиво по Ляпунову	Асимптотически устойчиво	Рисунок
$\lambda > 0$	нет	нет	
$\lambda = 0$	да	нет	все векторы поля нулевые
$\lambda < 0$	да	да	

Упражнение 140. При каких условиях будет устойчиво по Ляпунову линейное седло на плоскости? Тот же вопрос для узла, фокуса и центра.

При каких условиях эти точки будут асимптотически устойчивы?

8.1.2 Определение устойчивости для отображений

Пусть $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ — отображение области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, имеющее неподвижную точку $a: F(a) = a$. В этом случае тоже можно дать аналоги определений 8.1.1 и 8.1.2, если вместо слов «в будущем» говорить слова «при положительных итерациях отображения F ».

Определение 8.1.5. Неподвижная точка a отображения F называется *устойчивой по Ляпунову*, если в любой её ε -окрестности $U_\varepsilon(a)$ найдется (меньшая) δ -окрестность $U_\delta(a)$, для которой положительная полуорбита $x, F(x), F(F(x)), \dots$, начинающаяся в $U_\delta(a)$, никогда не покинет $U_\varepsilon(a)$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \quad \forall n \in \mathbb{N} (|x - a| < \delta \Rightarrow |F^n(x) - a| < \varepsilon).$$

Здесь F^n — итерационная степень отображения: $F^n(x) = \underbrace{F(F(\dots F(x)))}_{n}$.

Другими словами, $F^n(U_\delta(a)) \subset U_\varepsilon(a)$ для всякого $n \in \mathbb{N}$.

Определение 8.1.6. Неподвижная точка a отображения F называется *асимптотически устойчивой*, если

- Она устойчива по Ляпунову;
- Все орбиты, начинающиеся в некоторой её окрестности, стремятся к ней:

$$\exists \delta_0 > 0 : (|x - a| < \delta_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} F^n(x) = a).$$

В качестве первого примера можно рассмотреть линейное отображение $x \mapsto \lambda x$.

Упражнение 141. *Выпишите аналог таблицы из примера 8.1.4: определите, устойчив ли ноль для отображения $x \mapsto \lambda x$ (по Ляпунову и асимптотически) при разных значениях λ .*

Упражнение 142. *Решите аналог упражнения 140 для отображений: определите, при каких ограничениях на оператор A ноль будет устойчив по Ляпунову для линейного отображения $x \mapsto Ax$, и при каких ограничениях ноль будет асимптотически устойчив.*

8.1.3 Функции Ляпунова

Чтобы доказать устойчивость положения равновесия для уравнения или отображения, часто используют функцию Ляпунова.

Определение 8.1.7. Пусть a — особая точка автономного уравнения $\dot{x} = v(x)$. Гладкая функция Λ , определенная в окрестности a , называется **функцией Ляпунова для особой точки a автономного уравнения $\dot{x} = v(x)$** , если

- $\Lambda(a) = 0$, и точка a — единственный минимум функции Λ ;
- Производная функции Λ вдоль векторного поля v неположительна: $\mathcal{L}_v \Lambda \leq 0$.

Второе условие означает, что векторы поля «смотрят внутрь» областей вида $\{\Lambda(x) \leq c\}$, см. рис. 8.3.

Определение 8.1.8. Пусть a — неподвижная точка отображения F . Гладкая функция Λ , определенная в окрестности a , называется **функцией Ляпунова для неподвижной точки a отображения F** , если

- $\Lambda(a) = 0$, и точка 0 — единственный минимум функции Λ ;
- Для некоторого $0 < q < 1$ выполнено $\Lambda(F(x)) \leq q\Lambda(x)$.

Теорема 8.1.9. *Если для неподвижной точки a некоторого отображения F существует функция Ляпунова, то эта точка асимптотически устойчива.*

Если для особой точки a некоторого автономного уравнения $\dot{x} = v(x)$ существует функция Ляпунова, то эта точка устойчива по Ляпунову. Если дополнительно потребовать, что в неравенстве $\mathcal{L}_v \Lambda \leq 0$ равенство достигается только в a , особая точка будет асимптотически устойчива.

Замечание 8.1.10. Из доказательства будет видно, что для устойчивости по Ляпунову особой точки отображения F достаточно налагать более слабое условие на Λ , а именно $\Lambda(F(x)) \leq \Lambda(x)$.

Доказательство. Доказательство для уравнений

Сначала докажем устойчивость по Ляпунову.

Пусть сфера S_ε — граница ε -окрестности $U_\varepsilon(a)$. Для любого малого ε рассмотрим $m := \min_{S_\varepsilon} \Lambda(x)$; тогда $m > 0$, так как функция Λ достигает минимума только в точке a . Найдем $\delta > 0$, для которого $\max_{U_\delta(a)} \Lambda(x) < m$. Такое значение δ существует, так как функция Λ непрерывна и $\Lambda(a) = 0$. Теперь значение функции Λ внутри окрестности $U_\delta(a)$ строго меньше m , а на границе этой окрестности S_ε — не меньше m .

Пусть $x(t)$ — фазовая кривая поля v , которая начинается в точке $x_0 \in U_\delta(a)$. Заметим, что функция Λ не возрастает вдоль этой кривой, так как $\frac{d}{dt} \Lambda(x(t)) = \mathcal{L}_v \Lambda \leq 0$. Поэтому $\Lambda(x(t)) \leq \Lambda(x_0) < m$ для любого $t \geq 0$. Значит, фазовая кривая $x(t)$ не может при $t \geq 0$ пересекать S_ε , ведь на S_ε выполнено $\Lambda(x) \geq m$. Из этого следует, что фазовая кривая, которая начинается внутри $U_\delta(a)$, никогда в будущем не покинет $U_\varepsilon(a)$. Устойчивость по Ляпунову доказана.

Докажем асимптотическую устойчивость точки a в случае, когда $\mathcal{L}_v \Lambda < 0$ всюду, кроме a : покажем, что каждая фазовая кривая, которая начинается внутри $U_\delta(a)$, стремится к a . Действительно, мы показали, что функция $\Lambda(x(t))$ определена при всех t и убывает с ростом t . Так как эта функция неотрицательна, её производная $\frac{d}{dt} \Lambda(x(t)) = \mathcal{L}_v \Lambda$ не может быть отделена от нуля — она должна принимать значения, сколь угодно близкие к нулю. Однако равенство $\mathcal{L}_v \Lambda = 0$ достигается только в a , значит, кривая $x(t)$ должна подходить к a сколь угодно близко. Из этого и из устойчивости по Ляпунову следует асимптотическая устойчивость.

Доказательство для отображений

Начнем с устойчивости по Ляпунову. Для каждого малого $\varepsilon > 0$ выберем $\delta > 0$ таким же образом, как в доказательстве для уравнений. Докажем, что орбиты точек $x \in U_\delta(a)$ не покидают $U_\varepsilon(a)$.

Действительно, пусть k — первое натуральное число, для которого множество $X = F^k(U_\delta(a))$ не содержится в $U_\varepsilon(a)$. По индукции легко доказать, что $\Lambda(F^k(x)) \leq q^k \Lambda(x) < m$. Поэтому множество X не может пересекать окружность S_ε , на которой значение функции Λ не меньше m . Так как множество X содержит точку $F^k(a) = a$, оно должно целиком лежать внутри S_ε , то есть содержаться в $U_\varepsilon(a)$. Полученное противоречие показывает, что $F^k(U_\delta(a)) \subset U_\varepsilon(a)$ для всех k . Устойчивость по Ляпунову доказана.

Теперь докажем асимптотическую устойчивость. Рассмотрим любую точку $x \in U_\delta(a)$; мы уже знаем, что её будущая орбита не покидает $U_\varepsilon(a)$. В силу неравенства $\Lambda(F^k(x)) \leq q^k \Lambda(x)$, величина $\Lambda(F^k(x))$ стремится к нулю для любого x . Так как равенство $\Lambda(x) = 0$ достигается только при $x = a$, из этого следует, что $F^k(x) \rightarrow a$. \square

Упражнение 143. Проверьте, что полная механическая энергия $E = \frac{kx^2}{2} + \frac{mv^2}{2}$

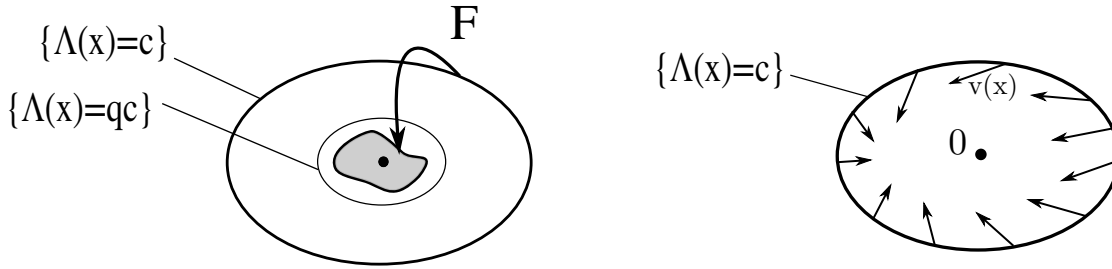


Рис. 8.3: Линии уровня функции Ляпунова на плоскости для отображений (слева) и для векторных полей (справа)

является функцией Ляпунова для уравнения движения пружинного маятника с трением $m\ddot{x} = -kx - \alpha\dot{x}$ (точнее, для соответствующей системы $\dot{x} = v, \dot{v} = \frac{1}{m}(-kx - \alpha v)$). Какие выводы о движении пружинного маятника можно сделать из этого утверждения?

Упражнение 144. Тот же вопрос для уравнения движения математического маятника с трением $m\ddot{x} = -\sin x - \alpha\dot{x}$ и полной механической энергии $E = \cos x + \frac{mv^2}{2}$.

8.1.4 Теоремы Ляпунова об устойчивости

В большинстве случаев устойчивость особой точки можно определить, глядя только на линейную часть уравнения (отображения). Эти случаи описывает теорема Ляпунова.

Теорема 8.1.11 (теорема Ляпунова об устойчивости для уравнений). Пусть автономное уравнение $\dot{x} = v(x)$ в особой точке a имеет линейную часть A , то есть $v(x) = A(x - a) + o(|x - a|)$. Пусть оператор A имеет собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

- **Условие устойчивости.** Если $\operatorname{Re} \lambda_j < 0$ для всех λ_j , то точка a асимптотически устойчива.
- **Условие неустойчивости.** Если для некоторого λ_j выполнено $\operatorname{Re} \lambda_j > 0$, то точка a не устойчива по Ляпунову (а значит, и асимптотически).

Теорема 8.1.12 (теорема Ляпунова об устойчивости для отображений). Пусть отображение $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ с неподвижной точкой a имеет линейную часть B в точке a , то есть $F(x) = a + B(x - a) + o(|x - a|)$. Пусть оператор B имеет собственные значения $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n$.

- **Условие устойчивости.** Если $|\nu_j| < 1$ для всех ν_j , то точка a асимптотически устойчива.
- **Условие неустойчивости.** Если для некоторого ν_j выполнено $|\nu_j| > 1$, то точка a не устойчива по Ляпунову (а значит, и асимптотически).

Для доказательства условия устойчивости мы найдем функцию Ляпунова для линейной части отображения, а потом проверим, что она остается функцией Ляпунова и при добавлении нелинейных членов. Функция Ляпунова будет иметь вид $\Lambda(x) = (x, x)$ для некоторого скалярного произведения (\cdot, \cdot) . Для доказательства условия неустойчивости мы определим аналог функции Ляпунова — *функцию Четаева*, существование которой обеспечивает неустойчивость неподвижной точки.

8.1.5 Доказательство условия устойчивости для отображений

Для простоты обозначений во всех доказательствах мы будем считать, что $a = 0$.

Сначала мы докажем условие устойчивости из теоремы 8.1.12, а затем выведем из него условие устойчивости в теореме 8.1.11.

Хотелось бы доказать, что в случае $|\nu_j| < 1$ оператор B задает сжимающее отображение. Из этого следовало бы, что отображение F тоже сжимает, и все точки под действием F стремятся к нулю. Но, как показывает следующее упражнение, эта идея не проходит.

Упражнение 145. Верно ли, что если собственные значения оператора B по модулю меньше единицы, то операторная норма $\|B\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|Bx|}{|x|}$ тоже меньше единицы (то есть оператор B уменьшает длины всех векторов)?

Ответ. Нет! Например, матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 100 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

имеет только нулевые собственные значения, а операторная норма у нее велика.

Тем не менее, основная идея доказательства теоремы Ляпунова именно такая. Мы найдем скалярное произведение в \mathbb{R}^n , относительно которого линейная часть отображения F сжимает. Отсюда будет следовать, что и само отображение F в окрестности нуля сжимает: $(F(x), F(x)) < q(x, x)$, $q < 1$. Тогда функция $\Lambda(x) := (x, x)$ будет функцией Ляпунова.

Лемма 8.1.13 (Линейная лемма). Пусть оператор $B: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ имеет собственные значения ν_j , $j = 1, \dots, n$. Тогда для любого числа $M > \max |\nu_j|$ существует такая евклидова структура (скалярное произведение) в \mathbb{R}^n , что $\|B\| < M$.

Доказательство условия устойчивости по модулю линейной леммы. Пусть 0 — неподвижная точка отображения F , B — линейная часть отображения F в нуле. Выберем в \mathbb{R}^n скалярное произведение так, что $\|B\| = M < 1$. Фиксируем маленькое положительное число α , так что $\alpha < 1 - M$. В маленьком шаре радиуса δ_0 функция F близка к линейной части: для $|x| < \delta_0$ выполнено $|F(x) - Bx| < \alpha|x|$.

Тогда $|F(x)| < |Bx| + \alpha|x| < (M + \alpha)|x|$, и в силу выбора α имеем $M + \alpha < 1$. Итак, F сжимает, поэтому $\Lambda(x) = (x, x)$ есть функция Ляпунова для F . По теореме 8.1.9, отсюда следует асимптотическая устойчивость нуля. □

Доказательство линейной леммы. Сначала мы докажем утверждение леммы в случае, когда оператор B имеет собственный базис (вещественный или комплексный).

Вещественный собственный базис

Пусть сначала оператор B имеет вещественный собственный базис $\{\xi_j\}$. Тогда в этом базисе матрица оператора диагональна, и на диагонали стоят собственные значения ν_j . Определим скалярное произведение так, чтобы базис $\{\xi_j\}$ был ортонормированным относительно него. Тогда $\|B\| = \max |\nu_j|$, и утверждение леммы выполнено.

Комплексный собственный базис

Похожее рассуждение работает и в случае, если у оператора B есть комплексный собственный базис в \mathbb{C}^n . Каждому базису в \mathbb{C}^n соответствует эрмитово скалярное произведение, которое в этом базисе записывается так:

$$(z, w) = \sum_{j=1}^n z_j \bar{w}_j. \quad (8.1)$$

Как известно, вещественная часть эрмитова произведения определяет скалярное произведение на комплексном пространстве (точнее, на его о вещественности).

Пусть матрица оператора B диагональна в некотором комплексном базисе $\{\xi_j\}$. Тогда на диагонали стоят собственные значения ν_j . Определим эрмитово произведение формулой (8.1); тогда $|z|^2 = (z, z) = \sum |z_j|^2$, поэтому

$$|Bz|^2 = \sum |\nu_j z_j|^2 \leq \max |\nu_j|^2 \sum |z_j|^2.$$

Итак, $\|B\|^2 \leq \max |\nu_j|^2$, откуда² $\|B\| \leq \max |\nu_j|$. Поэтому ограничение этого эрмитова произведения на \mathbb{R}^n удовлетворяет условию леммы.

Общий случай

В общем случае оператор B не имеет собственного базиса. Но он имеет жорданов базис ξ_1, \dots, ξ_n над \mathbb{C} , в котором матрица оператора B состоит из жордановых клеток. Идея доказательства состоит в том, чтобы “поправить” длины векторов жорданова базиса и добиться того, чтобы внедиагональные элементы матрицы оператора B стали очень малы. Таким образом норму оператора B можно сделать сколь угодно близкой к $\max |\nu_j|$. Мы докажем такое предложение:

Предложение 8.1.14. *Для любого оператора B над \mathbb{C} и для любого ε существует базис, такой что если в этом базисе ввести эрмитово скалярное произведение формулой (8.1), то будет выполнено $B = \text{diag}(\nu_1, \dots, \nu_n) + C$, где $\|C\| \leq \varepsilon$.*

Из этого предложения сразу следует линейная лемма.

Доказательство. Фиксируем число $\varepsilon > 0$. Пусть жордановой клетке J с собственным значением λ соответствуют базисные векторы ξ_1, \dots, ξ_k из жорданова базиса.

²На самом деле $\|B\| = \max |\nu_j|$ и в этом случае, но нам это утверждение не понадобится, поэтому мы не будем его проверять.

Заменяем их на векторы $\eta_1 = \xi_1, \eta_2 = \varepsilon\xi_2, \eta_3 = \varepsilon^2\xi_3, \dots, \eta_k = \varepsilon^k\xi_k$. В новом базисе $\{\eta_j\}$ жорданова клетка примет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & \varepsilon & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \varepsilon & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$$

Повторим эту операцию для каждой жордановой клетки оператора B . Для нового базиса $\{\eta_j\}$ определим эрмитово произведение по формуле (8.1). Имеем $B = \text{diag}(\nu_1, \dots, \nu_n) + C$, где норма оператора C относительно введенного эрмитова произведения равна ε .

Так как это рассуждение можно провести для любого ε , утверждение доказано. \square

\square

8.1.6 Доказательство условия устойчивости для векторных полей

В этом разделе мы докажем условие устойчивости из теоремы 8.1.11, пользуясь уже доказанным условием устойчивости из теоремы 8.1.12. Будем считать, что особая точка поля v находится в нуле, $a = 0$; пусть A — линейная часть поля v в нуле.

Пусть $t \mapsto \varphi(t, x)$ — решение уравнения $\dot{x} = v(x)$ с начальным условием x_0 . Так как $v(0) = 0$, решение $\varphi(t, 0) \equiv 0$ определено при всех t . По теореме о непрерывной зависимости от начальных условий, для достаточно малых x и для $t \in [0, 1]$ определена непрерывная функция $\varphi(t, x)$; по теореме о гладкости, эта функция C^1 -гладкая. Поэтому отображение потока за время 1, $F(x) := g_v^1 x = \varphi(1, x)$, тоже C^1 -гладкое. По определению производной в нуле, $F(x) = Bx + o(|x|)$, где $B = \frac{\partial F}{\partial x}(0)$. Но тогда $B = e^A$, см. теорему 7.2.4.

Заметим, что для отображения потока F применимо условие устойчивости из теоремы 8.1.12; действительно, модули собственных значений оператора B равны $|e^{\lambda_j}| = e^{\text{Re } \lambda_j} < 1$. Итак, точка 0 асимптотически устойчива для отображения потока $F = g_v^1$ за время 1.

Теперь докажем, что она устойчива по Ляпунову для уравнения $\dot{x} = v(x)$. Фиксируем окрестность нуля U_ε .

От утверждения вида $F^m(U_\delta) = g_v^m(U_\delta) \subset U_\varepsilon$ для всех $m \in \mathbb{N}$ нам нужно перейти к утверждению вида $g_v^t(U_\delta) \subset U_\varepsilon$ для всех $t > 0$. Нам понадобится такая лемма:

Лемма 8.1.15. Пусть 0 — неподвижная точка гладкого векторного поля v . Для любой ε -окрестности нуля U_ε существует такая (меньшая) ε' -окрестность нуля $U_{\varepsilon'}$, что траектории точек из меньшей окрестности $U_{\varepsilon'}$ не покидают большую окрестность U_ε за время, меньшее единицы: для всякого $0 < \tau < 1$ выполнено $g_v^\tau(U_{\varepsilon'}) \subset U_\varepsilon$.

Эта лемма сразу следует из теоремы о непрерывной зависимости решения от начального условия. Фиксируем ε' в соответствии с этой леммой.

8.1.7. Доказательство условий неустойчивости

Точка 0 устойчива по Ляпунову для $F = g_v^1$, поэтому для $U_{\varepsilon'}$ существует δ -окрестность нуля, для которой

$$F^m(U_\delta) = g_v^m(U_\delta) \subset U_{\varepsilon'} \text{ при всех } m \in \mathbb{N}. \quad (8.2)$$

Произвольное время $t > 0$ мы представим в виде $t = m + \tau$, где m — неотрицательное целое число и $0 < \tau < 1$. Пользуясь (8.2), леммой 8.1.15 и групповым свойством фазового потока, получаем

$$g_v^t(U_\delta) = g_v^\tau(g_v^m(U_\delta)) \subset g_v^\tau(U_{\varepsilon'}) \subset U_\varepsilon.$$

Значит, точка 0 устойчива по Ляпунову для поля v .

Асимптотическая устойчивость точки 0 доказывается аналогично.

Упражнение 146. *Проведите полное доказательство асимптотической устойчивости точки 0.*

8.1.7. Функции Четаева и доказательство условий неустойчивости для отображений и векторных полей.

Мы переходим к доказательству условий неустойчивости из теорем 8.1.11, 8.1.12. Доказательство похоже на доказательство условий устойчивости, но роль функции Ляпунова играет *функция Четаева*³.

Определение 8.1.16. (см. рис. 8.4.)

Гладкая функция $C(x)$ в окрестности неподвижной точки a отображения F называется *функцией Четаева*, если

- $C(a) = 0$;
- сколь угодно близко к a есть точки, где $C(x) > 0$;
- Для некоторого $q > 1$ выполнено неравенство $C(F(x)) > qC(x)$ в области $C(x) > 0$.

Определение 8.1.17. Гладкая функция $C(x)$ в окрестности особой точки a поля v называется *функцией Четаева* для уравнения $\dot{x} = v(x)$, если

- $C(a) = 0$;
- сколь угодно близко к a есть точки, где $C(x) > 0$;
- $\mathcal{L}_v C(x) > 0$ в области $C(x) > 0$.

Лемма 8.1.18. *Если отображение F с неподвижной точкой a (или автономное уравнение $\dot{x} = v(x)$ с особой точкой a) имеет функцию Четаева в нуле, то точка a неустойчива по Ляпунову.*

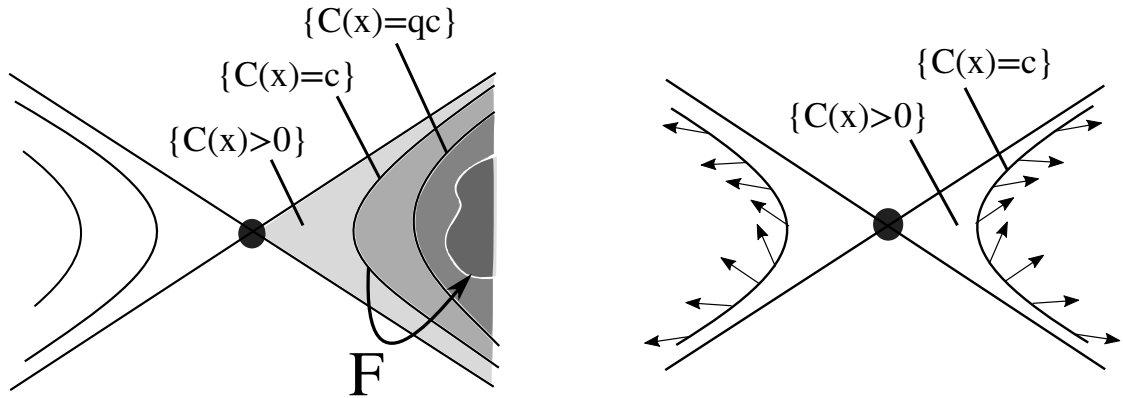


Рис. 8.4: Линии уровня функции Четаева для отображений на плоскости (слева) и для векторных полей на плоскости (справа)

Доказательство. Для простоты обозначений будем считать, что $a = 0$. Идея доказательства состоит в том, что на множестве $\{C(x) > 0\}$ значения $C(F^n(x))$ быстро растут, поэтому орбита точки, близкой к нулю, покинет его малую окрестность.

Начнем со случая отображений. Докажем утверждение от противного. Допустим, точка 0 устойчива по Ляпунову. Пусть функция Четаева определена и ограничена в ε -окрестности нуля; пользуясь определением устойчивости по Ляпунову, найдем соответствующую δ -окрестность нуля. Возьмем в ней точку x с $C(x) > 0$. В силу устойчивости по Ляпунову, орбита точки x не покидает ε -окрестность нуля; в силу неравенства $C(F(x)) > qC(x)$, она не покидает область, где $C(x) > 0$. Тогда для любого n выполнена оценка $C(F^n(x)) > qC(F^{n-1}(x))$, откуда $C(F^n(x)) > q^n C(x)$. Значит, $C(F^n(x)) \rightarrow \infty$, что невозможно внутри ε -окрестности нуля, где функция Четаева ограничена. Полученное противоречие показывает, что 0 неустойчив по Ляпунову.

Теперь докажем от противного утверждение для уравнений. Пусть точка 0 устойчива по Ляпунову; выберем ε, δ так же, как и для случая отображений. Возьмем в δ -окрестности нуля точку x_0 с $C(x_0) > 0$. Тогда вдоль траектории $x(t)$ с начальным условием $x(0) = x_0$ функция C возрастает (в частности, остается положительной). Однако эта функция ограничена, так как траектория в будущем не покидает ε -окрестности нуля. Из этого следует, что её производная $\mathcal{L}_v C$ должна стремиться к нулю. Однако эта производная может стремиться к нулю только если $C(x) \rightarrow 0$ (в силу условия $\mathcal{L}_v C > 0$ при $C(x) > 0$), что невозможно, так как функция $C(x)$ возрастает и $C(x_0) > 0$. Полученное противоречие показывает, что 0 неустойчив по Ляпунову. \square

Докажем условие неустойчивости из теоремы 8.1.12. Функцию Четаева $C(x)$ мы будем снова искать в виде квадратичной формы, но теперь эта форма не будет

³Николай Гурьевич Четаев (1902 – 1959) — механик и математик, один из создателей теории устойчивости движения, известный также своими работами в аналитической механике и теории дифференциальных уравнений.

положительно определенной.

Как и для условия устойчивости, сначала докажем линейную лемму. Здесь и далее $|x|^2 = (x, x)$, то есть норма $|\cdot|$ соответствует скалярному произведению (\cdot, \cdot) .

Лемма 8.1.19 (Линейная лемма.). Пусть оператор $B: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ имеет собственные значения как большие, так и меньшие единицы по модулю. Тогда существует квадратичная форма C и скалярное произведение (\cdot, \cdot) на пространстве \mathbb{R}^n и такие $q > 1$, $r > 0$, что

$$C(Bx) \geq qC(x) + r|x|^2, \quad (8.3)$$

причем форма $C(x)$ принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Последнее слагаемое в неравенстве (8.3) будет нам нужно для того, чтобы компенсировать разницу между отображением и его линейной частью в нуле.

Следующее упражнение иллюстрирует основную идею доказательства леммы 8.1.19 в простейшем случае.

Упражнение 147. • Проверьте, что для линейного оператора $B((x_1, x_2)) = (5x_1, x_2/2)$ на плоскости неравенство (8.3) будет выполняться, если взять стандартное скалярное произведение и $C((x_1, x_2)) = x_1^2 - x_2^2$.

- Обобщите эту конструкцию на случай произвольного линейного оператора в \mathbb{R}^n с различными вещественными собственными значениями, часть которых по модулю меньше единицы, а часть – больше единицы.

Доказательство. Идея доказательства состоит в том, чтобы выделить инвариантные подпространства для B , которые соответствуют большим и маленьким собственным значениям, а потом определить скалярное произведение и квадратичную форму как в упражнении 147.

Разобьем пространство \mathbb{R}^n в прямую сумму двух инвариантных подпространств $\mathbb{R}^n = V \oplus W$ так, чтобы все собственные значения ограничения $B|_V$ по модулю были больше единицы, а все собственные значения $B|_W$ по модулю были не больше единицы. Пользуясь линейной леммой 8.1.13 для операторов $B|_V$ и $B|_W$, введем скалярные произведения на V , W , для которых $|Bv| \geq M|v|$ при $v \in V$ и $|Bw| \leq m|w|$ при $w \in W$. Для $B|_V$ существование такого скалярного произведения следует из предложения 8.1.14, причем M – оценка снизу на модуль наименьшего собственного значения $B|_V$, то есть $M > 1$. Для $B|_W$ существование такого скалярного произведения сразу следует из линейной леммы, и число m – оценка сверху на модуль наибольшего собственного значения $B|_W$. Значит, мы можем выбрать $M > m > 1$.

Продолжим выбранные скалярные произведения на все пространство $\mathbb{R}^n = V \oplus W$ так, чтобы подпространства V и W были ортогональны. Мы получим для любого вектора $v + w \in V + W$:

$$|v + w|^2 = |v|^2 + |w|^2. \quad (8.4)$$

Теперь определим квадратичную форму C на векторе $x = v + w$:

$$C(v + w) := |v|^2 - |w|^2. \quad (8.5)$$

Упражнение 148. Проведите эту часть рассуждения для оператора из упражнения 147. Убедитесь, что скалярное произведение и квадратичная форма получились такими же, как в том упражнении.

Тогда для любого вектора $x = v + w \in V \oplus W$ получаем

$$\begin{aligned} C(Bx) &= C(Bv + Bw) = |Bv|^2 - |Bw|^2 \geq M^2|v|^2 - m^2|w|^2 = \\ &= \frac{M^2 + m^2}{2}(|v|^2 - |w|^2) + \frac{M^2 - m^2}{2}(|v|^2 + |w|^2) = qC(x) + r|x|^2, \end{aligned}$$

где $q > 1, r > 0$, что и требовалось. \square

Следующее общее предложение позволяет оценивать погрешность, которую мы вносим, заменяя нелинейное отображение внутри квадратичной формы на его линейную часть. Мы будем применять его для скалярного произведения и квадратичной формы C из линейной леммы, но оно верно в общем случае.

Предложение 8.1.20. Пусть отображение F имеет неподвижную точку в нуле и его линейная часть в этой точке равна $x \mapsto Bx$. Тогда для любой квадратичной формы C

$$C(F(x)) = C(Bx) + o(|x|^2).$$

Доказательство. По определению линейной части, имеем $F(x) = Bx + R(x)$, где $|R(x)| = o(|x|)$.

Запишем форму $C(x)$ в виде $C(x) = (Ax, x)$, где A — линейный оператор. Получим

$$C(F(x)) = (ABx + AR(x), Bx + R(x)) = (ABx, Bx) + (ABx, R(x)) + (AR(x), Bx) + (AR(x), R(x))$$

Первое слагаемое в правой части равно $C(Bx)$. Остальные слагаемые имеют порядок $o(|x|^2)$ в нуле: действительно, $|Bx| = O(|x|)$ и $|ABx| = O(|x|)$ в силу линейности A, B ; кроме того, $|R(x)| = o(|x|)$ и поэтому $|AR(x)| = o(|x|)$. Отсюда и следует предложение. \square

Доказательство условия неустойчивости для отображений. Для линейной части отображения F возьмем квадратичную форму $C(x)$ и скалярное произведение как в линейной лемме. Воспользуемся предложением 8.1.20. Получим, что для некоторого $q > 1$ в некоторой ε -окрестности нуля

$$C(F(x)) \geq C(Bx) + o(|x|^2) \geq q \cdot C(x) + r|x|^2 + o(|x|^2) \geq q \cdot C(x),$$

причем последнее неравенство превращается в равенство только при $x = 0$. Кроме того, по линейной лемме величина $C(x)$ не всюду отрицательна. Поэтому функция $C(x)$ является функцией Четаева для отображения F .

Теперь условие неустойчивости следует из леммы 8.1.18. \square

8.1.7. Доказательство условий неустойчивости

Доказательство условия неустойчивости для уравнений. Как и в доказательстве условия устойчивости, к отображению $F := g_v^1$ можно применить вторую часть теоремы 8.1.12; действительно, модули собственных значений оператора B равны $|e^{\lambda_j}| = e^{\operatorname{Re} \lambda_j}$, поэтому один из них больше единицы. Итак, точка 0 неустойчива по Ляпунову для отображения $F = g_v^1$. Отсюда сразу следует, что она не может быть устойчива по Ляпунову и для векторного поля v . \square

8.2 Предельные циклы на плоскости. Теорема Флоке

8.2.1 Циклы и отображение Пуанкаре

В этом разделе мы рассматриваем фазовый портрет векторного поля $v(x)$, определенного в области Ω на плоскости, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Пусть $v \in C^2(\Omega)$. Пусть $\varphi(t)$ — решение соответствующего уравнения $\dot{x} = v(x)$.

Предложение 8.2.1. *Если $\varphi(0) = \varphi(T)$, то решение φ периодическое с периодом T .*

Доказательство. Как легко проверить, если $\varphi(t)$ — решение уравнения $\dot{x} = v(x)$, то $\varphi(t+T)$ — тоже его решение. Если же $\varphi(0) = \varphi(T)$, то эти два решения имеют одинаковые начальные условия, а потому совпадают при всех t : $\varphi(t) = \varphi(t+T)$, что и требовалось. \square

Следствие 8.2.2. *Фазовые кривые уравнения $\dot{x} = v(x)$ могут быть гомеоморфны*

- *прямой (если $\varphi(0)$ не равно $\varphi(T)$ ни при каком t);*
- *окружности (если для некоторого T выполнено $\varphi(0) = \varphi(T)$, но вектор-функция φ не постоянна)*
- *точке (если $\varphi(t) \equiv a$; тогда $v(a) = 0$).*

Во втором случае получается замкнутая фазовая кривая, которая соответствует периодическому решению дифференциального уравнения.

Определение 8.2.3. *Предельный цикл* — это *изолированная* замкнутая фазовая кривая векторного поля, то есть замкнутая фазовая кривая, в окрестности которой нет других замкнутых фазовых кривых.

Как устроено поле в окрестности замкнутой фазовой кривой γ ? Чтобы понять это, возьмем *трансверсаль* к полю в точке $a \in \gamma$. Трансверсаль — это отрезок, который нигде не касается векторного поля; достаточно взять маленький отрезок $\Gamma \ni a$ в направлении, не параллельном $v(a)$.

Определение 8.2.4. *Отображение Пуанкаре P* вдоль замкнутой траектории γ — это отображение первого возвращения на трансверсаль Γ .

Более точно, для каждой точки $x \in \Gamma$ проведем положительную полутраекторию $\{\varphi(t, x) \mid t \geq 0\}$, которая начинается в x . Тогда $P(x) \in \Gamma$ — первая точка на этой траектории, которая снова попадает на трансверсаль Γ .

Отображение Пуанкаре также называют отображением последования.

Пример 8.2.5. Рассмотрим, например, поле в полярных координатах: $\dot{\varphi} = 1$, $\dot{r} = r - 1$ на кольце $r \in (\frac{1}{2}, 2)$. В качестве трансверсали возьмем отрезок $\varphi = 0$.

За время 2π любая траектория вернется на трансверсаль; из точки r она придет в точку $(r - 1)e^{2\pi} + 1$. Поэтому $r = 1$ соответствует предельному циклу ($P(1) = 1$),

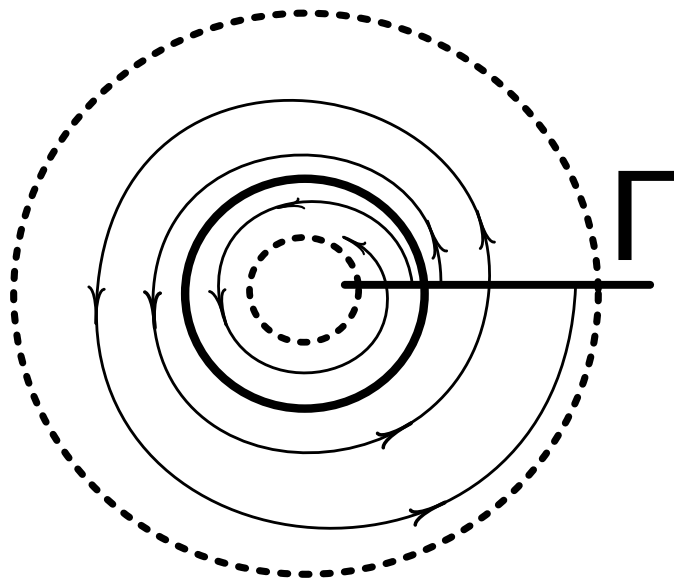


Рис. 8.5: Предельный цикл поля из примера 8.2.5. Пунктиром отмечены окружности $r = 0.5, r = 2$.

а остальные точки будут удаляться от 1 под действием P . На рисунке изображен соответствующий фазовый портрет: все траектории векторного поля сматываются с предельного цикла.

Строго говоря, надо доказать, что в определении отображения Пуанкаре мы можем говорить о *первом* моменте пересечения траектории с трансверсалью. Что, если множество $\{t > 0, g_v^t x \in \Gamma\}$ не имеет наименьшего элемента? Мы не будем давать отдельного доказательства этого факта; он следует из теоремы, приведенной ниже.

Теорема 8.2.6. *Отображение Пуанкаре вдоль любой замкнутой траектории C^2 -гладкого поля определено и C^1 -гладко на некотором малом интервале $a \in I \subset \Gamma$.*

Доказательство. По теореме о выпрямлении, у точки a есть окрестность $U \ni a$, в которой определен C^1 -гладкий выпрямляющий диффеоморфизм H . В этой окрестности определена проекция $\pi: U \rightarrow \Gamma$ вдоль траекторий векторного поля, которая в выпрямляющей карте (после применения диффеоморфизма H) превращается в проекцию $(x, x') \mapsto (x, 0)$. Ясно, что отображение π является C^1 -гладким.

Пусть T — период цикла. Отображение g_v^T переводит точку a в себя, поэтому достаточно малую окрестность $V \ni a$ оно переводит внутрь U . Отображение $P := \pi \circ g_v^T|_{\Gamma}$ (см. рис. 8.6) определено в малой окрестности точки a на трансверсали Γ и переводит любую точку x в точку пересечения её траектории $g_v^t x$ с трансверсалью Γ . Это отображение гладкое как композиция двух гладких отображений.

Осталось доказать интуитивно очевидное утверждение: если точка x достаточно близко к a , то построенная точка пересечения $P(x) = \pi \circ g_v^T|_{\Gamma}(x)$ её траектории

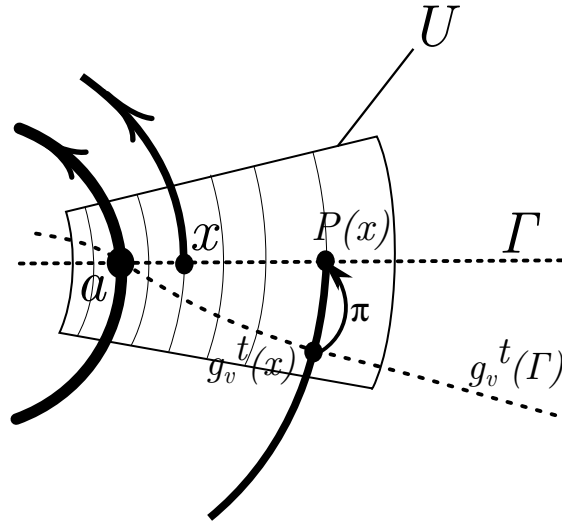


Рис. 8.6: Иллюстрация к доказательству теоремы о гладкости отображения Пуанкаре

с трансверсалью действительно *первая*. Это покажет, что P — отображение Пуанкаре, и завершит доказательство. Рассуждение очень похоже на доказательство инъективности отображения, которое строится в теореме о трубке траекторий.

Фиксируем малый отрезок I , $a \in I \subset \Gamma$ на трансверсали так, чтобы этот отрезок пересекал цикл γ только в одной точке a (впрочем, задача 4.1.6 в конце раздела показывает, что это требование всегда выполнено). Уменьшим I так, что $I \cup g_v^T I \subset U$. Пусть $\delta > 0$ выбрано так, что для любой точки $x \in I \cup g_v^T I$ дуга $\{g_v^t x, t \in [-\delta, \delta]\}$, тоже лежит в U .

По построению, точка $P(x)$ лежит на траектории точки x : $P(x) = g_v^s x$, причем время возврата s близко к T , если точка x близка к a . Уменьшив I , мы можем считать, что при $x \in I$ это время возврата δ -близко к T , а потому $0 < s < T + \delta$. Мы покажем, что дуга $\{g_v^t x, t \in [0, T + \delta]\}$ пересекает I только дважды — в точках x и $P(x) = g_v^s x$.

Пусть $x \in I$. В силу выбора δ , дуги $\{g_v^t x, t \in [0, \delta]\}$ и $\{g_v^t x, t \in [T - \delta, T + \delta]\}$ содержатся в окрестности U , где определена выпрямляющая карта. Поэтому каждая из этих дуг пересекает Γ не более чем в одной точке. Точки пересечения нам известны — это x и $P(x)$. “Средняя” часть траектории точки x — дуга $\{g_v^t x, t \in [\delta, T - \delta]\}$ — близка к дуге предельного цикла $\{g_v^t a, t \in [\delta, T - \delta]\}$, которая не пересекает I . Поэтому если точка x достаточно близка к a , то эта часть её траектории не пересекает I . Итак, для достаточно короткого отрезка I и для любого $x \in I$ дуга $\{g_v^t x, t \in [0, T + \delta]\}$ пересекает I только в точках x и $P(x)$, что и требовалось доказать. \square

Упражнение 149. Пусть y отображения Пуанкаре поля v вдоль замкнутой траектории γ есть несколько неподвижных точек. Проверьте, что каждая изолиро-

ванная неподвижная точка соответствует предельному циклу векторного поля v .

Упражнение 150. Нарисуйте и задайте дифференциальным уравнением поле, у которого а) два; б) бесконечно много предельных циклов.

Упражнение 151. Нарисуйте фазовый портрет векторного поля, у которого ровно два предельных цикла, ориентированные так, как на рисунке 8.7.

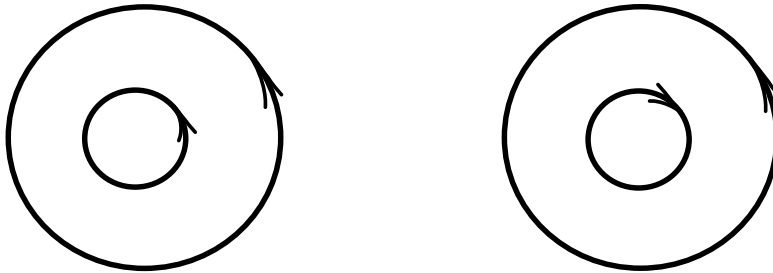


Рис. 8.7: Предельные циклы к задаче 151

8.2.2 Теорема Флоке

Будем считать, что предельный цикл проходит через точку $a = 0$.

Как понять, наматываются ли траектории на предельный цикл или сматываются с него?

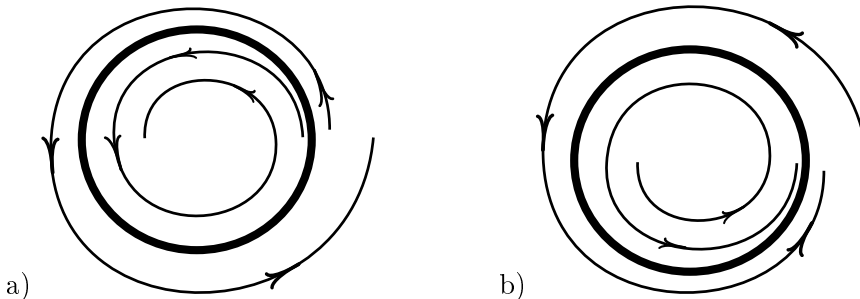


Рис. 8.8: Отталкивающий и притягивающий предельный цикл

Оказывается, для ответа на этот вопрос нужно знать мультипликатор предельного цикла.

Определение 8.2.7. Мультипликатор предельного цикла — это производная соответствующего отображения Пуанкаре в нуле.

Возможны следующие варианты:

- Если мультипликатор предельного цикла больше единицы, траектории сматываются с предельного цикла (см. рис. 8.8 а): в окрестности нуля точка $P(x)$ дальше от 0, чем точка x . Такой цикл называется отталкивающим.
- Если мультипликатор цикла меньше единицы, траектории наматываются на предельный цикл (см. рис. 8.8 б)). Такой цикл называется притягивающим.
- Если мультипликатор цикла равен единице, возможны разные картинки. Так, если $P(x) = x + x^2 + \dots$, получается полуустойчивый цикл: траектории изнутри цикла наматываются на него, а снаружи цикла — сматываются (см. рис. 8.9).

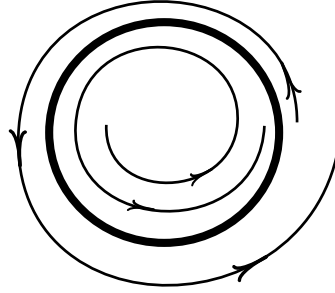


Рис. 8.9: Полуустойчивый цикл

Если же $P(x) = x + x^3 + \dots$, получается слабо отталкивающий цикл: траектории сматываются с цикла, но медленнее, чем для случая $P'(0) > 1$.

Как вычислить значение мультипликатора? Ответ даёт следующая теорема.

Теорема 8.2.8 (Теорема Флоке⁴). Пусть 0 — точка на цикле гладкого векторного поля v , P — отображение Пуанкаре. Тогда

$$\ln P'(0) = \int_0^T \operatorname{div}(v(g^t(0))) dt$$

Доказательство. По формуле (7.25) из доказательства теоремы об искажении фазового объема, $\ln \det \frac{\partial g^T}{\partial x}(0) = \int_0^T \operatorname{div}(v(g^t(0))) dt$. Осталось доказать, что $P'(0) = \det \frac{\partial g^T}{\partial x}(0)$.

Действительно, в качестве базисных векторов в $T_0\mathbb{R}^2$ возьмем вектор поля $v(0)$ и вектор $\xi \in T_0\Gamma$ на трансверсали. Тогда $(g_v^T)_*(v(0)) = v(0)$ (поток сохраняет свой генератор, см. следствие 7.3.2). Так как $P = \pi \circ g^T$, получаем, что $P'(0)\xi = \pi(g_v^T)_*\xi$. Поэтому до проецирования имеем $(g_v^T)_*\xi = P'(0)\xi + Cv(0)$. Итак, якобиан $\frac{\partial g^T}{\partial x}(0)$ имеет вид

$$\frac{\partial g^T}{\partial x}(0) = \begin{pmatrix} 1 & C \\ 0 & P'(0) \end{pmatrix},$$

откуда $P'(0) = \det \frac{\partial g^T}{\partial x}(0)$. □

⁴Ахилл Мария Гастон Флоке (1847 – 1920) — математик, известный своим вкладом в теорию дифференциальных уравнений.

8.3 Особые точки

Напомним, что особая точка векторного поля — это та, в которой поле обращается в 0. Гладкое векторное поле не теряет гладкости в особой точке, и в этом смысле ничего особенного в ней нет. Но все ненулевые векторы имеют определенное направление, а нулевой — нет. Поэтому особая точка и называется особой.

В окрестности неособой точки гладкое векторное поле можно превратить в стандартное с помощью гладкой замены координат. Другими словами, все поля в окрестности неособой точки устроены одинаково. Напротив, в окрестности особых точек фазовые портреты векторных полей бесконечно разнообразны. Эти фазовые портреты исследует *локальная* теория дифференциальных уравнений. Это богатая теория, которая и сейчас приносит новые неожиданные результаты.

Геометрию фазовых портретов начал исследовать Пуанкаре. Это ему принадлежат термины “седло, узел, фокус, центр”. Основной вопрос, которым он занимался, звучит так: *в какой мере фазовый портрет векторного поля вблизи особой точки похож на фазовый портрет его линейной части в этой точке?*

8.3.1 Окрестности особых точек

Пример: векторные поля на плоскости

Невырожденные особые точки линейных систем на плоскости могут быть одного из четырех типов: седло, узел, фокус, центр. Их фазовые портреты показаны на рисунке 8.10. Возникает вопрос: что происходит с фазовым портретом каждого из этих линейных векторных полей при добавлении нелинейных членов?

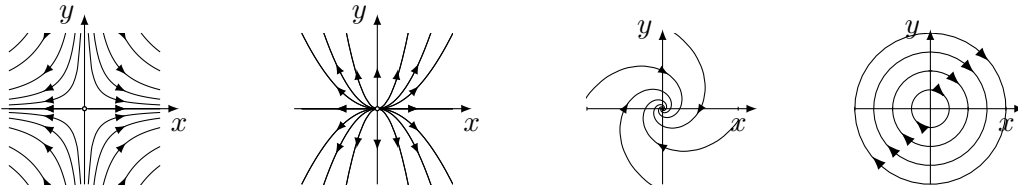


Рис. 8.10: Седло, типичный узел, фокус и центр

Оказывается, что фазовые портреты седла, узла и фокуса сохраняются, а фазовый портрет центра разрушается. Для начала приведем пример, показывающий, что может произойти с центром.

Напомним, что линейный центр с помощью линейной замены координат приводится к виду:

$$\dot{z} = i\omega z, \quad z \in \mathbb{C}, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

Предложение 8.3.1. *Особая точка векторного поля*

$$\dot{z} = i\omega z + \varepsilon z^2 \bar{z}, \quad z \in \mathbb{C},$$

устойчива по Ляпунову при $\varepsilon < 0$ и неустойчива при $\varepsilon > 0$.

Упражнение 152. Докажите это предложение.

Этот пример показывает, что фазовый портрет для линейного центра не сохраняется при добавлении нелинейных членов: после возмущения траектории векторного поля начинают стремиться к нулю или уходить от нуля. Напротив, фазовые портреты линейного седла, узла и фокуса лишь мало “искривляются” при возмущении нелинейными членами, как показано в разделе 8.3.3.

Собственные значения центра имеют нулевую вещественную часть; такие особые точки называются негиперболическими. Остальные перечисленные линейные векторные поля (узел, седло и фокус) — гиперболические: вещественные части собственных значений ненулевые. Оказывается, в любой размерности именно это различие определяет, меняется ли фазовый портрет качественно при добавлении нелинейных членов.

Гиперболические особые точки

Определение 8.3.2. Особая точка линейного векторного поля в \mathbb{R}^n называется *гиперболической*, если все ее собственные значения имеют ненулевую вещественную часть. Само линейное векторное поле в этом случае тоже называется гиперболическим.

Определение 8.3.3. Особая точка гладкого векторного поля в \mathbb{R}^n называется *гиперболической*, если линейная часть поля в этой точке — гиперболическая.

Эквивалентность векторных полей

Теперь наступило время формализовать понятие *сходства* между векторным полем и его линейной частью. Мы определим понятие *эквивалентности* векторных полей. Она бывает трех типов: топологическая, гладкая и аналитическая.

Определение 8.3.4. Два векторных поля v_1 и v_2 в окрестностях особых точек O_1 и O_2 в \mathbb{R}^n *топологически эквивалентны*, если существует гомеоморфизм H окрестности O_1 на окрестность O_2 , переводящий O_1 в O_2 и сопрягающий локальные фазовые потоки этих полей:

$$H \circ g_{v_1}^t = g_{v_2}^t \circ H$$

при малых t в некоторой окрестности точки O_1 .

Говорят, что гомеоморфизм H *сопрягает* векторные поля v_1 и v_2 .

Определение 8.3.5. Два векторных поля v_1 и v_2 в окрестности точек O_1 и O_2 в \mathbb{R}^n называются C^k - (C^∞ -, C^ω -) *эквивалентными*, если они топологически эквивалентны и сопрягающий гомеоморфизм — C^k -гладкий (соотв. бесконечно-гладкий, аналитический).

Классификацией векторных полей с точностью до топологической, гладкой и аналитической эквивалентности занимается соответственно топологическая, гладкая и

аналитическая теория. Аналитическая теория — самая тонкая и самая старая. Первые результаты этой теории принадлежат Пуанкаре. В частности, он доказал, что фокус и нерезонансный узел (т.е. узел, отношение собственных значений которого не целое) аналитически эквивалентны своей линейной части. Гладкая теория — более грубая и более молодая. Топологическая теория еще более грубая. Как мы увидим, она не различает узлов и фокусов. Зато ее результаты более просты. Один из них — топологическая классификация гиперболических особых точек векторных полей в пространствах любой размерности — изложен ниже.

Отметим, что случайно выбранное векторное поле с вероятностью единица имеет гиперболические особые точки. Мы не будем здесь формализовывать это эвристическое утверждение.

Теорема Гробмана-Хартмана

Теорема 8.3.6 (Теорема Гробмана⁵-Хартмана⁶). *Гладкое векторное поле в некоторой окрестности своей гиперболической особой точки топологически эквивалентно своей линейной части.*

В этой теореме достаточно C^1 -гладкости векторного поля. Теорема становится неверной, если в ней топологическую эквивалентность заменить на бесконечно гладкую или аналитическую. Доказательство теоремы довольно сложно и использует некоторые приёмы из функционального анализа; оно изложено в разделе 8.3.5.

Нам пригодится аналог теоремы Гробмана-Хартмана для отображений. Дадим соответствующие определения.

Определение 8.3.7. Два отображения F и G в окрестности их общей неподвижной точки O топологически эквивалентны, если существуют окрестности U_1 и U_2 этой точки и гомеоморфизм $H : U_1 \rightarrow U_2$, $H(O) = O$, который сопрягает отображения F и G :

$$G \circ H = H \circ F \quad (8.6)$$

в окрестности O .

Определение 8.3.8. Линейный оператор в \mathbb{R}^n называется *гиперболическим*, если он невырожден и ни одно его собственное значение не лежит на единичной окружности в \mathbb{C} .

Заметим, что если $\dot{x} = Ax$ — гиперболическое векторное поле, то его отображение за ненулевое время t , равное e^{At} , — гиперболическое отображение.

Определение 8.3.9. Неподвижная точка диффеоморфизма F называется гиперболической, если его дифференциал в этой точке — гиперболический линейный оператор.

⁵ Давид Матвеевич Гробман (1922–1998) — математик, специалист в области дифференциальных уравнений.

⁶ Филип Хартман (1915 – 2015) — математик, специалист в области дифференциальных уравнений.

Теорема 8.3.10. [Теорема Гробмана-Хартмана для отображений.] В окрестности гиперболической неподвижной точки диффеоморфизм топологически эквивалентен своей линейной части (то есть своему дифференциалу в неподвижной точке).

Многомерные седла

Обсудим динамику линейного гиперболического векторного поля:

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (8.7)$$

Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ — собственные значения оператора A , лежащие в левой полуплоскости ($\operatorname{Re} \lambda_j < 0$), а μ_1, \dots, μ_u — собственные значения оператора A , лежащие в правой полуплоскости ($\operatorname{Re} \mu_k > 0$), $s + u = n$. Тогда пространство \mathbb{R}^n разлагается в прямую сумму A -инвариантных подпространств:

$$\mathbb{R}^n = T^s \oplus T^u,$$

так что собственные значения оператора $A|_{T^s} = A^-$ — это λ_j , а собственные значения $A|_{T^u} = A^+$ — это μ_j . Подпространства T^u, T^s называются неустойчивым и устойчивым подпространством соответственно.

Пусть y и z — координаты на T^s и T^u . Тогда система (8.7) принимает вид

$$\dot{y} = A^- y \quad (8.8)$$

$$\dot{z} = A^+ z.$$

Особая точка 0 для системы $\dot{y} = A^- y$ асимптотически устойчива, поскольку собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ оператора A^- имеют отрицательные вещественные части (см. критерий устойчивости Ляпунова, теорема 8.1.11 раздела 8.1.4). Особая точка 0 для системы $\dot{z} = A^+ z$ становится асимптотически устойчивой, если сделать замену времени $t \mapsto -t$. Значит, эта особая точка отталкивающая. Вне $T^s \cup T^u$ траектории системы (8.7) ведут себя седловым образом:

$$x(t) = (y(t), z(t)), \quad y(t) \in T^s, \quad z(t) \in T^u,$$

причем $|y(t)|$ уменьшается и стремится к нулю с ростом времени, а $|z(t)|$ растёт и стремится к бесконечности.

Мы докажем такую теорему классификации:

Теорема 8.3.11. Всякое C^1 -гладкое векторное поле в окрестности гиперболической особой точки топологически эквивалентно стандартному седлу

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x, & x &\in T^s \\ \dot{y} &= y, & y &\in T^u. \end{aligned} \quad (8.9)$$

где $T^s \oplus T^u = \mathbb{R}^n$. Два таких поля топологически эквивалентны если и только если размерности их устойчивых (а, значит, и неустойчивых) подпространств совпадают.

Доказательство. В силу теоремы Гробмана-Хартмана, достаточно доказать это утверждение для линейных векторных полей. Начнем со случая, когда T^s совпадает со всем пространством, то есть все собственные значения имеют отрицательные вещественные части. В этом случае особая точка 0 устойчива по Ляпунову. Говорят, что точка 0 — *аттрактор* поля v .

Лемма 8.3.12. Пусть гиперболическое линейное векторное поле Ax в \mathbb{R}^s имеет особую точку, устойчивую по Ляпунову (аттрактор). Тогда уравнения $\dot{x} = Ax$ и $\dot{x} = -x$ топологически эквивалентны.

Доказательство. Условия леммы означают, что все собственные значения оператора A имеют отрицательные вещественные части. По теореме Ляпунова (точнее, по лемме 8.1.13 раздела 8.1.5), в \mathbb{R}^s можно ввести евклидову структуру так, что расстояние до нуля вдоль фазовых кривых будет монотонно уменьшаться:

$$\frac{d}{dt} |e^{At}x| < 0 \text{ при } x \neq 0.$$

Это значит, что каждая фазовая кривая поля пересекает единичную (а также любую) сферу с центром в нуле в единственной точке. Построим гомеоморфизм H , который сопрягает фазовые потоки e^{At} и e^{-tE} . На единичной сфере S^{s-1} положим $H = id$. Для любой точки x возьмем теперь ту единственную точку $y(x)$, в которой фазовая кривая точки x пересекает S^{s-1} :

$$y(x) = \{e^{At}x | t \in \mathbb{R}\} \cap S^{s-1}.$$

Пусть $t(x)$ — время, за которое точка $y(x)$ переходит в точку x :

$$x = e^{At(x)}y(x).$$

Положим:

$$H(x) = e^{-t(x)}y(x).$$

Это и есть гомеоморфизм, сопрягающий векторные поля Ax и $-x$; он тождественен на единичной сфере (где $y(x) = x, t(x) = 0$) и переводит траекторию $x(t) = e^{At}y$, $y \in S^{s-1}$, векторного поля Ax в траекторию $e^{-t}y$ поля $-x$ с сохранением времени.

Задача 153. Докажите, что H — диффеоморфизм всюду вне нуля.

Отметим, что для точки x , близкой к нулю, время $t(x)$, за которое точка доходит по фазовой кривой уравнения $\dot{x} = Ax$ от точки $y(x)$ на единичной сфере до x , очень велико. Следовательно, точка $H(x) = e^{-t(x)}y(x)$ лежит близко к нулю. Значит, H — биекция, непрерывная не только вне нуля, но и в нуле. Лемма доказана. \square

Пусть теперь подпространство T^u совпадает со всем пространством. Тогда поле $(-v)$ устойчиво по Ляпунову; в этом случае точка 0 называется *репеллером* поля v . Для линейного репеллера верна аналогичная лемма.

Лемма 8.3.13. Пусть v — гиперболическое линейное векторное поле, для которой точка 0 является репеллером. Тогда поле v топологически эквивалентно векторному полю $\dot{x} = x$.

Доказательство. Эта лемма сводится к лемме 8.3.12 обращением времени $t \mapsto -t$. \square

Пусть теперь v — гиперболическое векторное поле в \mathbb{R}^n . По теореме Гробмана–Хартмана, оно топологически сопряжено своей линейной части; будем считать, что поле линейно с самого начала. Пусть T^s, T^u — его устойчивое и неустойчивое подпространства. Тогда фазовый поток поля v — это прямая сумма фазовых потоков полей $v_s = v|_{T^s}$ и $v_u = v|_{T^u}$. По лемме 8.3.12, существует гомеоморфизм $H^s : T^s \rightarrow T^s$, который сопрягает потоки полей v_s и $\dot{y} = -y$. Аналогично, по лемме 8.3.13, существует гомеоморфизм $H^u : T^u \rightarrow T^u$, который сопрягает потоки полей v_u и $\dot{z} = z$. Тогда гомеоморфизм $H = (H^s; H^u)$ сопрягает потоки полей v и (8.9).

Докажем второе утверждение теоремы.

Сначала заметим, что для линейного векторного поля фазовые кривые, стремящиеся к нулю при $t \rightarrow \infty$, заполняют устойчивое подпространство T^s .

Пусть гиперболические поля v и w топологически эквивалентны. В силу теоремы Гробмана–Хартмана, мы можем считать, что поля линейны. Множество фазовых кривых поля v , стремящихся к нулю при $t \rightarrow +\infty$, переходит при сопрягающем гомеоморфизме в аналогичное множество для поля w . Значит, сопрягающий гомеоморфизм переводит устойчивое подпространство поля v в устойчивое подпространство поля w . Следовательно, размерности этих подпространств совпадают. Теорема 8.3.11 доказана. \square

Сепаратрисы и теорема Адамара–Перрона.

Напомним, что для линейного седла на плоскости фазовые кривые, которые стремятся к нулю в прямом или обратном времени, называются сепаратрисами. При добавлении нелинейных членов у поля по-прежнему будет четыре фазовые кривые, подходящие к нулю, — образы этих сепаратрис под действием гомеоморфизма из теоремы Гробмана–Хартмана. Они называются сепаратрисами нелинейного седла. Понятно, что они гладкие вне нуля, потому что являются фазовыми кривыми.

Насколько гладки в нуле сепаратрисы нелинейного седла на плоскости? Теорема Гробмана–Хартмана не помогает ответить на этот вопрос: гомеоморфизм может превратить луч в спираль. Мы сформулируем теорему Адамара⁷ – Перрона⁸, которая показывает, что сепаратрисы — гладкие кривые.

Следующее понятие обобщает понятие сепаратрисы на многомерный случай.

⁷Жак Адамар (1865 – 1963) — математик и механик, внесший существенный вклад в теорию чисел, комплексный анализ, дифференциальную геометрию и уравнения в частных производных.

⁸Оскар Перрон (1880 – 1975) — математик, известный своим вкладом в теорию дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными.

Определение 8.3.14. Гладкая поверхность называется *инвариантной* относительно векторного поля, если во всех её точках векторное поле касается этой поверхности.

Инвариантная поверхность может иметь край или не иметь его. Заметим, что фазовая кривая, которая начинается на инвариантной поверхности, содержится в этой поверхности (пока не выйдет за край).

Определение 8.3.15. Для гиперболической особой точки векторного поля *устойчивым (неустойчивым) многообразием* особой точки называется инвариантная гладкая поверхность, проходящая через особую точку и касающаяся T^s (соотв. T^u) в особой точке.

Теорема 8.3.16. Пусть 0 — гиперболическая особая точка C^k -гладкого векторного поля, где $k \in \mathbb{N}$, $k = \infty$ или $k = \omega$. Тогда поле v имеет устойчивое и неустойчивое многообразия W^s, W^u в нуле класса гладкости k .

Топологическая эквивалентность из теоремы Гробмана-Хартмана переводит W^u, W^s в T^u, T^s . Поэтому траектории векторного поля, которые начинаются на W^s , содержатся в W^s и стремятся к 0 в будущем; траектории, которые начинаются на W^u , стремятся к 0 в прошлом.

Аналогично формулируется теорема Адамара-Перрона для отображений.

Определение 8.3.17. Для гиперболической особой точки отображения F *устойчивым (неустойчивым) многообразием* особой точки называется гладкая поверхность W^s (соотв. W^u), проходящая через особую точку, инвариантная:

$$F(W^s) \subset W^s, \quad F^{-1}(W^u) \subset W^u$$

и касающаяся T^s (соотв. T^u) в особой точке.

Теорема 8.3.18. Пусть 0 — гиперболическая неподвижная точка для C^k -гладкого отображения F , где $k \in \mathbb{N}$, $k = \infty$ или $k = \omega$. Тогда отображение F имеет устойчивое и неустойчивое многообразия W^s, W^u в нуле класса гладкости k .

Теорема 8.3.16 выводится из теоремы 8.3.18 так же, как теорема Гробмана-Хартмана для векторных полей выводится из аналогичной теоремы для отображений (см. раздел 8.3.5). Мы приведем идею доказательства для неустойчивого многообразия; чтобы потом доказать утверждение для устойчивого многообразия W^s , заметим, что оно является неустойчивым многообразием для F^{-1} .

Теорема Адамара-Перрона доказывается с помощью замечательного приема, называемого “преобразованием графиков”.

Рассмотрим бидиск $K = B^s \times B^u$ — прямое произведение малых шаров с центром 0 в подпространствах T^s и T^u . Возьмем любое отображение $\varphi : B^s \rightarrow B^u$, $\varphi(0) = 0$, $\text{Lip } \varphi < 1$; пусть Γ_φ — его график. Построим новое отображение $\psi = \Phi\varphi : B^s \rightarrow B^u$, график которого — множество

$$\Gamma_\psi = F(\Gamma_\varphi) \cap K.$$

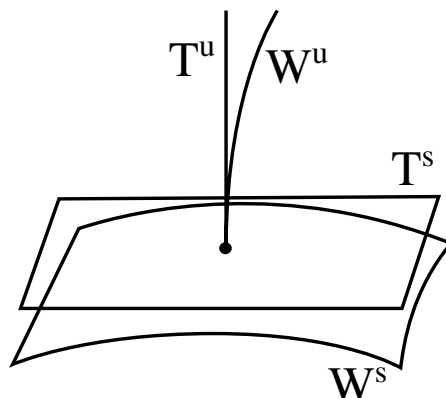


Рис. 8.11: Устойчивое и неустойчивое многообразие

Таким образом мы определили преобразование графиков — преобразование Φ на пространстве отображений $\varphi : B^s \rightarrow B^u$, $\varphi(0) = 0$, $\text{Lip } \varphi < 1$.

Если отображение F линейно, то преобразование Φ сжимает (в метрике C): оно уменьшает расстояния между графиками отображений. Его неподвижная точка тривиальна: $\varphi \equiv 0$.

Оказывается, что для нелинейного F преобразование графиков тоже сжимающее. Значит, у него есть неподвижная точка — некоторое отображение φ , график которого переходит в себя под действием F . Значит, этот график и есть искомое инвариантное многообразие W^u .

Аккуратное построение отображения Φ и доказательство того, что оно сжимающее, сравнительно просто в метрике C , и существенно сложнее в метрике C^k (точнее, в метрике, эквивалентной C^k). Удивительным образом, в аналитической ситуации оно оказывается таким же простым, как в непрерывной (но требует выхода в комплексную область). Детали этих доказательств выходят за рамки нашей книги, см. [?].

8.3.2 Окрестности циклов

Топологическая классификация гиперболических линейных отображений

Указанная в заглавии классификация не так проста, как классификация гиперболических линейных векторных полей. Картину осложняет ориентация. Дело в том, что даже в одномерном случае два сжимающих линейных отображения могут быть топологически неэквивалентны, например, $x \mapsto \frac{x}{2}$ и $x \mapsto -\frac{x}{2}$, см. рис. 8.12. Потoki векторных полей всегда сохраняют ориентацию, поэтому раньше мы не замечали этой трудности.

Теорема 8.3.19. *Два линейных гиперболических отображения пространства \mathbb{R}^n на себя топологически эквивалентны если и только если одновременно выполнено следующее:*

- размерности их устойчивых подпространств совпадают;

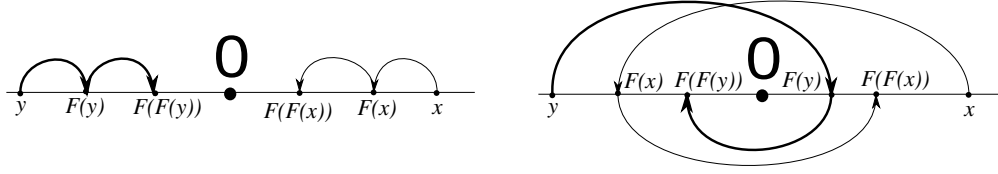


Рис. 8.12: Сохранение и смена ориентации

- ограничения операторов на их устойчивые подпространства либо оба сохраняют ориентацию, либо оба меняют ориентацию;
- то же верно для ограничений операторов на их неустойчивые подпространства.

Мы ограничимся здесь только формулировкой этой теоремы. Из нее, применяя теорему Гробмана-Хартмана для отображений, мы получаем, что любое нелинейное C^1 -гладкое отображение в окрестности своей гиперболической неподвижной точки топологически эквивалентно одному из следующих четырех отображений (переменные p, q одномерны):

$$F_1 : (x, y) \mapsto \left(\frac{x}{2}, 2y\right); \quad (8.10)$$

$$F_2 : (x, p, y) \mapsto \left(\frac{x}{2}, -\frac{p}{2}, y\right); \quad (8.11)$$

$$F_3 : (x, p, y, q) \mapsto \left(\frac{x}{2}, -\frac{p}{2}, 2y, -2q\right); \quad (8.12)$$

$$F_4 : (x, y, q) \mapsto \left(\frac{x}{2}, 2y, -2q\right); \quad (8.13)$$

Например, если ограничение отображения на устойчивое подпространство сохраняет ориентацию, то это ограничение эквивалентно $x \mapsto \frac{x}{2}$, а если меняет ориентацию, то оно эквивалентно $(x, p) \mapsto (\frac{x}{2}, -\frac{p}{2})$.

Все четыре отображения F_j называются стандартными седлами.

Топологическая классификация окрестностей гиперболических циклов

Рассмотрим теперь поведение векторного поля в окрестности цикла — замкнутой фазовой кривой в пространстве \mathbb{R}^{n+1} .

Отметим на цикле произвольную точку O . *Трансверсаль* к циклу в точке O — это небольшой участок n -мерной поверхности, которая проходит через O и нигде не касается поля. Выберем трансверсаль Γ к нашему циклу в точке O .

Как и в двумерном случае (см. раздел 8.2.1), *отображение Пуанкаре* вдоль цикла — это отображение первого возвращения на Γ траекторий, начинающихся на Γ вблизи цикла, см. рис. 8.13. Оно определено в малой окрестности точки O на Γ .

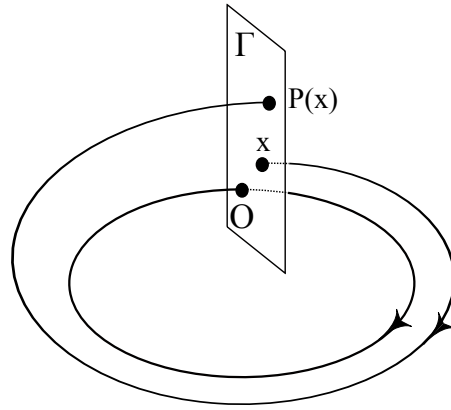


Рис. 8.13: Отображение Пуанкаре, соответствующее циклу

Заметим, что для двух разных трансверсалий Γ , Γ' отображения Пуанкаре топологически и даже гладко эквивалентны: сопрягающее их отображение — это проектирование одной трансверсали на другую вдоль траекторий.

Нам понадобится новое определение эквивалентности векторных полей, которое еще слабее, чем топологическая эквивалентность. Напомним, что фазовые кривые векторных полей ориентированы; направление на фазовой кривой — направление роста времени.

Определение 8.3.20. Два векторных поля v_1 и v_2 в областях U_1 и U_2 орбитально топологически эквивалентны, если существует гомеоморфизм $H: U_1 \rightarrow U_2$, переводящий O_1 в O_2 и каждую фазовую кривую поля v_1 — в фазовую кривую поля v_2 , с сохранением ориентации временем.

Таким образом, у орбитально топологически эквивалентных векторных полей фазовые портреты топологически эквивалентны, но время движения вдоль фазовых кривых может быть разным — например, периоды циклов могут отличаться.

Теорема 8.3.21. Два векторных поля в окрестности цикла орбитально топологически эквивалентны, если и только если их отображения Пуанкаре топологически эквивалентны.

Доказательство. Пусть два векторных поля v и w в окрестности своих циклов γ и γ' орбитально топологически эквивалентны, и пусть H — сопрягающий гомеоморфизм. Пусть Γ , Γ' — трансверсали к γ и γ' , P и P' — соответствующие отображения Пуанкаре.

Поверхность $H(\Gamma)$ — трансверсаль к полю w ; так как отображение H переводит траектории поля v в траектории w , то оно сопрягает отображение P с отображением Пуанкаре Q вдоль w , определенным на $H(\Gamma)$. С другой стороны, проекция $\pi: H(\Gamma) \rightarrow \Gamma'$ вдоль траекторий поля w сопрягает отображения Пуанкаре Q и P' . Значит, композиция $\pi \circ H$ сопрягает отображения Пуанкаре P и P' .

Пусть теперь два отображения Пуанкаре $P: \Gamma \rightarrow \Gamma$ и $Q: \Gamma' \rightarrow \Gamma'$ вдоль полей v и w топологически эквивалентны. Умножим поле v на положительную функцию

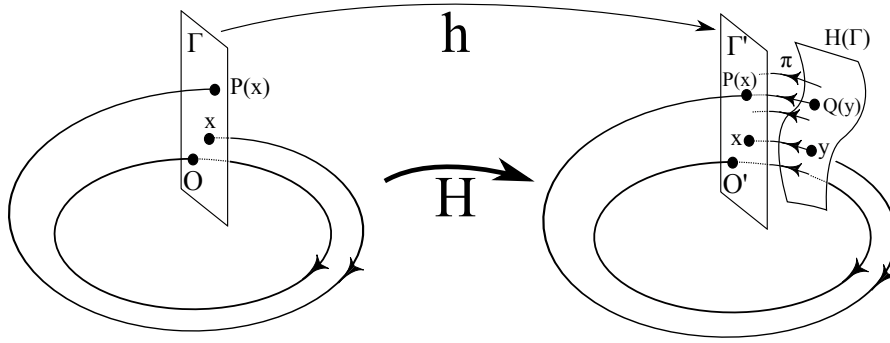


Рис. 8.14: Сопряжение отображений Пуанкаре

так, чтобы время возвращения с трансверсали Γ на нее саму равнялось 1. Фазовый портрет от этого не поменяется; отображение Пуанкаре тоже не поменяется, но станет равным отображению фазового потока за единичное время g_v^1 , ограниченному на Γ . То же сделаем с полем w ; новые векторные поля будем обозначать теми же буквами v и w .

Пусть $h : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ — гомеоморфизм, сопрягающий P и Q :

$$h \circ P = Q \circ h. \quad (8.14)$$

Продолжим этот гомеоморфизм в окрестность циклов по следующей формуле: для $x \in \Gamma$, $t \in [0, 1]$

$$H(g_v^t x) = g_w^t y, y = h(x) \in \Gamma'.$$

В области $(\Gamma, 0) \times [0, 1]$ это — гомеоморфизм на свой образ. Но при $t = 1$ это отображение определено двумя способами:

$$H(g_v^1 x) = h(g_v^1 x); H(g_v^1 x) = g_w^1 h(x).$$

Нам нужно доказать, что эти два определения совпадают. Действительно, при $x \in \Gamma$, $h(x) \in \Gamma'$

$$g_v^1 x P(x) \in \Gamma, g_w^1 h(x) = Q(h(x)) \in \Gamma'.$$

Следовательно, по формуле (8.14)

$$g_w^1 h(x) = Q \circ h = h \circ P = h(g_v^1 x).$$

Нужное нам совпадение доказано, поэтому сопряжение векторных полей корректно определено. \square

Это предложение показывает, что для топологической классификации полей в окрестностях циклов достаточно классифицировать отображения Пуанкаре. Мы сделаем это только в гиперболическом случае.

Определение 8.3.22. Цикл векторного поля называется гиперболическим, если его отображение Пуанкаре имеет гиперболическую неподвижную точку, лежащую на этом цикле.

Мы наметим доказательство следующего топологического факта.

Предложение 8.3.23. *Отображение Пуанкаре для полей в \mathbb{R}^{n+1} сохраняет ориентацию.*

Набросок доказательства. Домножим поле v на положительную функцию так, чтобы отображение Пуанкаре совпадало с отображением потока за время 1. Тогда $g_v^t(\Gamma), t \in [0, 1]$ — набор трансверсалей к циклу. Существует *трубчатая окрестность* U цикла в \mathbb{R}^{n+1} — окрестность, гомеоморфная прямому произведению диска $B \subset \mathbb{R}^n$ с центром в 0 на окружность $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, причем этот гомеоморфизм Ψ переводит цикл в окружность $\{0\} \times S^1$, а трансверсали $U \cap g_v^t(\Gamma)$ — в диски $B \times \{t\}$.

Значит, существует непрерывное семейство отображений $P^t: B \rightarrow \mathbb{R}^n$, $P^t = \Psi g_v^t \Psi^{-1}$ (это — отображения потока в карте Ψ), для которых $P^0 = id$ и P^1 сопряжено отображению Пуанкаре P . Это доказывает, что P сохраняет ориентацию. \square

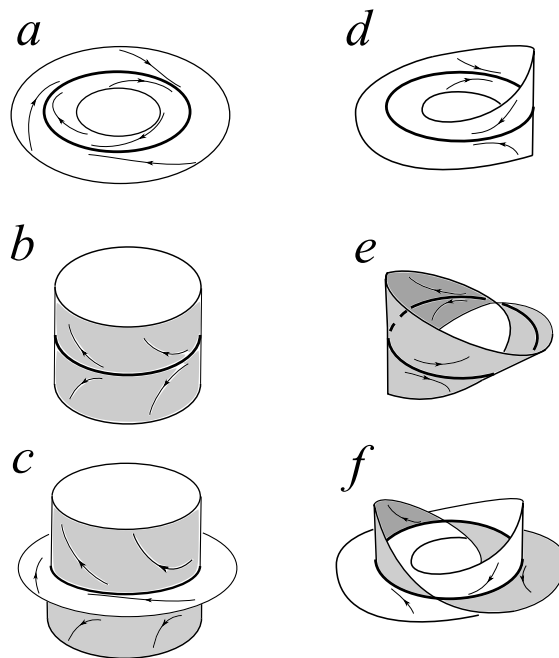


Рис. 8.15: Инвариантные многообразия гиперболических циклов в \mathbb{R}^3 : случай (8.10) (слева, a, b, c) и случай (8.12) (справа, d, e, f). На рис. a и d показано устойчивое многообразие цикла, на рис. b и e — неустойчивое, на рис. c и f — устойчивое и неустойчивое вместе

Из теорем Гробмана-Хартмана и 8.3.19 следует теперь, что отображение Пуанкаре гиперболического цикла эквивалентно стандартному седлу (8.10) или (8.12).

Кроме того, теорема Адамара-Перрона показывает, что у гиперболического цикла тоже существуют устойчивые и неустойчивые многообразия! Так как отображение Пуанкаре гиперболического цикла гиперболическое, оно имеет инвариантные многообразия W_P^s и W_P^u в Γ . Траектории, стартующие с многообразия W_P^s , на него же

и возвращаются, так как многообразие инвариантно относительно P . Объединение таких траекторий W_γ^s — что-то вроде ленты, содержащей цикл γ . Оно называется устойчивым многообразием цикла γ ; траектории, лежащие на нем, наматываются на цикл в прямом времени. Аналогично определяется неустойчивое многообразие гиперболического цикла — инвариантное многообразие, траектории которого сматываются с цикла (наматываются при $t \rightarrow -\infty$). Эти многообразия для $n = 2$ изображены на рис. 8.15: слева — для отображения Пуанкаре типа (8.10), справа — для типа (8.12). В первом случае устойчивое и неустойчивое многообразия цикла — кольца, а во втором случае — ленты Мебиуса.

8.3.3 Разрешение особенностей. Гиперболические особые точки нелинейных векторных полей на плоскости

Линейные гиперболические векторные поля на плоскости бывают трех типов: седло, фокус и узел (см. раздел 5.3.3). При добавлении нелинейных членов фазовые портреты в окрестности особых точек остаются топологически эквивалентными своей линейной части по теореме Гробмана-Хартмана. Но устойчивый узел и фокус эквивалентны одному и тому же стандартному полю $\dot{x} = -x$, $\dot{y} = -y$. Фазовый портрет этого поля мало похож на фокус. Хотелось бы узнать, имеется ли большее сходство нелинейного гиперболического векторного поля с его линейной частью. Этому и посвящен настоящий раздел.

В этом разделе мы считаем, что векторное поле C^3 -гладко в окрестности нуля, а “фазовые кривые” означают “неточечные фазовые кривые”.

Фокусы

Определение 8.3.24. Нелинейный фокус векторного поля — это особая точка на плоскости, все фазовые кривые в некоторой окрестности которой — устойчивые или неустойчивые спирали.

Устойчивая спираль — это параметризованная временем фазовая кривая, которая в полярных координатах имеет вид $r(t), \varphi(t)$, причем $r(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$; кроме того, $\varphi(t) \rightarrow \pm\infty$, причем это стремление монотонно. Аналогично определяется неустойчивая спираль (определение отличается заменой $t \mapsto -t$).

Теорема 8.3.25. Возмущение линейного фокуса нелинейными членами — нелинейный фокус.

Доказательство. Линейный фокус всегда можно привести к виду

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax - by, \\ \dot{y} &= by + ax,\end{aligned}$$

где $a, b \neq 0$ (см. раздел 5.3.3.2). В полярных координатах эта система имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{r} &= ar, \\ \dot{\varphi} &= b.\end{aligned}$$

После добавления нелинейных членов в полярных координатах мы получим

$$\begin{aligned} \dot{r} &= ar + o(r), \\ \dot{\varphi} &= b + o(1). \end{aligned} \quad (8.15)$$

Без ограничения общности считаем, что $a < 0$ (иначе обратим время), и $b > 0$ (иначе сделаем симметрию относительно оси x). По теореме Ляпунова, особая точка 0 первого уравнения системы (8.15) асимптотически устойчива: все фазовые кривые в ее малой окрестности экспоненциально приближаются к нулю, не покидая этой окрестности. Скорость изменения полярного угла отделена от нуля; следовательно, он стремится к $+\infty$ при $t \rightarrow +\infty$. Поэтому фазовая кривая является устойчивой спиралью. \square

Сёдла

Теорема 8.3.26. *Возмущение линейного седла нелинейными членами имеет четыре фазовые кривые, стремящиеся к нулю: две при $t \rightarrow +\infty$ — устойчивые сепаратрисы и две при $t \rightarrow -\infty$ — неустойчивые сепаратрисы.*

Остальные фазовые кривые покидают любую окрестность седла как в будущем, так и в прошлом времени.

Сепаратрисы нелинейного седла входят в особую точку, касаясь сепаратрис линейной части векторного поля.

Доказательство. Сепаратрисы плоского седла описываются теоремой Адамара-Перрона. Устойчивое многообразие седла одномерно и состоит из трех фазовых кривых: двух сепаратрис и особой точки. Оно касается в нуле прямой T^s , содержащей сепаратрисы линейной части. Аналогично описываются неустойчивые сепаратрисы.

Все фазовые кривые линейного седла, кроме сепаратрис, покидают любую малую окрестность седла и в прошлом, и в будущем. Аналогичное свойство нелинейного седла следует из теоремы Гробмана-Хартмана. \square

Это доказательство очень просто, но оно использует сильные результаты: теорему Гробмана-Хартмана и Адамара-Перрона. Мы приведем другое доказательство, использующее только теорему существования и единственности.

Метод разрешения особенностей

Теорема 8.3.26, как и последующие теоремы о нелинейных узлах, доказываются методом разрешения особенностей. По словам Арнольда, для исследования деталей фазового портрета в окрестности особой точки нужен микроскоп большой разрешающей силы. В нашем контексте роль такого микроскопа играет переход к полярным координатам (r, φ) . В координатах (r, φ) вместо особой точки в фазовую плоскость вклеивается окружность $r = 0$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. Когда фазовая кривая в полярных координатах входит в точку $(\varphi_0, 0)$, в декартовых координатах она входит в 0, касаясь луча $\varphi = \varphi_0$.

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax + by + f(x, y), \\ \dot{y} &= cx + dy + g(x, y),\end{aligned}\tag{8.16}$$

где $ac - bd \neq 0$ (особая точка невырождена), и $f(0) = g(0) = 0$, $df(0) = dg(0) = 0$. Переход к полярным координатам отображает проколотую окрестность нуля $0 < r < r_0$ на плоскости \mathbb{R}^2 в кольцо между двумя окружностями $r = 0$ и $r = r_0$ на цилиндре $\mathbb{R}^1 \times S^1$. Это отображение позволяет перенести векторное поле из окрестности нуля на плоскости в векторное поле на кольце $0 < r < r_0$ в цилиндре. Оказывается, что полученное векторное поле можно гладко продолжить в полную окрестность окружности $r = 0$ на этом цилиндре. Исследовав фазовый портрет нового векторного поля в кольце, мы одновременно докажем нужные нам свойства старого поля. В этом и состоит простейший вариант метода разрешения особенностей.

Система (8.16) в полярных координатах (r, φ) , где $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{r} = \frac{(ax+by)x + x f + (cx+dy)y + yg}{r} \\ &= r(a \cos^2 \varphi + (b+c) \sin \varphi \cos \varphi + d \sin^2 \varphi) + \frac{f \cos \varphi + g \sin \varphi}{r}\end{aligned}\tag{8.17}$$

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{r^2} = \frac{(cx+dy)x + xg - (ax+by)y - yf}{r^2} \\ &= c \cos^2 \varphi + (d-a) \sin \varphi \cos \varphi - b \sin^2 \varphi + \frac{g \cos \varphi - f \sin \varphi}{r}.\end{aligned}\tag{8.18}$$

Это уравнение называется *раздутой системой*.

Для окончания выкладки нужно подставить $(x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ в $f(x, y)$ и $g(x, y)$. Следует заметить, что функции f и g определены в полной окрестности нуля; поэтому функции $f(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ и $g(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ определены как при положительных, так и при отрицательных малых значениях r .

По формуле Тейлора, $f(x, y) = H(x, y) + O(r^3)$, где H — квадратичная форма. Поэтому

$$\frac{f(r \cos \varphi, r \sin \varphi)}{r^2} = H(\cos \varphi, \sin \varphi) + O(r).$$

Эта функция C^1 -гладкая в окрестности окружности $r = 0$. Значит, система (8.17), (8.18) задаёт C^1 -гладкое векторное поле. Его ограничение на окружность $\{r = 0\}$ равно

$$\dot{r} = 0, \dot{\varphi} = c \cos^2 \varphi + (d-a) \sin \varphi \cos \varphi - b \sin^2 \varphi.$$

Если a, b, c, d таковы, что это ограничение не равно нулю тождественно, то окружность $r = 0$ состоит из конечного числа особых точек и фазовых кривых раздутой системы; говорят, что она является инвариантной кривой или *вклеенной* окружностью этой системы. Рассмотрение раздутой системы естественно начинать с ее ограничения на вклеенную окружность.

Если это ограничение тождественно равно нулю, то окружность $r = 0$ состоит из бесконечного числа особых точек. Это бывает в случае дикритического узла ($a = d, b = c = 0$); само раздутие тогда тоже называется дикритическим. Мы рассмотрим этот случай ниже.

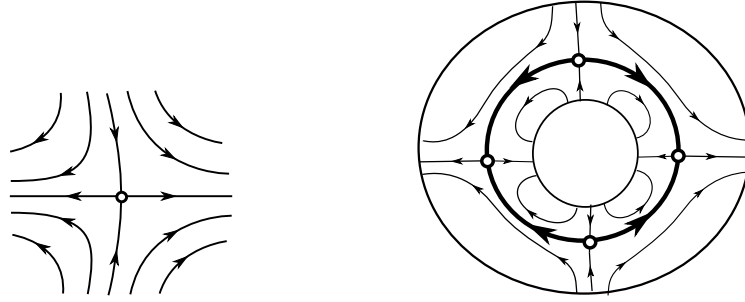


Рис. 8.16: Фазовый портрет нелинейного седла и его раздутой системы

Седло по линейным членам: доказательство теоремы 8.3.26.

Пусть линейная часть нашего векторного поля $\dot{x} = Ax$ в нуле имеет седло. Тогда в собственном базисе оператора A эта линейная часть примет вид

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \lambda x, \\ \dot{y} &= \mu y\end{aligned}\tag{8.19}$$

где $\lambda < 0 < \mu$, а исходное нелинейное уравнение будет иметь вид

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \lambda x + f, \\ \dot{y} &= \mu y + g,\end{aligned}\tag{8.20}$$

где $\lambda < 0 < \mu$, $(f, g) = o(r)$ при $r \rightarrow 0$.

После раздутия мы получим

$$\begin{aligned}\dot{r} &= r(\lambda \cos^2 \varphi + \mu \sin^2 \varphi) + R_1, \\ \dot{\varphi} &= \frac{1}{2}(\mu - \lambda) \sin 2\varphi + R_2,\end{aligned}\tag{8.21}$$

где $R_1 = o(r)$, $R_2 = O(r)$ при $r \rightarrow 0$, см. рис. 8.16.

Отметим, что множитель при r меняет знак при изменении φ и $\mu - \lambda > 0$. Ограничение раздутой системы на вклеенную окружность имеет вид

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{2}(\mu - \lambda) \sin 2\varphi.\tag{8.22}$$

Это уравнение имеет четыре особые точки $O_k, k = 0, 1, 2, 3$, а именно $\varphi = \frac{\pi k}{2}, k = 0, 1, 2, 3$. При $k = 1, 3$ они устойчивы, при $k = 2, 0$ — неустойчивы. Собственные значения линеаризаций системы (8.21) в особых точках O_k соответственно равны $((\mu - \lambda), \lambda)$ при $k = 2, 0$; $(-(\mu - \lambda), \mu)$ при $k = 1, 3$. В каждой из особых точек собственные значения разных знаков; значит, все четыре точки — седла.

Докажем сначала существование сепаратрис исходного седла, а затем их единственность: мы покажем, что вдоль каждого направления $\frac{\pi k}{2}$ входит только одна сепаратриса. Это докажет утверждение теоремы 8.3.26. Действительно, если фазовая кривая раздутой системы стремится к точке $\varphi = \frac{\pi k}{2}$ на вклеенной окружности,

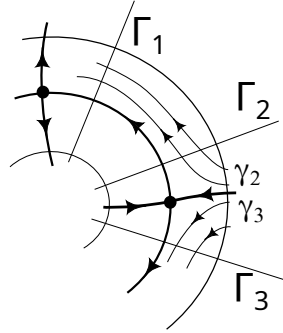


Рис. 8.17: Существование сепаратрис.

это означает, что соответствующая фазовая кривая исходной системы стремится к нулю вдоль луча $\varphi = \frac{\pi k}{2}$.

Существование сепаратрис (см. рис. 8.17). Проведём трансверсали к вклеенной окружности: $\Gamma_1 = \{\varphi = \frac{\pi}{2} - \varepsilon\}$, $\Gamma_2 = \{\varphi = \varepsilon\}$, $\Gamma_3 = \{\varphi = -\varepsilon\}$. Для раздуготого поля φ -компонента близка к правой части уравнения (8.22). Поэтому в секторе между Γ_1 и Γ_2 траектории переходят с Γ_2 на Γ_1 за конечное время. В области между Γ_2 и Γ_3 траектории выходят через Γ_2 и Γ_3 . Они входят в эту область через дугу $\gamma = \{r = r_0, |\varphi| < \varepsilon\}$. Пусть $\gamma_2 \subset \gamma$ (соотв. $\gamma_3 \subset \gamma$) — это множества точек, через которые в нашу область входят траектории, попадающие затем на Γ_2 и Γ_3 соответственно. Оба эти множества открыты. Значит, разность $\gamma' = \gamma \setminus (\gamma_2 \cup \gamma_3)$ непуста: ведь γ нельзя представить в виде двух непересекающихся открытых множеств. Траектории, проходящие через точки множества γ' — это сепаратрисы седла $(0, 0)$.

Единственность сепаратрис Докажем, что сепаратриса, входящая в ноль вдоль направления $\varphi = 0$, на самом деле одна. Это рассуждение не использует раздутие.

Мы покажем, что в исходных координатах в секторе $S_\varepsilon = \{|\varphi| \leq \varepsilon, r \leq x_0\}$ траектории нелинейной системы расходятся примерно так же, как траектории линейной, пока они остаются в секторе S_ε . Отсюда получается, что если в ноль входят две сепаратрисы по направлению $\varphi = 0$, то они должны разойтись на бесконечное расстояние — противоречие.

Запишем систему (8.25) как неавтономное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\mu y + g}{\lambda x + f} := v, \quad (8.23)$$

и пусть графики решений $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ лежат в секторе S_ε над отрезком $x \in [0, x_0]$.

Предложение 8.3.27. *В сделанных предположениях для любого $\delta > 0$ существует сколь угодно малое x_0 такое, что если графики решений $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ лежат в секторе S_ε над отрезком $x \in [x_1, x_0]$, то*

$$|y_2(x_1) - y_1(x_1)| > |y_2(x_0) - y_1(x_0)| \left(\frac{x_0}{x_1}\right)^{\frac{\mu-\delta}{\lambda}} := \xi(x_1). \quad (8.24)$$

Поскольку показатель $\frac{\mu-\delta}{\lambda}$ отрицательный, $\xi(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow 0$. Отсюда следует, что никакие два решения, графики которых лежат в S_ε , не могут быть определены на отрезке $[0, x_0]$, то есть не могут одновременно входить в особую точку. Отсюда следует единственность сепаратрисы, входящей в ноль по направлению $\varphi = 0$. Нам осталось доказать предложение 8.3.27.

Доказательство предложения. Сравним правую часть уравнения (8.23) с функцией $\frac{\mu y}{\lambda x}$:

$$v - \frac{\mu y}{\lambda x} =: \frac{R}{\lambda x}, \quad R = \frac{\lambda g - \mu \frac{fy}{x}}{\lambda + \frac{g}{x}}.$$

Заметим, что в секторе S_ε функция $\frac{y}{x}$ ограничена, а функции $\frac{f}{x}$, $\frac{g}{x}$ и частные производные f_y, g_y стремятся к нулю при $(x, y) \rightarrow 0$. Следующая выкладка показывает, что $R_y \rightarrow 0$ при $(x, y) \rightarrow 0$:

$$R_y = \frac{\lambda g_y - \mu(f_y \frac{y}{x} + \frac{f}{x})(\lambda + \frac{g}{x}) - g_y(\lambda g - \mu \frac{fy}{x})}{(\lambda + \frac{g}{x})^2} \rightarrow 0.$$

Выберем x_0 так, что $|R_y| < \delta$ в секторе S_ε . Теперь мы готовы оценить расхождение решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$. Так как разные фазовые кривые не пересекаются, $y_1(x) - y_2(x) \neq 0$; будем считать $y_1(x) - y_2(x) > 0$. В секторе S_ε

$$\frac{d}{dx}(y_1 - y_2) = \frac{\mu y_1}{\lambda x} - \frac{\mu y_2}{\lambda x} + \frac{R(y_1, x)}{\lambda x} - \frac{R(y_2, x)}{\lambda x} = \frac{\mu(y_1 - y_2)}{\lambda x} + \frac{R_y(\eta, x)(y_1 - y_2)}{\lambda x} \geq \frac{\mu - \delta}{\lambda x}(y_1 - y_2),$$

где $\eta \in [y_1, y_2]$; мы воспользовались теоремой Лагранжа о конечных приращениях и оценкой на R_y . Отсюда

$$\frac{d}{dx}(\ln(y_1 - y_2)) \geq \frac{\mu - \delta}{\lambda x}.$$

Интегрируя это неравенство, получаем

$$\ln(y_1(x_1) - y_2(x_1)) \geq \ln(y_1(x_0) - y_2(x_0)) + \frac{\mu - \delta}{\lambda} \ln \left| \frac{x_1}{x_0} \right|,$$

поэтому

$$y_1(x_1) - y_2(x_1) \geq (y_1(x_0) - y_2(x_0)) \left(\frac{x_1}{x_0} \right)^{\frac{\mu - \delta}{\lambda}}.$$

Предложение доказано; тем самым доказана единственность входящей сепаратрисы для нелинейного седла. \square

Типичный узел

Говорят, что особая точка — типичный узел поля v , если собственные значения линейной части $A = v'(0)$ в этой точке различны и имеют одинаковые знаки.

Без ограничения общности можно считать, что эти собственные значения отрицательны: $\mu < \lambda < 0$. В противном случае мы обратим время. Выберем систему

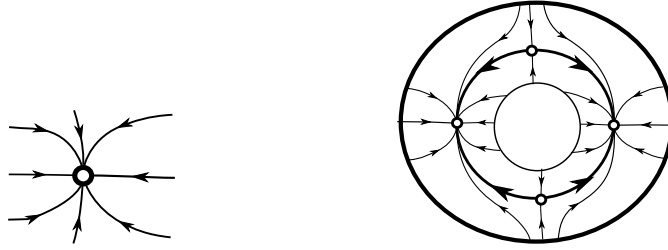


Рис. 8.18: Фазовый портрет нелинейного типичного узла и его раздутой системы (8.21)

координат так, чтобы базисные векторы были собственными векторами оператора A . Система примет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda x + f, \\ \dot{y} = \mu y + g, \end{cases} \quad (8.25)$$

где $\mu < \lambda < 0$, $f = O(r^2)$, $g = O(r^2)$.

Теорема 8.3.28. *В окрестности нуля фазовые кривые уравнения (8.25) стремятся к нулю. При этом две фазовые кривые поля v входят в 0 с противоположных сторон, касаясь оси Oy , а остальные фазовые кривые входят в 0 , касаясь оси Ox . Эта ось называется ведущим направлением.*

Заметим, что именно так ведут себя фазовые кривые линейной части системы (8.25).

Доказательство. Раздутая система для линейного узла имеет вид (8.21). В малой полукрестности $0 < r < r_0$ окружности $r = 0$ имеем $\dot{r} < 0$, поэтому r монотонно убывает с ростом t . Ограничение раздутой системы на вклеенную окружность имеет вид (8.22). Это уравнение имеет 4 особые точки $\varphi = \frac{\pi k}{4}$, $k = 0, 1, 2, 3$; обозначим их O_k . Точки O_0 и O_2 — узлы для раздутой системы, их собственные значения равны $\lambda < 0, \mu - \lambda < 0$; точки O_1 и O_3 — седла: их собственные значения — $\lambda < 0, \lambda - \mu > 0$, см. рис. 8.18. Других особых точек у раздутой системы нет, потому что правая часть первого уравнения равна нулю только при $r = 0$.

По теореме 8.3.26, у каждого из седел O_1 и O_3 есть по две устойчивых сепаратрисы; остальные близкие к ним фазовые кривые покидают малую окрестность этих седел и попадают в области $\{|r| < r_0, -\frac{\pi}{2} + \varepsilon < \varphi < \frac{\pi}{2} - \varepsilon\}$ и $\{|r| < r_0, \frac{\pi}{2} + \varepsilon < \varphi < \frac{3\pi}{2} - \varepsilon\}$ соответственно. Все траектории в этих областях движутся со скоростью, отделенной от нуля, пока не попадают в малые окрестности точек O_0 и O_2 , где притягиваются к этим точкам. Итак, в области $r > 0$ есть две фазовые кривые раздутой системы — сепаратрисы седел O_1 и O_3 , — которые стремятся к точкам O_1 и O_3 ; поэтому две соответствующие фазовые кривые исходной системы входят в 0 по направлениям $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$. Остальные фазовые кривые раздутой системы стремятся к точкам O_2 и O_4 ; поэтому остальные фазовые кривые исходной системы входят в 0 по направлениям $\varphi = 0, \varphi = \pi$. Теорема 8.3.28 для типичного узла доказана. \square

Дикритический узел

Говорят, что особая точка — дикритический узел поля v , если линейная часть поля $A = v'(0)$ в этой точке равна λE , где $\lambda \neq 0$. Система имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \lambda x + f, \\ \dot{y} &= \lambda y + g,\end{aligned}\tag{8.26}$$

где $f(0) = g(0) = 0$; $df(0) = dg(0) = 0$.

Теорема 8.3.29. *В окрестности нуля фазовые кривые уравнения (8.26) стремятся к нулю. По каждому направлению в 0 входит ровно одна фазовая кривая системы.*

Доказательство. Сделав замену времени, будем считать, что $\lambda = -1$. Как указывалось в разделе 8.3.3, соответствующая раздутая система — дикритическая; вся вклеенная окружность состоит из особых точек. Раздутая система имеет вид:

$$\begin{aligned}\dot{r} &= -r + R_1, \\ \dot{\varphi} &= \frac{g \cos \varphi - f \sin \varphi}{r}.\end{aligned}$$

Чтобы исследовать эту систему, нужно избавиться от бесконечного числа особых точек. Разделим обе компоненты этой системы на r ; направление векторов векторного поля от этого не изменится. Получим систему

$$\begin{aligned}\dot{r} &= -1 + R_3, \\ \dot{\varphi} &= \frac{g \cos \varphi - f \sin \varphi}{r^2}.\end{aligned}\tag{8.27}$$

Эту систему мы по-прежнему называем раздутой. Вне вклеенной окружности фазовый портрет не изменился. Так как функции f, g принадлежат классу C^2 и $f(0) = g(0) = 0$, $df(0) = dg(0) = 0$, правая часть раздутой системы — C^1 -гладкая, и теорема существования и единственности решений применима к ней. Вклеенная окружность больше не касается векторного поля раздутой системы и не содержит ни одной особой точки. Поэтому в каждой точке вклеенной окружности ее пересекает ровно одна траектория раздутой системы. Это значит, что в исходной системе по каждому направлению в особую точку 0 входит ровно одна фазовая кривая. Теорема 8.3.29 для дикритического узла доказана. \square

Жорданов узел

Говорят, что особая точка — жорданов узел поля v , если линейная часть поля $A = v'(0)$ в этой точке имеет кратное собственное значение $\lambda \neq 0$, но не равна λE , см. рис. 8.19. Заменой времени добьемся того, чтобы λ равнялось -1 . В жордановом базисе оператора A нелинейная система примет вид

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x + y + f, \\ \dot{y} &= -y + g,\end{aligned}\tag{8.28}$$

где $(f, g) = o(r)$ при $r \rightarrow 0$.

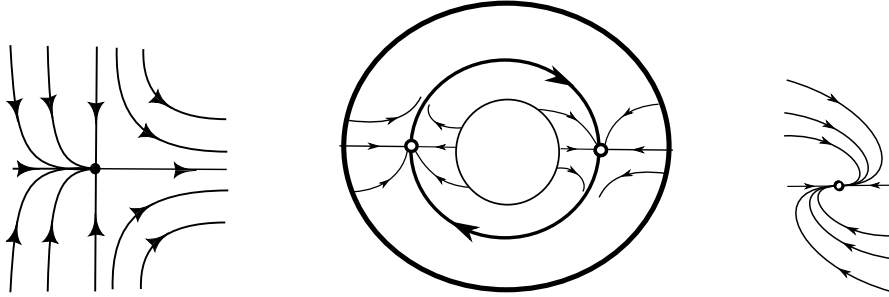


Рис. 8.19: Фазовый портрет стандартного седлоузла, раздутой системы (8.29) и нелинейного жорданова узла

Теорема 8.3.30. *Существуют две фазовые кривые уравнения (8.28), обладающие следующими свойствами. Эти кривые входят в 0 с противоположных сторон, касаясь оси Ox . Их объединение делит окрестность нуля на две части; все фазовые кривые, расположенные в одной части, входят в 0, касаясь положительного луча на Ox , а все фазовые кривые, расположенные в другой части, входят в 0, касаясь отрицательного луча на Ox .*

Раздутая система для такого узла имеет вид:

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= -\sin^2 \varphi + R_1, \\ \dot{r} &= r\left(-1 + \frac{1}{2} \sin 2\varphi\right) + R_2,\end{aligned}\tag{8.29}$$

где $R_1 = O(r)$, $R_2 = o(r)$ при $r \rightarrow 0$. В этом разделе нам будет удобнее писать координату φ первой, а на рисунках мы будем изображать координату φ горизонтальной, а координату r вертикальной.

В малой полукрестности $0 < r < r_0$ окружности $r = 0$ имеем $\dot{r} < 0$; поэтому r монотонно убывает с ростом t . Ограничение раздутой системы на вклеенную окружность имеет вид:

$$\dot{\varphi} = -\sin^2 \varphi.$$

Особые точки этого уравнения — 0 и π . Они негиперболические: соответствующее собственное значение равно нулю. Особые точки $(0, 0)$ и $(\pi, 0)$ раздутой системы на цилиндре — так называемые седлоузлы. Это негиперболические особые точки, поэтому теорема Гробмана-Хартмана к ним неприменима. Можно доказать, что фазовые портреты системы (8.29) в окрестности седлоузлов топологически эквивалентны следующему полю в окрестности нуля:

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= -\varphi^2 \\ \dot{r} &= -r\end{aligned}$$

Фазовый портрет этой системы, а также системы (8.29) показан на рис. 8.19. Рисунок 8.19 подсказывает, что поведение раздутой системы в кольце $U_{r_0} = \{(r, \varphi) \mid 0 < r < r_0\}$ описывается следующим образом.

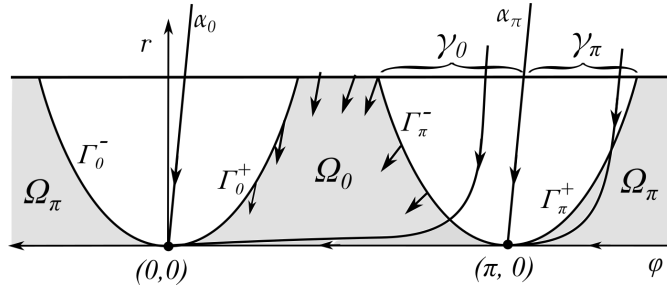


Рис. 8.20: Фазовый портрет раздутой системы (8.29) и доказательство предложения 8.3.31

Предложение 8.3.31. Для достаточно малого $r_0 > 0$, раздутая система (8.29) имеет две фазовые кривые α_0, α_π (сепаратрисы), которые делят кольцо U_{r_0} на два открытых множества U^0, U^π , причем при $t \rightarrow +\infty$ фазовая кривая α_0 и все фазовые кривые, начинающиеся в U^0 , входят в особую точку $(0, 0)$, а фазовая кривая α_π и все фазовые кривые, начинающиеся в U^π , входят в особую точку $(\pi, 0)$.

Отсюда следует утверждение теоремы 8.3.30: проекции сепаратрис α_0, α_π на плоскость $(x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ отделяют фазовые кривые, входящие в 0 по направлению $\varphi = 0$, от кривых, входящих в 0 по направлению $\varphi = \pi$.

Доказательство. Мы докажем это предложение, не используя приведенного выше описания фазового портрета седлоузла. Напомним, что $R_1(r, \varphi) = O(r)$ при $r \rightarrow 0$. Выберем C таким образом, что $|R_1(r, \varphi)| < Cr$ в окрестности $r = 0$, и выберем A , такое что $0 < A < 1/(4C)$.

Построим в окрестности окружности $r = 0$ области, из которых фазовые кривые раздутой системы не могут выйти — *поглощающие области*. Это, во-первых, само кольцо U_{r_0} , где $r_0 > 0$ мало. Во-вторых, в окрестности точек $(0, 0)$ и $(\pi, 0)$ рассмотрим кривые Γ_0 и Γ_π :

$$\Gamma_0 = \{(\varphi, r) \mid r \in [0, r_0], r = A\varphi^2\}$$

$$\Gamma_\pi = \{(\varphi, r) \mid r \in [0, r_0], r = A(\pi - \varphi)^2\}$$

Пусть Γ_0^+ и Γ_0^- — левая и правая ветвь параболы Γ_0 :

$$\Gamma_0^+ = \{(\varphi, r) \in \Gamma_0, \varphi > 0\}, \quad \Gamma_0^- = \{(\varphi, r) \in \Gamma_0, \varphi < 0\},$$

Аналогично определяются Γ_π^\pm . Докажем, что область Ω_0 кольца $r \in [0, r_0]$ между кривыми Γ_0^+ и Γ_π^- и область Ω_π кольца $r \in [0, r_0]$ между кривыми Γ_π^+ и Γ_0^- (заштрихованы на рис. (8.20)) являются поглощающими.

Через кривую $r = r_0$ фазовые кривые поля (8.29) входят в кольцо U_{r_0} , а значит — в области Ω_0, Ω_π ; кривая $r = 0$ инвариантна. Остается доказать, что поле (8.29) направлено вниз относительно кривых Γ_0 и Γ_π , то есть вектор поля в каждой точке кривой Γ_0 (соотв. Γ_π) лежит ниже касательной к этой кривой.

В точке $(\varphi, A\varphi^2)$ кривой Γ_0 поле (8.29) имеет вид $(O(\varphi^2), -A\varphi^2 + o(\varphi^2))$; касательный вектор к Γ_0 имеет вид $(1, 2A\varphi)$. Имеем

$$\left| \begin{array}{cc} O(\varphi^2) & -A\varphi^2 + o(\varphi^2) \\ 1 & 2A\varphi \end{array} \right| = A\varphi^2 + o(\varphi^2) > 0.$$

при малых φ . Мы считаем r_0 столь малым, что это соотношение выполняется на всей кривой Γ_0 . Итак, вращение от вектора поля к касательному вектору кривой Γ_0 происходит против часовой стрелки, то есть вектор поля лежит ниже касательной. Для Γ_π доказательство аналогично. Значит, области Ω_0, Ω_π поглощающие.

Теперь докажем, что для достаточно малого r_0 внутри области Ω_0 имеем $\dot{\varphi} < 0$. Действительно, если $0 < \varphi \leq \pi/2$, верна оценка $\sin \varphi > \varphi/2$, и так как $|R_1(r, \varphi)| < Cr < AC\varphi^2$, имеем $\dot{\varphi} = -\sin^2 \varphi + Cr < (-1/4 + AC)\varphi^2 < 0$ в силу выбора A . Если же $\pi/2 < \varphi < \pi$, то $\sin \varphi > (\pi - \varphi)/2$ и $|R_1(r, \varphi)| < Cr < AC(\pi - \varphi)^2$, откуда снова $\dot{\varphi} = -\sin^2 \varphi + Cr < (-1/4 + AC)(\pi - \varphi)^2 < 0$. Поэтому все фазовые кривые внутри Ω_0 движутся влево. Кроме того, $\dot{r} < 0$ внутри Ω_0 , поэтому все они движутся вниз. Значит, все фазовые кривые с началом в Ω_0 стремятся к точке $(0, 0)$. Аналогичным образом получаем, что все фазовые кривые из Ω_π стремятся к точке $(\pi, 0)$.

Осталось распространить это описание на все кольцо U_{r_0} . Рассмотрим дугу γ на окружности $r = r_0$ между ветвями параболы Γ_π : $\gamma = \{(r_0, \varphi) \mid |\pi - \varphi| \leq \sqrt{r_0}/A\}$. Так как вдоль каждой фазовой кривой, которая начинается на γ , величина r убывает, каждая фазовая кривая или пересекает одну из кривых $\Gamma_\pi^\pm \setminus \{(\pi, 0)\}$ (тогда она заходит в Ω_0 или в Ω_π соответственно и потому стремится к $(0, 0)$ или $(\pi, 0)$), или стремится к $(\pi, 0)$, оставаясь выше кривой Γ_π . Пусть γ_0 и $\gamma_\pi \subset \gamma$ — два подмножества, выходя из которых, траектории входят в $(0, 0)$ и $(\pi, 0)$ соответственно; тогда $\gamma = \gamma_0 \cup \gamma_\pi$, дуга γ_0 содержит левый конец γ , а дуга γ_π — правый. Множество γ_0 открыто в γ , так как это множество точек, выходя из которых, фазовые кривые пересекают открытую дугу $\Gamma_\pi^- \setminus \{(\pi, 0)\}$. Возьмем самую левую точку $(\varphi^*, r_0) \in \gamma_\pi$ — она существует, так как $\gamma \setminus \gamma_\pi = \gamma_0$ открыто и непусто. Пусть α_π — фазовая кривая, выходящая из (φ^*, r_0) . По построению, она сама входит в $(\pi, 0)$, а траектории, начинающиеся левее нее на γ , входят в $(0, 0)$. Траектории, которые начинаются правее α_π , не могут пересечь α_π , а значит — не могут стремиться к $(0, 0)$. Значит, они входят в $(\pi, 0)$.

Аналогичным образом построим фазовую кривую α_0 — мы получим, что она разделяет траектории, стремящиеся к $(0, 0)$ и $(\pi, 0)$ и начинающиеся между ветвями параболы Γ_0 . Значит, кривые α_0 и α_π удовлетворяют требованиям предложения 8.3.31.

□

8.3.4 Вырожденные особые точки

Метод разрешения особенностей, простейший вариант которого мы здесь применили, является мощным орудием в исследовании особых точек векторных полей на плоскости. Он позволяет, в частности, дать полную топологическую классификацию фазовых портретов аналитических векторных полей в окрестности особой точ-

ки при условии, что хотя бы одна фазовая кривая входит в эту точку с определенной касательной. Доказательство этого результата можно найти в книге ⁹.

Теорема 8.3.32. Пусть аналитическое векторное поле имеет изолированную особую точку в нуле. Пусть хотя бы одна фазовая кривая входит в 0 и имеет касательную в нуле.

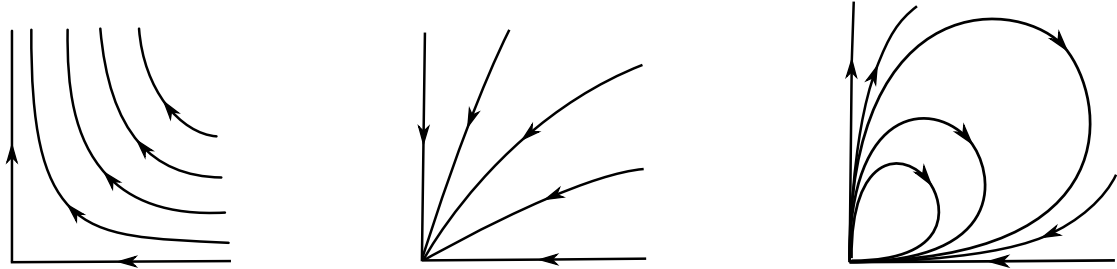


Рис. 8.21: Гиперболический, параболический и эллиптический сектор

Тогда окрестность особой точки представляется в виде объединения секторов трех видов:

- Гиперболический сектор, в котором поле орбитально топологически эквивалентно полю $\dot{x} = x, \dot{y} = -y$ в секторе $x > 0, y > 0$. Границы сектора — две сепаратрисы, гладкие в нуле.
- Параболический сектор (отталкивающий или притягивающий), в котором поле орбитально топологически эквивалентно полю $\dot{x} = x, \dot{y} = y$ (или $\dot{x} = -x, \dot{y} = -y$) в секторе $x > 0, y > 0$.
- Эллиптический сектор, в котором поле орбитально топологически эквивалентно полю $\dot{z} = z^2$ на полуплоскости $\text{Im } z > 0$ комплексной плоскости (в вещественных координатах такое поле имеет вид $\dot{x} = x^2 - y^2, \dot{y} = 2xy$).

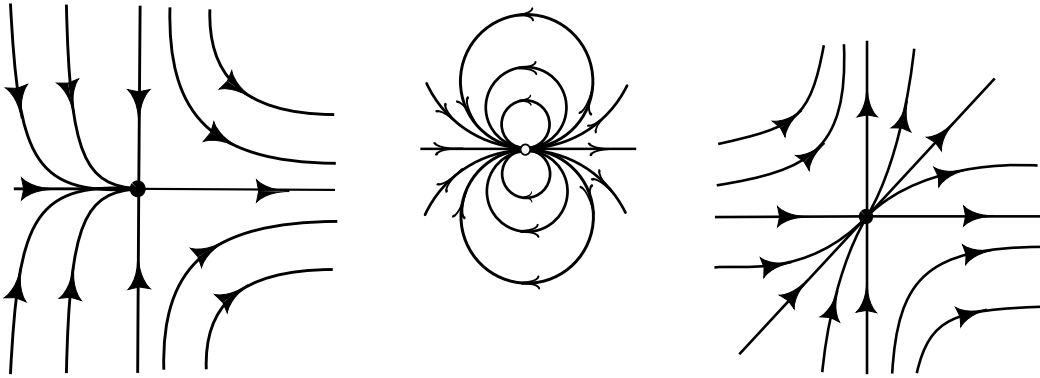
Это очень сильный результат: он описывает фазовый портрет особой точки векторного поля, в Тейлоровском разложении которого все члены хоть до тысячной степени равны нулю!

Некоторые примеры вырожденных особых точек изображены на рис. 8.22.

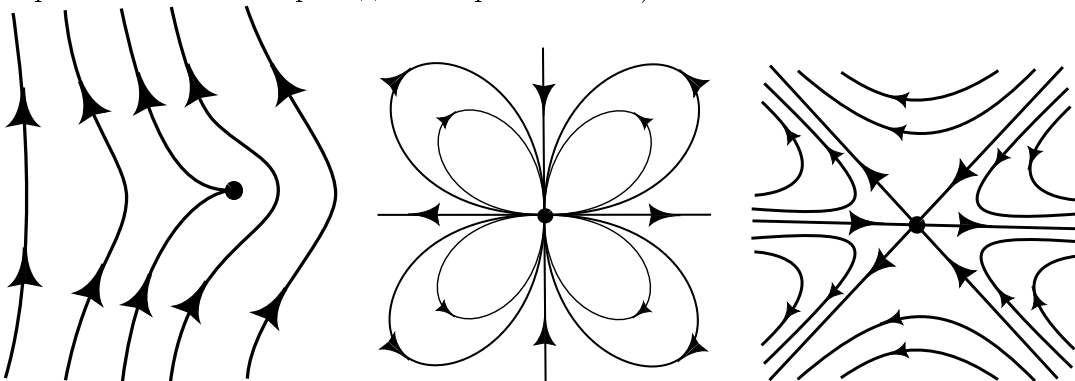
8.3.5 Доказательство теоремы Гробмана-Хартмана для отображений

Как и в теории устойчивости по Ляпунову, теорема Гробмана-Хартмана для векторных полей выводится из теоремы для отображений; поэтому сначала мы докажем теорему для отображений.

⁹F. Dumortier, J. Llibre, J. C. Artés, Qualitative Theory of Planar Differential Systems.



Особые точки полей $x' = x^2, y' = -y$ (седлоузел, два гиперболических сектора и один параболический), $z' = z^2$ (два эллиптических сектора) и $x' = x^2, y' = y^2$ (два параболических сектора и два гиперболических).



Особые точки полей $x' = -y, y' = x^2 + xy$ (два гиперболических сектора), $z' = z^3$ (четыре эллиптических сектора) и $z' = \bar{z}^2$ (шесть гиперболических секторов).

Рис. 8.22: Некоторые вырожденные особые точки

Глобализация

Напомним формулировку теоремы 8.3.10 раздела 8.3.1.

Теорема (Теорема Гробмана-Хартмана для отображений). *В окрестности гиперболической неподвижной точки диффеоморфизм топологически эквивалентен своей линейной части (то есть своему дифференциалу в неподвижной точке).*

Мы сведем эту теорему к глобальной.

Определение 8.3.33. Два отображения F и G топологически эквивалентны в \mathbb{R}^n , если существует гомеоморфизм $H: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, который сопрягает отображения F и G :

$$G \circ H = H \circ F \quad (8.30)$$

в пространстве \mathbb{R}^n .

Теорема 8.3.34. [Теорема Гробмана-Хартмана для отображений в \mathbb{R}^n] Пусть A — гиперболический линейный оператор. Тогда существует такая константа ε , зависящая от A , что для любого C^1 -гладкого отображения $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, для которого

$$\text{Lip } f < \varepsilon, f(0) = 0, \quad (8.31)$$

отображение $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$F(x) = Ax + f(x),$$

задаёт диффеоморфизм, топологически эквивалентный A во всем пространстве \mathbb{R}^n .

Ниже мы докажем глобальную теорему, а сейчас выведем из нее теорему 8.3.10. Это делается с помощью приема, называемого *глобализацией*. Отображение f — разность между отображением F и его линейной частью — называется *невязкой*. Невязка определена лишь в окрестности нуля. Мы умножим ее на гладкую срезающую функцию φ , тождественно равную единице в некоторой окрестности нуля и нулю вне некоторой другой окрестности (принадлежащей области определения f). Тогда произведение φf определено во всем \mathbb{R}^n , совпадает с f в некоторой окрестности нуля U_1 и равно нулю вне некоторой другой окрестности нуля U_2 . Отображение

$$G = A + \varphi f$$

совпадает с F в U_1 , и с A вне U_2 . Нужно только выбрать φ так, чтобы произведение φf удовлетворяло неравенству (8.31). Для этого воспользуемся тем, что $f \in C^1$ и $f(0) = 0, df(0) = 0$.

Рассмотрим на положительной полуоси \mathbb{R}^+ C^1 -гладкую функцию $\psi: \mathbb{R}^+ \rightarrow [0, 1]$, тождественно равную 1 на $[0, 1]$ и нулю вне $[0, 2]$. Функцию ψ можно выбрать так, что всюду на \mathbb{R}^+ выполнено $|\psi'| < 2$. Положим:

$$\varphi_k(x) = \psi(k|x|), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Эти функции отличны от нуля во все меньших и меньших окрестностях нуля.

8.3.5. Доказательство теоремы Гробмана-Хартмана для отображений

Предложение 8.3.35. Для любого отображения $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, заданного в окрестности нуля и такого, что

$$f(0) = 0, df(0) = 0$$

выполнено утверждение

$$\text{Lip}(f\varphi_k) \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty.$$

Это предложение доказано ниже. Выведем с его помощью теорему 8.3.10 из 8.3.34. Выберем k так, что произведение $f\varphi_k$ определено всюду на \mathbb{R}^n и

$$\text{Lip}(f\varphi_k) < \varepsilon$$

где ε — константа из теоремы 8.3.34. Тогда отображение $G = \text{id} + f\varphi_k$ совпадает с F в некоторой окрестности нуля и топологически эквивалентно своей линейной части по теореме 8.3.34. Значит, F топологически эквивалентно своей линейной части в некоторой окрестности нуля. Теорема 8.3.10 доказана.

Доказательство предложения 8.3.35. Произведение $f\varphi_k$ тождественно равно нулю при $|x| > \frac{2}{k}$; при достаточно большом k оно определено на всем пространстве \mathbb{R}^n . Нам нужно оценить

$$\text{Lip}(f\varphi_k) \leq \max_{\mathbb{R}^n} \|d(f\varphi_k)\|.$$

Но этот дифференциал равен

$$d(f\varphi_k) = \varphi_k df + f \text{grad } \varphi_k,$$

где под $\text{grad } \varphi_k$ мы подразумеваем линейный функционал $v \mapsto (\text{grad } \varphi_k, v)$, двойственный к $\text{grad } \varphi_k$ (и совпадающий с $d\varphi_k$). Оценим первое слагаемое:

$$\max_{\mathbb{R}^n} \|\varphi_k df\| = \max_{|x| < \frac{2}{k}} |df(x)| \rightarrow 0$$

при $k \rightarrow \infty$, поскольку $df(0) = 0$, и df непрерывен. Теперь оценим второе слагаемое. Заметим, что поскольку $f(0) = 0$, $df(0) = 0$, мы имеем $f(x) = o(x)$. В частности,

$$\max_{|x| < \frac{1}{2k}} |f(x)| = o\left(\frac{1}{k}\right).$$

С другой стороны,

$$|\text{grad } \varphi_k(x)| = k\psi'(k|x|) \leq 2k.$$

Поэтому мы можем оценить и второе слагаемое:

$$\|f(x) \text{grad } \varphi_k(x)\| \leq \max_{|x| < \frac{2}{k}} |f(x)| \cdot 2k \rightarrow 0$$

при $k \rightarrow \infty$. □

Нам осталось доказать теорему 8.3.34.

Функциональное и гомологическое уравнение.

Сопрягающий гомеоморфизм H в теореме 8.3.34 будем искать как сумму тождественного отображения и малой в пространстве $C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ поправки $h : H = id + h$, $h(0) = 0$. Подставим в уравнение $F \circ H = H \circ A$ это выражение для H и выражение $A + f$ для F . Получим:

$$(A + f) \circ (id + h) = (id + h) \circ A.$$

Отсюда

$$A + Ah + f \circ (id + h) = A + h \circ A.$$

Первые члены сокращаются. Получаем

$$h \circ A - Ah = f \circ (id + h). \quad (8.32)$$

Это и есть основное для дальнейшего *функциональное уравнение*, которое мы и будем решать. Заменим его сначала более простым *гомологическим уравнением*

$$h \circ A - Ah = f, \quad (8.33)$$

линейным относительно неизвестного отображения h . Мы сначала решим гомологическое уравнение, а затем, с его помощью, решим и функциональное.

Решение гомологического уравнения

Удивительным образом, гомологическое уравнение решается явно. Рассмотрим сначала гиперболический линейный оператор $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Пусть у него s собственных значений внутри единичной окружности и u собственных значений вне её. Как мы уже делали выше, разобьем пространство в прямую сумму устойчивого и неустойчивого собственных подпространств: $\mathbb{R}^n = T^s \oplus T^u$, так что собственные значения оператора $\Lambda := A|_{T^s}$ находятся внутри единичной окружности, а собственные значения оператора $M := A|_{T^u}$ находятся вне единичной окружности. Положим $\lambda = \|\Lambda\|$ и $\mu = \|M^{-1}\|$, тогда $\lambda, \mu < 1$.

Оператор A является прямой суммой операторов Λ и M ; поэтому в базисе, s элементов которого лежат в T^s , а u элементов — в T^u , оператор A задается блочно-диагональной матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} \Lambda & \\ & M \end{pmatrix}.$$

(мы обозначаем оператор и его матрицу одной и той же буквой).

Пусть $\pi^s : \mathbb{R}^n \rightarrow T^s$, $\pi^u : \mathbb{R}^n \rightarrow T^u$ — операторы проектирования вдоль T^u и T^s соответственно. Любой вектор $\xi \in \mathbb{R}^n$ разлагается на две компоненты:

$$\xi = (\xi^s, \xi^u), \quad \xi^s = \pi^s \xi \in T^s, \quad \xi^u = \pi^u \xi \in T^u.$$

Соответственно, оба отображения \mathbb{R}^n в себя — и заданное отображение f , и искомое отображение h — мы будем разлагать на две компоненты:

$$f = (f^s, f^u), \quad h = (h^s, h^u);$$

8.3.5. Доказательство теоремы Гробмана-Хартмана для отображений

здесь $f^{u,s}: \mathbb{R}^n \rightarrow T^{u,s}$, $h^{u,s}: \mathbb{R}^n \rightarrow T^{u,s}$ являются элементами пространств $C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{s,u})$ непрерывных отображений \mathbb{R}^n в $\mathbb{R}^{s,u}$.

Гомологическое уравнение (8.33) распадается на две компоненты:

$$h^s \circ A - \Lambda h^s = f^s \quad (8.34)$$

$$h^u \circ A - Mh^u = f^u. \quad (8.35)$$

Начнем с уравнения (8.34). Его можно переписать как задачу о неподвижной точке:

$$h^s = f^s \circ A^{-1} + \Lambda h^s A^{-1} = g + Sh^s = \mathcal{L}h^s,$$

где $g = f^s \circ A^{-1}$, а операторы $Sh = \Lambda \circ h \circ A^{-1}$ и $\mathcal{L}h = g + Sh$ — линейные операторы из пространства $C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^s)$ в себя. Мы увидим, что оператор S (а значит, и \mathcal{L}) — сжимающий относительно нормы $\|\varphi\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\varphi(x)|$. Пространство $C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^s)$ полно относительно этой нормы (этот факт доказывается так же, как полнота пространства $C([a, b])$, см. предложение 7.1.5 раздела 7.1.3). Это позволит применить принцип сжимающих отображений.

Лемма 8.3.36. *Оператор S сжимает на пространстве $C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^s)$: для любого отображения $\varphi^s \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^s)$,*

$$\|S\varphi^s\| \leq \lambda \cdot \|\varphi^s\|. \quad (8.36)$$

Доказательство. Действительно, для любого $x \in \mathbb{R}^n$

$$|(S\varphi^s)(x)| = |\Lambda\varphi^s(A^{-1}x)| \leq \lambda \sup_{\mathbb{R}^n} |\varphi^s(x)| = \lambda \cdot \|\varphi^s\|,$$

поэтому неравенство 8.36 выполнено. \square

Оператор \mathcal{L} отличается от S только сдвигом, а потому тоже сжимает. В силу принципа сжимающих отображений (см. теорему 7.1.7 раздела 7.1.2), оператор \mathcal{L} имеет единственную неподвижную точку, то есть решение h^s уравнения (8.34) существует и единственно. Но мы хотим не только доказать существование этого решения, но и оценить его норму. Мы сделаем это, пользуясь тем, что неподвижная точка сжимающего отображения \mathcal{L} строится явным образом — как предел последовательных итераций $f, \mathcal{L}f, \mathcal{L}^2f, \dots$ для любой начальной точки f .

Последовательность таких приближений для оператора \mathcal{L} , начинающаяся с нуля, — это

$$0, g, (E + S)g, (E + S + S^2)g, \dots, (E + S + \dots + S^k)g, \dots$$

Отсюда

$$h^s = \sum_{k=0}^{\infty} S^k g = \sum_{k=0}^{\infty} S^k (f^s A^{-1}).$$

Положим $L_s \varphi = \sum_{k=0}^{\infty} S^k(\varphi A^{-1})$; это линейный оператор $L_s : C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^s) \rightarrow C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^s)$. Отметим, что $\|\varphi A^{-1}\| = \|\varphi\|$, так как сдвиг аргумента не меняет C -нормы, и $\|S\| \leq \lambda$ в силу леммы 8.3.36. Поэтому

$$\|L^s \varphi\| = \left| \sum_{k=0}^{\infty} S^k(\varphi A^{-1}) \right| \leq \|\varphi\| \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k = \|\varphi\| \frac{1}{1-\lambda} :$$

норма L^s не превосходит $\frac{1}{1-\lambda}$. Кроме того, если $\varphi(0) = 0$, то $L^s(\varphi)(0) = 0$, как видно из определения L^s .

Итак, мы решили уравнение (8.34): мы построили ограниченный оператор L^s , для которого

$$h^s = L^s(f^s).$$

Аналогично решается уравнение (8.35). Оно представляется в виде

$$h_u = M^{-1}h^u \circ A - M^{-1}f^u = Uh^u - M^{-1}f^u, \text{ где } U\varphi = M^{-1}\varphi \circ A.$$

Как и раньше, оператор U сжимает, $\|U\| \leq \mu$, и потому решение имеет вид

$$h_u = L^u(f^u),$$

где

$$L^u \varphi = \sum_{k=0}^{\infty} U^k(-M^{-1}\varphi),$$

и $\|L^u\| \leq \frac{1}{1-\mu}$. В этом случае тоже, если $\varphi(0) = 0$, то $(L^u \varphi)(0) = 0$.

Мы решили гомологическое уравнение (8.33):

$$h = (h^s, h^u) = (L^s(f^s), L^u(f^u)) := Lf.$$

Оператор $Lf : C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \rightarrow C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ линеен. Если норму в пространстве $C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ определить как $\|(f^u, f^s)\| = \max(\|f^u\|, \|f^s\|)$, то норма оператора L будет оцениваться следующим образом:

$$\|L\| \leq \max\left(\frac{1}{1-\mu}, \frac{1}{1-\lambda}\right). \quad (8.37)$$

Кроме того, если $f(0) = 0$, то $Lf(0) = 0$.

Решение функционального уравнения

Напомним, что условие $H \circ A = F \circ H$ на сопрягающий гомеоморфизм $H, H = id + h$, равносильно функциональному уравнению

$$h \circ A - Ah = f \circ (id + h).$$

Поэтому h — решение гомологического уравнения с правой частью $f \circ (id + h)$. Значит,

$$h = L(f \circ (id + h)).$$

8.3.5. Доказательство теоремы Гробмана-Хартмана для отображений

Это еще не явная формула для h ; эта формула означает, что h является неподвижной точкой оператора $h \mapsto L(f \circ (id+h))$. Обозначим через Φ оператор “сдвига аргумента”:

$$\Phi: C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \rightarrow C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), \quad \Phi: h \mapsto f \circ (id + h).$$

Уравнение на h можно теперь переписать в виде

$$h = L \circ \Phi(h).$$

Мы докажем, что решение существует, с помощью принципа сжимающих отображений (см. теорему 7.1.7 раздела 7.1.2) в подходящем пространстве.

Рассмотрим пространство $C_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ ограниченных непрерывных отображений \mathbb{R}^n в себя, сохраняющих 0, с метрикой $d(\varphi, \psi) = \max |\varphi(x) - \psi(x)|$. Пространство $C_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ полно как замкнутое подмножество полного пространства $C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

Отметим, что если $h(0) = 0$, то $(\Phi h)(0) = 0$. Оператор $L\Phi$, тем самым, переводит пространство $C_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ в себя. Докажем, что если f имеет достаточно малую константу Липшица, то этот оператор сжимает в полном метрическом пространстве $C_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Оценим константу Липшица оператора Φ :

$$\|\Phi h_1 - \Phi h_2\| = \|f \circ (id + h_1) - f \circ (id + h_2)\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x + h_1(x)) - f(x + h_2(x))| \leq$$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} (\text{Lip } f) |h_1(x) - h_2(x)| = \text{Lip } f \cdot \|h_1 - h_2\|.$$

Итак, $\text{Lip } \Phi \leq \text{Lip } f$. Поэтому если $\text{Lip } f \cdot \|L\| < 1$, то оператор $L\Phi$ сжимающий и к нему применим принцип сжимающих отображений.

Итак, при условии $\text{Lip } f \cdot \|L\| < 1$ функциональное уравнение (8.32) имеет решение $H = id + h$, $h \in C_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

В силу (8.37), условие $\text{Lip } f \cdot \|L\| < 1$ выполнено, если

$$\text{Lip } f < \min(1 - \|M^{-1}\|, 1 - \|\Lambda\|). \quad (8.38)$$

Осталось доказать, что H — гомеоморфизм; достаточно доказать, что H — биекция. Мы сделаем это в двух следующих разделах, пользуясь только тем, что $H = id + h$ сопрягает A и F и $h \in C_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

Одновременно мы докажем такое усиление теоремы 8.3.34:

Теорема 8.3.37. *Заключение теоремы Гробмана-Хартмана для отображений (теорема 8.3.34) выполнено, если $\text{Lip } f$ удовлетворяет неравенству (8.38).*

Мономорфность отображения H .

Лемма 8.3.38. *Отображение $H: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, удовлетворяющее уравнению (8.6) с гиперболическим оператором A — мономорфизм.*

Доказательство. Предположим, что H “склеивает” точки x и y : $x \neq y$, $H(x) = H(y)$. Докажем, что тогда H “склеивает” полные орбиты точек x и y под действием отображения A . Действительно, из равенства

$$F \circ H = H \circ A$$

индукцией по k можно получить, что

$$F^k \circ H = H \circ A^k$$

Поэтому

$$H(A^k x) = F^k(H(x)), \quad H(A^k y) = F^k(H(y))$$

Эти выражения равны, так как $H(x) = H(y)$. Итак, $H(A^k x) = H(A^k y)$ для любого k .

Но отображение H отличается от тождественного на ограниченную поправку $h \in C_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Между тем, орбиты разных точек под действием оператора A расходятся неограниченно. Действительно, если $x = (x^s, x^u)$, $y = (y^s, y^u)$ и $x^u \neq y^u$, то орбиты точек расходятся в будущем:

$$|A^k x - A^k y| \geq |M^k x^u - M^k y^u| \rightarrow \infty \text{ при } k \rightarrow +\infty.$$

Если же для двух различных точек $x^u = y^u$, то $x^s \neq y^s$, и орбиты расходятся в прошлом:

$$|A^k x - A^k y| = |\Lambda^k x^s - \Lambda^k y^s| \rightarrow \infty \text{ при } k \rightarrow -\infty.$$

Итак, при $x \neq y$, $\sup_{k \in \mathbb{Z}} |A^k x - A^k y| = \infty$.

С другой стороны, из $H(A^k x) = H(A^k y)$, применяя равенство $H = id + h$, получим, что

$$|A^k x - A^k y| = |h(A^k x) - h(A^k y)|.$$

Правая часть ограничена по $k \in \mathbb{Z}$, поскольку h ограничено, а левая часть неограниченна. Противоречие показывает, что H — мономорфизм. \square

Эпиморфность H .

Эпиморфность отображения H следует из леммы:

Лемма 8.3.39. *Непрерывное отображение $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ с ограниченной поправкой $h = H - id$ — эпиморфизм.*

Напомним, что найденное выше решение $H = id + h$ функционального уравнения (8.6) непрерывно и имеет ограниченную поправку $h \in C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

Лемма (8.3.39) является чисто топологическим фактом. Она следует из более общего утверждения.

8.3.5. Доказательство теоремы Гробмана-Хартмана для отображений

Лемма 8.3.40. Пусть v_0 — непрерывное векторное поле на шаре с центром a и границей S . Пусть $v_1(x) = a - x$ — векторное поле на этом шаре, направленное к a . Определим семейство векторных полей следующим образом:

$$v_t = tv_1 + (1 - t)v_0.$$

Пусть ни одно из полей v_t не имеет особой точки на сфере S , то есть не обращается в 0 на ней. Тогда все поля v_t , в том числе v_0 , имеют особую точку внутри шара.

Эта лемма является следствием теории индекса или теории степени отображения, которую можно найти во многих учебниках по топологии [?]. Мы наметим её доказательство лишь в двумерном случае; полное доказательство выходит за рамки нашего учебника.

Пусть B — круг на плоскости, S — его граница. Нам понадобится следующее определение, которое мы не будем полностью формализовывать.

Определение 8.3.41. Индекс векторного поля на плоскости вдоль замкнутой кривой — это количество оборотов, которое вектор поля делает при обходе вдоль этой кривой.

Индекс определен, если векторное поле на кривой не обращается в ноль.

Видно, что поле $v_1 = a - x$ вдоль окружности S имеет индекс 1. Векторные поля v_t не имеют особых точек на окружности и непрерывно зависят от t , поэтому их индекс вдоль S тоже непрерывно зависит от t . Поскольку индекс — целое число, он равен 1 для всех полей v_t . Лемма следует из такого утверждения:

Предложение 8.3.42. Если векторное поле имеет ненулевой индекс вдоль окружности, то оно имеет особую точку внутри окружности.

Набросок доказательства. Предположим противное. Будем уменьшать окружность, стягивая её в точку. Индекс при этом будет меняться непрерывно, ведь окружности не будут проходить через особые точки поля; поскольку индекс — целое число, он не будет меняться вовсе. Но индекс вдоль кривой, которая стянулась в точку, равен нулю. Значит, и вдоль исходной окружности индекс должен был быть равен нулю. Противоречие.

В многомерном случае доказательство аналогично, но дать определение индекса сложнее, см. [?].

Доказательство леммы 8.3.39. Лемма 8.3.39 легко выводится из леммы 8.3.40. Пусть H — отображение с ограниченной поправкой; докажем, что для любого $a \in \mathbb{R}^n$ существует точка x , для которой $H(x) = a$.

Пусть $H = id + h$. Пусть B — шар с центром a и радиусом $r = \|h\| + 1$. Рассмотрим векторное поле

$$v_0(x) = a - H(x) = a - x - h(x).$$

Определим v_t как в лемме 8.3.40. Тогда поле $v_t = (1-t)v_0 + t(a-x) = a-x + th(x)$ не обращается в ноль на границе шара B , так как там $|a-x| = \|h\| + 1 \geq |th(x)|$. Поэтому лемма 8.3.40 применима, и поле v_0 имеет хотя бы одну особую точку x в шаре B . В этой точке $H(x) - a = 0$, то есть $a = H(x)$, что и требовалось. \square

Теорема Гробмана-Хартмана для отображений доказана.

8.3.6 Доказательство теоремы Гробмана-Хартмана для векторных полей.

Докажем теорему 8.3.6. Она выводится из теоремы 8.3.34 с помощью перехода от векторного поля к преобразованию фазового потока. В этом переходе есть много общего с переходом от теоремы Ляпунова об устойчивости для отображений к аналогичной теореме для векторных полей.

Шаг 1: Глобализация. Вместо теоремы 8.3.6 мы докажем теорему 8.3.43.

Теорема 8.3.43. Пусть

$$v(x) = Ax + f(x) \quad (8.39)$$

— C^2 -гладкое векторное поле с гиперболической особой точкой 0 , заданное во всем пространстве \mathbb{R}^n . Пусть $f(0) = 0$. Тогда существует такое ε , зависящее от A , что если $\text{Lip } f < \varepsilon$, то поле v топологически эквивалентно полю Ax во всем пространстве \mathbb{R}^n .

Теорема 8.3.6 выводится из теоремы 8.3.43 так же, как в случае отображений: надо умножить невязку исходного векторного поля на подходящую срезающую функцию.

Шаг 2: гиперболичность потока за время 1. Рассмотрим преобразование потока поля v за единичное время:

$$G = g_v^1.$$

Отображение G определено во всем пространстве \mathbb{R}^n и имеет линейную часть

$$dG(0) = e^A =: B.$$

Собственные значения ν_j оператора B — экспоненты собственных значений λ_j оператора A :

$$\nu_j = e^{\lambda_j}.$$

Поэтому из гиперболичности линейного векторного поля Ax (условие $\text{Re } \lambda_j \neq 0$) следует гиперболичность линейного отображения Bx (условие $|\nu_j| \neq 1$).

Шаг 3: применение теоремы Гробмана-Хартмана для отображения потока за время 1. Пусть g — невязка отображения G :

$$G(x) = Bx + g(x).$$

Чтобы применить теорему Гробмана-Хартмана для $G = g_v^1$, нужно добиться выполнения условия

$$\text{Lip } g < \varepsilon$$

8.3.6. Доказательство теоремы Гробмана-Хартмана для векторных полей.

для достаточно малого ε . Лемма 8.3.44 (см. ниже) показывает, что это условие следует из неравенства

$$\text{Lip } f < \delta$$

для достаточно малого δ . Значит, теорема 8.3.43 применима для отображения G и существует гомеоморфизм H , сопрягающий G и B :

$$G \circ H = H \circ B,$$

то есть

$$g_v^1 \circ H = H \circ e^A. \quad (8.40)$$

Шаг 4: теорема Гробмана-Хартмана для отображений потока за время t . Докажем, что отображения $g_v^t, t \in [0, 1]$, тоже удовлетворяют условию теоремы 8.3.43.

Это следует из оценки, на которую мы уже ссылались в шаге 3:

Лемма 8.3.44. [О невязке фазового потока] Если невязка f векторного поля (8.39) достаточно мала в C^1 , то для всех $t \in [0, 1]$ преобразование фазового потока поля v за время t имеет вид

$$g_v^t(x) = e^{At}x + k_t(x), \quad (8.41)$$

где

$$\text{Lip } k_t < ct \text{Lip } f.$$

Константа c зависит только от A .

Доказательство леммы мы приведем в следующем разделе.

Пусть $A = \begin{pmatrix} \Lambda & \\ & M \end{pmatrix}$, где Λ соответствует отрицательным собственным значениям, M — положительным. Положим $\lambda(t) = \|e^{\Lambda t}\|$, $\mu(t) = \|e^{-Mt}\|$. Проверим, что если невязка f поля v мала в C^1 , то отображения потока $g_v^t = id + k_t, t \in [0, 1]$, удовлетворяют условию из теоремы 8.3.37 для оператора e^{At} :

$$\text{Lip } k_t < \min(1 - \lambda(t), 1 - \mu(t)). \quad (8.42)$$

Действительно,

$$\lambda(t) = \|e^{\Lambda t}\| \leq e^{-\alpha t},$$

где $\alpha > 0$ — наименьший из модулей собственных значений Λ . По лемме 8.3.44, при $t \in [0, 1]$

$$\frac{\text{Lip } k_t}{1 - \lambda(t)} \leq \frac{c \text{Lip } f \cdot t}{1 - e^{-\alpha t}} \leq \frac{c \text{Lip } f \cdot t}{\alpha t - \alpha^2 t^2 / 2} < 1,$$

если невязка f мала в C^1 . Так же доказывается неравенство $\text{Lip } k_t \leq 1 - \mu(t)$. Условие (8.42) проверено; значит, по теореме 8.3.37, существует гомеоморфизм H_t , сопрягающий g_v^t и e^{At} :

$$g_v^t \circ H_t = H_t \circ e^{At}.$$

Шаг 5: общее сопряжение для всех отображений потока. Докажем, что все гомеоморфизмы H_t на самом деле совпадают.

При $t = \frac{1}{n}$, $H_{\frac{1}{n}}$ сопрягает $g_v^{1/n}$ и $e^{A \cdot \frac{1}{n}}$. Но тогда, в силу группового свойства фазового потока:

$$g_v^1 = \underbrace{g_v^{1/n} \circ \dots \circ g_v^{1/n}}_n,$$

гомеоморфизм $H_{\frac{1}{n}}$ (с ограниченной невязкой) сопрягает g_v^1 и e^A .

В доказательстве теоремы Гробмана-Хартмана мы построили $h = H - id$ как неподвижную точку сжимающего отображения в $C_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. У сжимающего отображения может быть только одна неподвижная точка. Значит, сопрягающий гомеоморфизм с ограниченной невязкой только один: $H_{\frac{1}{n}} = H$.

Итак, H сопрягает g_v^t и e^{At} при $t = \frac{1}{n}$ для любого n . Из группового свойства, $g_v^{m/n} = \left(g_v^{1/n}\right)^m$, поэтому H сопрягает g_v^t и e^{At} при любом рациональном $t \in [0, 1]$. В силу непрерывности по t семейств g_v^t и e^{At} , H сопрягает g_v^t и e^{At} при любом $t \in [0, 1]$, а значит, и при любом t (опять-таки, в силу группового свойства фазового потока).

Теорема 8.3.43 доказана по модулю леммы 8.3.44.

Доказательство леммы 8.3.44 о невязке фазового потока.

Доказательство. Напомним, что поле v задается уравнением

$$\dot{x} = Ax + f(x),$$

где $f(0) = 0$. Фазовый поток его линеаризации равен e^{At} . Нам нужно сравнить с этим потоком фазовый поток поля v для $t \in [0, 1]$. Гораздо удобнее сравнивать нелинейное преобразование не с линейным, а с тождественным. Чтобы перейти к такому сравнению, положим

$$y = e^{-At}x.$$

Тогда

$$\dot{y} = e^{-At}f(e^{At}y). \quad (8.43)$$

Правая часть этого нового уравнения мала: более точно, его линейная часть в нуле равна нулю, а при фиксированном t правая часть равна $o(y)$ при $y \rightarrow 0$.

Пусть $x(t, \xi)$ — решение исходного уравнения с начальным условием ξ , $y(t, \xi) = e^{-At}x(t, \xi)$ — решение нового уравнения с начальным условием ξ . Напомним, что нам надо оценить константу Липшица (по переменной ξ) разности $k_t(\xi) = x(t, \xi) - e^{At}\xi = e^{At}(y(t, \xi) - \xi)$, $t \in [0, 1]$, величиной $ct \operatorname{Lip} f$. Пусть $Y(t, \xi)$ — производная функции $y(t, \xi)$ по начальному условию ξ , тогда

$$\operatorname{Lip} k_t(\xi) = \operatorname{Lip} (e^{At}(y(t, \xi) - \xi)) \leq c_1 \cdot \max \|Y(t, \xi) - E\|,$$

где $c_1 = \max_{t \in [0, 1]} \|e^{At}\|$, и нам достаточно получить оценку вида $ct \operatorname{Lip} f$ на величину $\|Y(t, \xi) - E\|$.

8.3.6. Доказательство теоремы Гробмана-Хартмана для векторных полей.

Функция Y удовлетворяет уравнению в вариациях по начальному условию:

$$\dot{Y} = \left(e^{-At} \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{e^{At}y} e^{At} \right) Y =: C(t)Y, \quad Y(0) = E. \quad (8.44)$$

Уменьшая невязку f в C^1 , можно добиться того, чтобы норма оператора $C(t)$, $t \in [0, 1]$, была сколь угодно мала; поэтому мы можем считать, что $\|Y(t, \xi)\| < 2$ при $t \in [0, 1]$.

По теореме Лагранжа о конечных приращениях и в силу уравнения в вариациях,

$$\|Y(t, \xi) - E\| = \|Y(t, \xi) - Y(0, \xi)\| = \|\dot{Y}(\tau, \xi)t\| = t \left\| e^{-A\tau} \frac{df}{dx} \Big|_{(e^{A\tau}y)} e^{A\tau} Y \right\| \leq 2ct \operatorname{Lip} f,$$

где $\tau \in [0, t] \subset [0, 1]$ и константа $c = \max_{t \in [0, 1]} \|e^{-At}\| \cdot \|e^{At}\|$ зависит только от A , что и требовалось.

Лемма доказана. □

8.4 Введение в теорию Фробениуса

Один из основных фактов теории обыкновенных дифференциальных уравнений — это теорема существования и единственности решений. Она универсальна — все “хорошие” дифференциальные уравнения имеют решения, однозначно определяемые начальными условиями. Одна из форм этой теоремы такова:

Через каждую точку области, в которой задано гладкое поле направлений, проходит интегральная кривая этого поля, и притом только одна (теорема 2.4.11).

Верно ли подобное утверждение, если поле направлений заменить на поле плоскостей? Вообще говоря, ответ отрицательный. Теория Фробениуса¹⁰ позволяет описать ситуацию, в которой ответ положителен. Эта теория и составляет содержание данного параграфа.

8.4.1 Интегральные поверхности полей плоскостей

Определение 8.4.1. Поле l -мерных плоскостей, или l -распределение, — это соответствие, сопоставляющее каждой точке некоторой области евклидова пространства l -мерную плоскость, проходящую через эту точку.

Пример 8.4.2. Рассмотрим набор l векторных полей со следующим условием: векторы этих полей линейно независимы в каждой точке. Такие векторные поля мы будем называть всюду линейно независимыми. Плоскости, порожденные такими полями, образуют семейство l -плоскостей. Мы будем говорить, что семейство плоскостей порождено данными векторными полями. Положим по определению, что класс гладкости этого семейства плоскостей тот же, что у порождающих его векторных полей.

Определение 8.4.3. *Интегральной поверхностью* поля плоскостей называется поверхность, в каждой точке которой касательная плоскость совпадает с плоскостью поля, соответствующей этой точке. Поле плоскостей называется *интегрируемым*, если каждая точка области определения поля принадлежит некоторой интегральной поверхности этого поля.

В этом параграфе, за исключением последней части, плоскости предполагаются двумерными. Следующее «утверждение» поясняет связи между данными выше определениями.

Неверное утверждение

Пусть C^1 -гладкое поле плоскостей порождено двумя всюду линейно независимыми векторными полями. Тогда оно интегрируемо.

Неверное доказательство. Обозначим векторные поля через v и w . Пусть g_v^t и g_w^s — соответствующие фазовые потоки. Выберем произвольную точку p в фазовом

¹⁰Фердинанд Георг Фробениус (1849 – 1917) — математик, известный своим вкладом в теорию групп, а также в теорию эллиптических функций, теорию дифференциальных уравнений и теорию чисел.

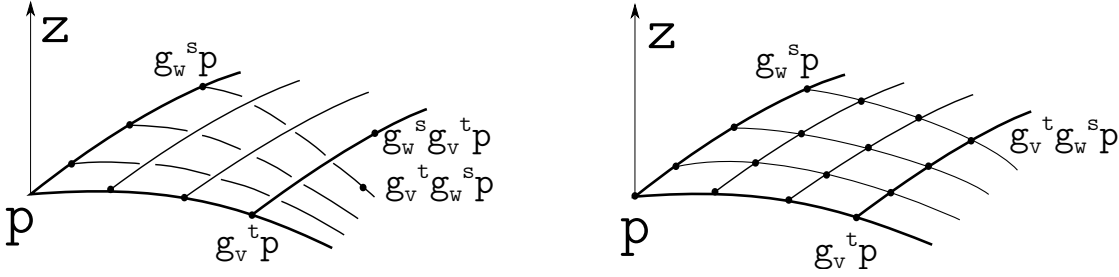


Рис. 8.23: Примеры ситуаций, когда интегральная поверхность существует (справа) и не существует (слева).

пространстве этих полей и рассмотрим кривую

$$\gamma = \{g_v^t p \mid t \in (\mathbb{R}, 0)\}. \quad (8.45)$$

Через каждую точку $q \in \gamma$ проходит фазовая кривая γ_q векторного поля w :

$$\gamma_q = \{g_w^s q \mid s \in (\mathbb{R}, 0)\}, \quad (8.46)$$

см. рис. 8.23. При этом кривая γ_q гладко зависит от q . Искомая интегральная поверхность имеет вид:

$$\Gamma = \bigcup_{q \in \gamma} \gamma_q. \quad (8.47)$$

□

Приведенное доказательство не проходит по следующей причине: векторное поле v в общем случае не касается поверхности Γ вне кривой γ (см. рис. 8.23). Однако за этим неправильным доказательством прячется следующее верное утверждение.

Теорема 8.4.4 (Теорема единственности). Пусть кривые γ и γ_q определены формулами (8.45), (8.46). Если поле плоскостей интегрируемо, то каждая интегральная поверхность имеет вид (8.47).

Доказательство. Поскольку поле v касается интегральной поверхности, то эта поверхность содержит кривую γ . Поле w также касается интегральной поверхности, поэтому эта поверхность содержит кривые γ_q , $q \in \gamma$. □

Формулу (8.47) можно переписать в следующем виде:

$$\Gamma_p = \{g_w^s \circ g_v^t p \mid (t, s) \in (\mathbb{R}^2, 0)\}. \quad (8.48)$$

Мы будем говорить, что фазовые потоки полей v и w коммутируют, если отображения g_v^t и g_w^s коммутируют при любых t, s .

Предложение 8.4.5. Два всюду линейно независимых гладких векторных поля v и w , фазовые потоки которых коммутируют, порождают интегрируемое поле плоскостей.

Доказательство. Если потоки полей v и w коммутируют, то поверхность Γ , заданная формулой (8.48), содержит вместе с каждой из своих точек фазовые кривые векторных полей v и w , проходящие через эту точку. Действительно, вместе с точкой $q = g_w^s \circ g_v^t p$ поверхность Γ содержит точки вида $g_w^{s_1} q = g_w^{s+s_1} \circ g_v^t p$ и $g_v^{t_1} q = g_v^{t_1} g_w^s \circ g_v^t p = g_w^s \circ g_v^{t+t_1} p$. Поэтому Γ является интегральной поверхностью, проходящей через точку p . \square

Займемся изучением векторных полей, фазовые потоки которых коммутируют. По аналогии будем называть такие поля *коммутирующими*.

8.4.2 Коммутатор векторных полей и коммутирующие фазовые потоки

В этом пункте мы дадим необходимое и достаточное условие коммутирования векторных полей. Далее под фазовыми потоками понимаются локальные фазовые потоки.

Пусть v, w — два гладких векторных поля, и g_v^t, g_w^t — соответствующие фазовые потоки.

Напомним, что диффеоморфизм f действует на векторное поле u следующим образом:

$$f_* u|_{f(x)} = df|_x u(x),$$

то есть вектор нового поля $f_* u$ в точке $f(x)$ равен образу вектора поля u в точке x под действием дифференциала отображения f .

Перенесем векторы поля w с помощью потока поля v : для каждого t рассмотрим поле $(g_v^t)_* w$. Следующее определение является центральным в этом пункте.

Определение 8.4.6. *Коммутатором* $[v, w]$ векторных полей v, w называется выражение

$$[v, w] = \left. \frac{d}{dt} (g_v^t)_* w \right|_{t=0}. \quad (8.49)$$

Если коммутатор полей тождественно равен нулю, говорят, что поля коммутируют. Коммутатор двух векторных полей также называют скобкой Ли или скобкой Пуассона.

Пример 8.4.7. Рассмотрим поля $v(x, y) = (x, y)$ и $w(x, y) = (x + 1, y)$ на плоскости. Поток поля v — это семейство растяжений $g_v^t(x, y) = (e^t x, e^t y)$. Под действием такого растяжения поле $w = (x + 1, y)$ переходит в поле $(g_v^t)_* w = (x + e^t, y)$. Получаем $[v, w] = (1, 0)$.

Упражнение 154. *Опишите все поля, с которыми коммутирует поле (x, y) на плоскости.*

Теорема 8.4.8. *Фазовые потоки двух векторных полей коммутируют тогда и только тогда, когда их коммутатор тождественно равен нулю.*

8.4.3. Коммутатор векторных полей

Доказательство. 1. Предположим, что фазовые потоки коммутируют. Тогда отображение g_v^t переводит фазовые кривые поля w в фазовые кривые того же поля с сохранением временной параметризации. Из этого следует, что векторное поле w , образованное скоростями этих кривых, также сохраняется. Следовательно,

$$(g_v^t)_* w \equiv w \text{ для любого } t, \quad (8.50)$$

откуда $[v, w] \equiv 0$.

2. Предположим, что $[v, w] \equiv 0$. Сначала докажем (8.50): фазовый поток g_v^t сохраняет поле w . Достаточно проверить, что производная $\frac{d}{dt} (g_v^t)_* w$ равна нулю в любой точке $t = a$.

Используя групповое свойство фазовых потоков, получаем:

$$\left. \frac{d}{dt} (g_v^t)_* w \right|_{t=a} = \left. \frac{d}{dh} (g_v^{a+h})_* w \right|_{h=0} = \left. \frac{d}{dh} (g_v^a)_* (g_v^h)_* w \right|_{h=0} = (g_v^a)_* \left. \frac{d}{dh} (g_v^h)_* w \right|_{h=0}.$$

Последнее равенство следует из того, что диффеоморфизм g_v^a , который мы применяем к полю $(g_v^h)_* w$, не зависит от h , и потому операция дифференцирования по параметру h коммутирует с преобразованием поля под действием диффеоморфизма g_v^a . Следовательно,

$$\left. \frac{d}{dt} (g_v^t)_* w \right|_{t=a} = (g_v^a)_* \left. \frac{d}{dh} (g_v^h)_* w \right|_{h=0} = (g_v^a)_* [v, w] = 0.$$

Отсюда следует (8.50). Значит, фазовый поток g_v^t сохраняет поле w и, следовательно, коммутирует с фазовым потоком g_w^s .

Теорема доказана. \square

Ниже мы выведем из этой теоремы критерий интегрируемости поля плоскостей.

8.4.3 Коммутатор векторных полей

Получим явную формулу для коммутатора двух векторных полей. Для этого нам достаточно знать векторное поле $(g_v^t)_* w$ с точностью до членов порядка t^2 . Фиксируем систему координат. Как мы уже отмечали, преобразование векторного поля под действием диффеоморфизма происходит по следующему закону:

$$(g_v^t)_* w(x) = \left(\frac{\partial g_v^t}{\partial x} w \right) \circ g_v^{-t}(x).$$

Заметим, что

$$g_v^t x = x + tv(x) + O(t^2), \quad \frac{\partial g_v^t}{\partial x} = E + t \frac{\partial v}{\partial x} + O(t^2).$$

Поэтому поле $(g_v^t)_* w$ имеет вид

$$(g_v^t)_* w = \left[\left(E + t \frac{\partial v}{\partial x} + \dots \right) w \right] \circ (x - tv(x)) + O(t^2) = w - t \frac{\partial w}{\partial x} v(x) + t \frac{\partial v}{\partial x} w(x) + O(t^2).$$

Окончательно получаем

$$[v, w] = \frac{\partial v}{\partial x} w - \frac{\partial w}{\partial x} v. \quad (8.51)$$

Эта важная формула имеет многочисленные приложения. Вот некоторые из них.

Следствие 8.4.9. *Коммутатор двух векторных полей линеен по обоим аргументам.*

Следствие 8.4.10. *Коммутатор двух векторных полей кососимметричен: $[v, w] = -[w, v]$.*

Оба утверждения очевидны.

Следствие 8.4.11. *Для коммутатора векторных полей выполняется следующее тождество Якоби:*

$$[[u, v], w] + [[v, w], u] + [[w, u], v] \equiv 0.$$

Это утверждение доказывается прямым вычислением на основе формулы (8.51).

Замечание 8.4.12. *Следствия 8.4.9–8.4.11 показывают, что векторные поля образуют алгебру Ли с операцией коммутирования, заданной формулой (8.49), или, в координатной форме, формулой (8.51).*

Остаток этого параграфа посвящен проблеме интегрируемости полей плоскостей.

8.4.4 Критерий интегрируемости.

Из теоремы 8.4.8 и предложения 8.4.5 следует, что если векторные поля v и w всюду линейно независимы и коммутируют, то поле плоскостей, порожденное этими векторными полями, интегрируемо. Обратное неверно, поскольку два коммутирующих векторных поля после умножения на функциональные коэффициенты перестают коммутировать, но порождают то же поле плоскостей. Заметим, что новые векторные поля, построенные таким способом, обладают следующим свойством: их коммутатор принадлежит их линейной оболочке, то есть является линейной комбинацией этих полей (с функциональными коэффициентами).

Упражнение 155. *Пусть векторные поля v, w коммутируют. Покажите, что $[fv, w] = v\mathcal{L}_w f$, где f — гладкая функция, а $\mathcal{L}_w f$ — её производная вдоль вектора поля w . Вычислите $[fv, gw]$.*

Мы докажем, что этот пример описывает все интегрируемые поля плоскостей.

Определение 8.4.13. *Два всюду линейно независимых векторных поля находятся в инволюции, если их коммутатор принадлежит их линейной оболочке.*

Теорема 8.4.14. *Семейство плоскостей, порожденное двумя всюду линейно независимыми векторными полями, интегрируемо тогда и только тогда, когда эти векторные поля находятся в инволюции.*

8.4.4. Критерий интегрируемости.

Доказательство. Необходимость. Рассмотрим интегрируемое поле плоскостей. Пусть v и w — порождающие его векторные поля. Интегральная поверхность, проходящая через точку p , имеет вид (8.48). По теореме о гладкой зависимости решения дифференциального уравнения от начального условия, поверхности Γ_p гладкие и гладко зависят от p . Следовательно, в некоторой окрестности каждой точки p существует диффеоморфизм, выпрямляющий семейство интегральных поверхностей. Это означает, что существует система координат

$$x = (x_1, \dots, x_n) = (x_1, x_2, x'), \quad x' \in \mathbb{R}^{n-2},$$

такая, что интегральные поверхности имеют вид $x' = c$, $c \in \mathbb{R}^{n-2}$. Векторные поля v и w касаются этих поверхностей. То же верно и для поля $(g_v^t)_*w$, и, следовательно, для коммутатора $[v, w]$. Таким образом, коммутатор $[v, w]$ представляет собой линейную комбинацию полей v и w с функциональными коэффициентами.

Достаточность. Предположим, что $[v, w]$ — линейная комбинация полей v и w . Мы покажем, что в этом случае можно найти коммутирующие векторные поля X и Y , порождающие то же поле плоскостей. Тогда фазовые потоки этих полей коммутируют, и по предложению 4.1.6 поле плоскостей интегрируемо.

Ограничимся рассмотрением локальной ситуации: для каждой точки фазового пространства построим векторные поля X и Y в некоторой окрестности этой точки. Это докажет интегрируемость соответствующего поля плоскостей. Зафиксируем точку p и рассмотрим разложение $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^{n-2}$ с проекцией $\pi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^2$. Разложение выбрано так, что ограничение отображения $d\pi(p)$ на плоскость нашего распределения, соответствующую точке p , является изоморфизмом. Выберем такую окрестность G точки p , что это свойство выполняется для любой точки $q \in G$. Рассмотрим два коммутирующих векторных поля e_1, e_2 в \mathbb{R}^2 ; например, пусть $e_1 = \partial/\partial x_1$, $e_2 = \partial/\partial x_2$, где x_1, x_2 — координаты в \mathbb{R}^2 . Поднимем эти векторные поля на плоскости нашего поля. Обозначим полученные поля через X и Y .

Предложение 8.4.15. *Построенные выше векторные поля X и Y коммутируют.*

Доказательство. Продолжим векторные поля e_1 и e_2 на \mathbb{R}^n по формулам $e_1 = \partial/\partial x_1$, $e_2 = \partial/\partial x_2$ и рассмотрим новые векторные поля:

$$X' = X - e_1, \quad Y' = Y - e_2.$$

Эти последние являются *вертикальными*, то есть касательными к слоям проекции π . Далее, запишем:

$$[X, Y] = [e_1 + X', e_2 + Y'] = [e_1, Y'] - [e_2, X'] + [X', Y'].$$

Предположим, что коммутатор $[X, Y]$ не равен нулю. Заметим, что все три члена в правой части вертикальны. Действительно, преобразования фазового потока полей e_1 и e_2 коммутируют с проекцией π , и поэтому переводят вертикальные поля в вертикальные. Более того, коммутатор двух вертикальных векторных полей также вертикален. Следовательно, если векторное поле в правой части предыдущей формулы не равно нулю, то оно трансверсально элементам исходного поля плоскостей.

С другой стороны, векторные поля X и Y , так же как v и w , находятся в инволюции. Поэтому их коммутатор принадлежит плоскостям нашего распределения. Это противоречие доказывает предложение и завершает доказательство теоремы. \square

\square

8.4.5 Критерий интегрируемости для полей плоскостей произвольной размерности

Предположим, что поле l -мерных плоскостей определено набором l всюду линейно независимых векторных полей.

Определение 8.4.16. Набор l всюду линейно независимых векторных полей находится в инволюции, если коммутатор любых двух из них принадлежит линейной оболочке этих векторных полей.

Теорема 8.4.17. Поле плоскостей, определенное набором l всюду линейно независимых векторных полей, интегрируемо тогда и только тогда, когда эти поля находятся в инволюции.

Доказательство аналогично случаю $l = 2$. Для l векторных полей v_1, \dots, v_l интегральная поверхность, если она существует, имеет вид $\Gamma = \{g_{v_1}^{t_1} \circ \dots \circ g_{v_l}^{t_l}(p) \mid t_j \in \mathbb{R}\}$. Чтобы от полей в инволюции перейти к коммутирующим полям, следует “поднять” l коммутирующих векторных полей e_1, \dots, e_l в l -мерные плоскости распределения. Остальные части доказательства проводятся так же, как и в двумерном случае.

Задачи к главе 8

Устойчивость

- При каких значениях a следующие отображения являются локальными диффеоморфизмами во всех точках:
 - $x \mapsto x + a \sin x, x \in \mathbb{R}^1$;
 - $(x, y) \mapsto (x + a \sin(x + y), y + a \sin(x - y)), (x, y) \in \mathbb{R}^2$.
 При $a = 0.1$, исследуйте на устойчивость неподвижные точки из задачи b).
- Найдите первый интеграл энергии $E(x, \dot{x})$ для уравнения $x'' = -x(1 - x)$.
 - Будет ли этот первый интеграл функцией Ляпунова для уравнения $x' = v, v' = x(1 - x) - \varepsilon x$ в окрестности нуля? А в окрестности единицы?
 - Бассейн притяжения особой точки x_0 векторного поля v — это множество точек x , для которых $g_v^t(x) \rightarrow x_0$ при $t \rightarrow +\infty$. При каких c область $E(x, \dot{x}) < c$ содержится в бассейне притяжения нуля?
- Те же вопросы для уравнения $x'' = -\sin x$.
- Устойчива ли особая точка $(0, 0)$ системы $\dot{x} = e^{2x+5y} - 1 - \varepsilon x, \dot{y} = \ln(1 - x - 2y) - \varepsilon y$
 - при $\varepsilon > 0$,
 - при $\varepsilon < 0$?
- Оператор A симметричен и имеет базис из собственных векторов ξ^j с собственными значениями $\lambda_j = \omega_j^2 > 0$. Является ли положение равновесия системы

$$\ddot{x} = -\operatorname{grad} \frac{1}{2}(Ax, x).$$

устойчивым? Асимптотически устойчивым?

- Нарисуйте орбиты градиентной системы $\dot{x} = -\operatorname{grad} U(x), U(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1^4 + 2x_2^2$.
 - Нарисуйте график функции V и сравните две картинку.
- Рассмотрим уравнение $\ddot{x} = -\operatorname{grad} U(x), x \in \mathbb{R}^1$.
 - * Функция U имеет в нуле строгий локальный минимум. Доказать, что 0 — устойчивое положение равновесия.
 - ** Верно ли обратное утверждение для непостоянной функции $U \in C^\infty$? Для непостоянной аналитической функции U ?

Пределные циклы

8. Нарисуйте фазовые кривые систем, записанных в полярных координатах. Найдите предельные циклы (если они есть) и их мультипликаторы.
- $\dot{r} = r - r^2, \dot{\varphi} = 1$.
 - $\dot{r} = r - cr^2, \dot{\varphi} = 1$ — найдите ответ в зависимости от c .
 - $\dot{r} = r(1 - r)(2 - r), \dot{\varphi} = 1$.
 - $\dot{r} = (2 - r)(1 + \frac{\sin \varphi}{2}), \dot{\varphi} = 1$.
9. Предположим, что векторное поле на плоскости имеет отрицательную дивергенцию. Докажите, что это поле не может иметь две замкнутые орбиты, одна из которых лежит внутри другой.
10. Сформулируйте и докажите аналог теоремы Флоке для якобиана отображения Пуанкаре, соответствующего замкнутой фазовой кривой в пространстве \mathbb{R}^3 .
11. Докажите, что трансверсаль не может пересекать цикл более чем в одной точке.
- Указание:* рассуждение из этой задачи носит название “мешок Бендиксона”; ср. с 4.1.6.

Особые точки

12. Для следующих систем на плоскости найдите особые точки, исследуйте их устойчивость и нарисуйте фазовые портреты вблизи них.
- $\dot{x} = \sin(2x + y), \dot{y} = \sin(x + 2y)$;
 - $\dot{x} = xy + 12, \dot{y} = x^2 + y^2 - 25$;
 - $\dot{x} = -\sin y, \dot{y} = \sin x + \sin y$;
 - $\dot{x} = y, \dot{y} = -2x + 4x^3 - 0.1y$;
 - $\dot{x} = x - y + \operatorname{sh}(x - y), \dot{y} = x + y + \operatorname{sh}(x + y)$. Напоминание: $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.
13. Для малых ε определите типы особых точек и нарисуйте фазовые портреты уравнения $x'' = -x(1 - x) - \varepsilon x$.
- Указание:* чтобы получить правильный результат вдали от особых точек, воспользуйтесь задачей 2..
14. Напомним, что уравнение $\ddot{x} = -\sin x$ описывает математический маятник. Рассмотрим уравнение $\ddot{x} = -\sin x - \varepsilon \dot{x}$, которое описывает маятник с трением, пропорциональным скорости.
- Для малых ε определите типы особых точек и нарисуйте фазовый портрет уравнения $\ddot{x} = -\sin x - \varepsilon \dot{x}$.
- Указание:* чтобы получить правильный результат вдали от особых точек, воспользуйтесь задачей 3..

8.4.5. Критерий интегрируемости для полей плоскостей произвольной размерности

- b) Заменяя систему её линейной частью, выясните, будет ли маятник колебаться быстрее или медленнее, чем маятник без трения, в окрестности положения равновесия. (Время колебания примите равным промежутку времени между соседними максимумами функции x).
- c) Может ли маятник сделать несколько оборотов по часовой стрелке, а потом — несколько оборотов против?
- d) Будем увеличивать коэффициент трения, то есть рассматривать систему при все большем значении ε . При каком значении ε маятник перестанет совершать колебания вблизи положения равновесия?
- e) (*) Может ли маятник сделать бесконечное число полных оборотов?

15. (О распространении пожара) Распространение пожара можно описывать уравнением

$$u_t = u_x x + u(1 - u)$$

где $u(t, x)$ интенсивность горения в точке x в момент времени t . Это уравнение похоже на уравнение теплопроводности; дополнительное слагаемое $u(1 - u)$ учитывает приток энергии от горящего материала в точке x .

При каких $c > 0$ это уравнение допускает решение вида $u(x, t) = f(x - ct)$, где функция f ограничена и $f(-\infty) = 1, f(+\infty) = 0$?

Такое решение соответствует движению пожара со скоростью c .

Указание: см. задачу 4.1.6.

- a) Пусть в критической точке a многочлена P гессиан многочлена невырожден. Докажите, что в малой окрестности многочлена P (в пространстве всех многочленов фиксированной степени) каждый многочлен имеет критическую точку, близкую к a , и эта точка гладко зависит от коэффициентов многочлена.
- b) Рассмотрим векторное поле $v_a(X), X \rightarrow \mathbb{R}^n$, гладко зависящее от параметра $a \in \mathbb{R}$. Пусть

$$v_0(X) = AX + R(X), \quad \frac{|R(X)|}{|X|} \rightarrow 0,$$

причем $\det A \neq 0$. Докажите, что уравнение $\dot{x} = v_a(x)$ имеет единственную неподвижную точку, близкую к нулю при малых a .

- c) Рассмотрим семейство отображений $G_a(X) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, гладко зависящее от параметра $a \in \mathbb{R}$. Пусть

$$G_0(X) = AX + R(X), \quad \frac{|R(X)|}{|X|} \rightarrow 0,$$

причем оператор A не имеет собственных значений, равных 1. Докажите, что отображение $X \mapsto G_a(X)$ имеет единственную неподвижную точку, близкую к нулю при малых a .

9 Окно в теорию динамических систем

9.1 Структурная устойчивость

Так же, как устойчивость по Ляпунову делает достоверным для практики существование постоянных решений — так же структурная устойчивость делает достоверным качественное поведение решений дифференциальных уравнений во всем фазовом пространстве. Грубо говоря, векторное поле структурно устойчиво, если при малом изменении этого поля его фазовый портрет качественно не изменяется. Перейдем к строгим определениям.

9.1.1 Определение структурной устойчивости

Следующее определение показывает, что означают слова “сохранение качественных свойств фазового портрета”. Определение векторного поля на поверхности можно найти в разделе 4.1.4; кроме того, мы напомним его в разделе 9.1.4.

Определение 9.1.1. Два векторных поля на поверхности $M \subset \mathbb{R}^n$ орбитально топологически эквивалентны, если существует гомеоморфизм поверхности M , переводящий фазовые кривые одного поля в фазовые кривые другого с сохранением временной ориентации.

Определение 9.1.2. Векторное поле на поверхности $M \subset \mathbb{R}^n$ называется *структурно устойчивым*, если оно орбитально топологически эквивалентно любому полю, достаточно близкому к нему в подходящем функциональном пространстве.

Выбор функционального пространства в этом определении не фиксируется. Это делается отдельно в каждом конкретном исследовании. В этой главе мы будем говорить о структурной устойчивости в пространстве C^1 -гладких векторных полей.

Упражнение 156. Докажите, что структурная устойчивость — открытое свойство: все поля, достаточно близкие к структурно устойчивому, тоже структурно устойчивы.

9.1.2 Критерий Андронова-Понтрягина

Концепция структурной устойчивости принадлежит Андронову. Совместно с Понтрягиным, он открыл критерий структурной устойчивости векторных полей на сфере¹. Подробные доказательства этого критерия были записаны гораздо позже^(2, 3).

Теорема 9.1.3 (Критерий Андронова-Понтрягина). C^1 -гладкое векторное поле на сфере структурно устойчиво тогда и только тогда, когда выполнены следующие три условия:

1. Все особые точки поля — гиперболические.

¹Андронов А.А., Понтрягин Л.С. 1937. Грубые системы. Доклады АН СССР, 14(5): стр. 247–250.

²А.А. Андронов, Е.А. Леонтович, И.И. Гордон, А.Г. Майер, Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1967. 488 стр.

³М. М. Peixoto. “Structural stability on two-dimensional manifolds”. Topology 1.2 (1962), pp. 101–120.

2. Все замкнутые орбиты поля — предельные циклы, и все эти циклы гиперболически.
3. Никакие две сепаратрисы гиперболических седла не совпадают (другими словами, отсутствуют седловые связки).

Оказывается, что этим свойством обладает большинство векторных полей на сфере.

Теорема 9.1.4. *В пространстве всех C^1 -гладких векторных полей на сфере множество полей, удовлетворяющих условиям критерия Андронова-Понтрягина, открыто и всюду плотно.*

Понятия открытого и плотного множества в пространстве C^k -гладких векторных полей определяются так же, как и в любом другом метрическом пространстве: множество открыто, если вместе с любым полем оно содержит, для некоторого ε , все ε -близкие поля в метрике C^k ; множество плотно, если сколь угодно близко к произвольному C^k -гладкому полю можно найти поле из нашего множества.

Замечание 9.1.5. *Результаты о структурной устойчивости проще формулировать для векторных полей на сфере, а не на плоскости. В разделе 9.1.4 мы опишем, как переходить от векторного поля на сфере к полю на плоскости и наоборот, и обсудим, можно ли применять полученные результаты для векторных полей на плоскости.*

Как показано ниже, структурно устойчивые поля на сфере обладают важными общими свойствами.

9.1.3 Три эпохи

Историю развития теории дифференциальных уравнений можно разделить на три эпохи:

- Эпоха Ньютона: дано дифференциальное уравнение; решить его.
- Эпоха Пуанкаре: дано дифференциальное уравнение; описать свойства его решений, не решая уравнения.
- Эпоха Андронова: дифференциальное уравнение не дано; описать свойства его решений.

Последнее кажется парадоксальным; однако широкие классы дифференциальных уравнений обладают свойствами, общими для всего класса. Вот пример.

Теорема 9.1.6. *В пространстве всех C^1 -гладких векторных полей на сфере существует открытое всюду плотное множество полей, обладающих следующими свойствами:*

- для любого начального условия соответствующая фазовая кривая либо стремится к особой точке, либо неограниченно приближается к предельному циклу;
- число особых точек и предельных циклов поля конечно.

С точки зрения практического исследователя, наблюдающего систему с точностью до малой погрешности, поведение системы выглядит очень простым: каждое решение за конечное время выходит либо на стационарный, либо на периодический режим.

В следующем разделе мы опишем связь между векторными полями на сфере и на плоскости; в разделе 9.1.5 обсудим необходимость гиперболичности в критерии Андронова-Понтрягина; в разделе 9.1.6 мы докажем теорему 9.1.6 (по модулю теоремы 9.1.4), а в разделе 9.1.7 — теорему 9.1.4. Мы не будем обсуждать доказательство достаточности в критерии Андронова-Понтрягина, хотя и подойдем к нему совсем близко.

Мы завершим этот параграф взглядом с птичьего полета на теорию бифуркаций и теорию динамических систем.

9.1.4 Векторные поля на сфере

Пусть $p \in M$ — точка на поверхности в пространстве \mathbb{R}^n , и пусть $T_p(M)$ — касательная плоскость к поверхности M в точке p .

Напомним (см. раздел 4.1.4), что *векторным полем* на поверхности M называется отображение, которое каждой точке $p \in M$ ставит в соответствие пару (p, v) , где $v \in T_p M$. Фазовая кривая векторного поля — это кривая, касательный вектор к которой в каждой её точке равен вектору поля, приложенному в этой точке. Особые точки и предельные циклы для поля на поверхности определяются так же, как и для векторного поля на плоскости.

В этом разделе мы опишем стереографическую проекцию, которая позволяет переходить от векторного поля на сфере к полю на плоскости и наоборот.

Рассмотрим сферу единичного радиуса с центром в точке $(0, 0, 1)$ и плоскость Ox_1x_2 . Положим $N = (0, 0, 2)$ (“северный полюс” сферы). Рассмотрим *стереографическую проекцию* $f: S^2 \rightarrow Ox_1x_2$: точка P на сфере переходит в точку пересечения прямой NP с плоскостью Ox_1x_2 . Отображение f определено всех точках сферы, кроме полюса N .

Дифференциал $df(P)$ переводит касательную плоскость к сфере $T_P S^2$ в касательную плоскость к \mathbb{R}^2 — в $T_{f(P)} \mathbb{R}^2$. Поле $w = f_* v$ на плоскости,

$$w(f(P)) = df(P)v(P),$$

является стереографической проекцией поля v на сфере. Понятно, что при отображении f фазовый портрет поля v переходит в фазовый портрет поля $f_* v$.

Наоборот, любое поле w на плоскости можно перенести на сферу с помощью отображения f^{-1} — правда, поле $(f^{-1})_* w$ на сфере может быть не определено в точке N .

9.1.5. Необходимость гиперболичности в критерии Андронова-Понтрягина

В дальнейшем, говоря о векторном поле на сфере, мы всегда будем рисовать его стереографическую проекцию. Точку N мы будем называть “точкой бесконечность”. На наших рисунках её не будет видно.

Отметим, что в точке N поле может иметь особую точку. Чтобы определить тип этой особой точки, можно сделать другую стереографическую проекцию — из южного полюса сферы $S = (0, 0, 0)$ на плоскость $\{x_3 = 2\}$. Окрестность точки N перейдет в окрестность нуля. Впрочем, мы всегда можем считать, что точка N неособая: в противном случае повернем сферу, прежде чем делать стереографическую проекцию.

Позволяет ли эта конструкция доказать критерий Андронова-Понтрягина для векторных полей на плоскости? Нет; более того, в общем случае он не выполнен. Например, может случиться так, что при возмущении векторного поля v особая точка приходит “из бесконечности”.

Упражнение 157. *Покажите, что у векторного поля без особых точек $\dot{x} = \frac{1}{1+x^2}, \dot{y} = y$ при возмущении $v + (-\varepsilon, 0)$ появляется особая точка, поэтому оно не структурно устойчиво.*

Поэтому при изучении возмущений векторного поля на плоскости надо проследить, что в окрестности бесконечности не происходит ничего интересного, как, например, в следующем примере.

Упражнение 158. *Пусть векторное поле v на плоскости \mathbb{R}^2 таково, что $v(x, y) = (-x, -y) + o(1)$ при $x, y \rightarrow \infty$. Докажите, что при переносе такого поля на сферу получается поле с гиперболической особой точкой в бесконечности, и при малом возмущении поля v эта особая точка не двигается.*

Поэтому для векторных полей такого вида на плоскости тоже выполнен критерий Андронова-Понтрягина.

9.1.5 Необходимость гиперболичности в критерии Андронова-Понтрягина

9.1.5.1 Необходимость гиперболичности особых точек

Лемма 9.1.7. *Если векторное поле структурно устойчиво, то все его особые точки — гиперболические.*

Доказательство. Введем координаты на плоскости: $z = (x, y)$. Предположим, что 0 — негиперболическая особая точка поля $v(z)$. Пусть λ_1 и λ_2 — её собственные значения. В силу негиперболичности, либо $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$, $\omega \neq 0$ (центр по линейным членам), либо $\lambda_1 = 0$ (в этом случае фазовый портрет обычно получается таким, как на рис. 9.1(b), а особая точка называется седлоузлом).

Структурная неустойчивость центра по линейным членам

Пусть v — векторное поле с особой точкой 0 , имеющей собственные значения $\pm i\omega \neq 0$. Пусть

$$v(z) = Az + R(z),$$

Az — линейная часть векторного поля, $R(z) = o(z)$. Поскольку оператор A невырожден, существует окрестность U точки 0 , в которой

$$|R(z)| < \frac{1}{2}|Az|.$$

Пусть φ — “срезающая” C^1 -гладкая функция, такая что $\varphi \equiv 0$ вне окрестности U и $\varphi \equiv 1$ в некоторой окрестности нуля. Рассмотрим поле $v_\varepsilon = v + \varepsilon z\varphi$. Линейная часть этого поля в нуле равна $A + \varepsilon E$. При $\varepsilon > 0$ особая точка 0 поля v_ε неустойчива; при $\varepsilon < 0$ она устойчива. Других особых точек в окрестности U у поля v_ε нет:

$$|v_\varepsilon(z)| \geq |Az| - |R(z)| - \varepsilon\varphi|z| \geq \frac{1}{2}|Az| - \varepsilon|z| > 0$$

при малых ε и ненулевых z . Все остальные особые точки у полей v_ε одинаковы, и в окрестностях остальных особых точек поля v_ε совпадают с полем v . Итак, у поля v при $\varepsilon < 0$ на одну устойчивую особую точку больше, чем у поля v_ε при $\varepsilon > 0$. Такие поля не могут быть орбитально топологически эквивалентными. Следовательно, поле v не структурно устойчиво.

Неверное доказательство структурной неустойчивости для седлоузла

Рассмотрим поле v с особой точкой 0 , для которого $\lambda_1 = 0$. Пусть $v_\varepsilon = v + \varepsilon z\varphi(z)$ — такое же поле, как раньше. Пусть $\lambda_2 < 0$. Собственные значения точки 0 поля v_ε равны $\lambda_{1,2} + \varepsilon$. Поэтому при $\varepsilon < 0$ особая точка 0 поля v устойчива, а при $\varepsilon > 0$ неустойчива. Такие поля не могут быть орбитально топологически эквивалентными. Поэтому поле v не является структурно устойчивым.

Случай $\lambda_2 \geq 0$ рассматривается аналогично.

Ниже приведены два примера семейств векторных полей с седлоузлом. Второй пример помогает найти ошибку в этом доказательстве.

Примеры

Характерный пример седлоузла — это особая точка уравнения

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ \dot{y} = -y. \end{cases} \quad (9.1)$$

Пример 9.1.8. Рассмотрим векторное поле w_ε , заданное уравнением

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + \varepsilon \\ \dot{y} = -y. \end{cases}$$

9.1.5. Необходимость гиперболичности в критерии Андронова-Понтрягина

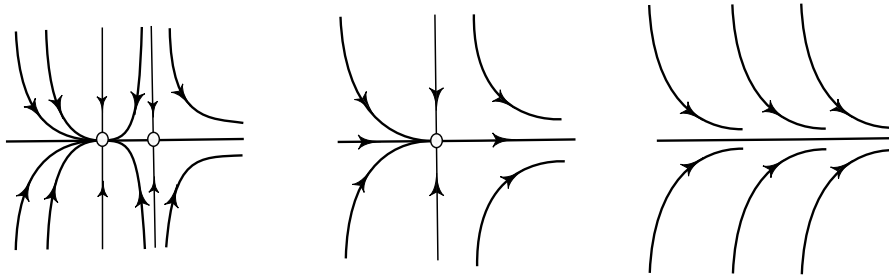


Рис. 9.1: Бифуркация седлоузла в примере 9.1.8: (а) $\varepsilon < 0$; (б) $\varepsilon = 0$; (в) $\varepsilon > 0$.

Фазовый портрет этого уравнения при разных значениях параметра ε изображен на рисунке 9.1. При $\varepsilon = 0$ фазовый портрет в левой полуплоскости напоминает узел, а в правой — седло. Отсюда название *седлоузел*.

При $\varepsilon < 0$ особая точка распадается на две: седло и узел. При $\varepsilon > 0$ особая точка исчезает. Такие резкие, скачкообразные изменения фазового протрета называются *бифуркациями*.

Очевидно, что поле v_0 структурно неустойчиво.

Пример 9.1.9. Рассмотрим теперь семейство полей v_ε , заданных уравнением

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + \varepsilon x \\ \dot{y} = -y + \varepsilon y. \end{cases}$$

Это семейство представимо в виде

$$\begin{cases} \dot{x} = (x + \frac{\varepsilon}{2})^2 - \frac{\varepsilon^2}{4} \\ \dot{y} = (-1 + \varepsilon)y. \end{cases}$$

При любом $\varepsilon \neq 0$ поле v_ε имеет две особые точки — седло и узел. Поля v_ε при $\varepsilon > 0$ и $\varepsilon < 0$ топологически эквивалентны.

Ошибка предыдущего доказательства состоит в следующем. Мы должны доказать, что поле v и некоторое близкое поле не являются орбитально топологически эквивалентными на сфере. Орбитальная топологическая эквивалентность может переводить ноль в какую-нибудь другую особую точку — скажем, тоже возникшую после разрушения седлоузла, как эквивалентность из примера 9.1.9. Поэтому доказательство не работает.

Чтобы получить верное доказательство, следует изучить разрушение седлоузла в фиксированной, не зависящей от ε , его окрестности — и гарантировать, что вне этой окрестности не происходит бифуркаций.

Структурная неустойчивость седлоузла

Пусть w — поле с особой точкой 0 , причем $\lambda_1 = 0$. Сколь угодно C^1 -близко к полю w есть дважды гладкое поле v , удовлетворяющее условиям $v(0) = 0$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$ и $\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}(0) = a \neq 0$.

В подходящих координатах поле v задается уравнением

$$\begin{cases} \dot{x} = ax^2 + bxy + cy^2 + R_1(x, y) \equiv v_1, \\ \dot{y} = \lambda_2 y + R_2(x, y) \equiv v_2, \quad a \neq 0 \end{cases} \quad (9.2)$$

$$|R_1| = o(x^2 + y^2), \quad |R_2| = O(x^2 + y^2).$$

Можно доказать, что вблизи нуля поле (9.2) орбитально топологически эквивалентно полю (9.1). Отсюда название “седлоузел”, применимое в общем случае.

Без ограничения общности будем считать, что $a > 0$; иначе сделаем замену времени. Положим:

$$v_\varepsilon = v + \varepsilon\varphi(z)(1, 0),$$

где φ — некоторая срезающая функция: $\varphi = 1$ в окрестности нуля и $\varphi = 0$ вне большей окрестности нуля, которую мы обозначим U . Функцию φ мы выберем ниже.

Мы докажем, что при малых $\varepsilon > 0$ поле v_ε не имеет особых точек в окрестности U , а при $\varepsilon < 0$ имеет две. Вне окрестности U поля v_ε совпадают с v_0 . Следовательно, поле v_ε при $\varepsilon < 0$ имеет больше особых точек, чем при $\varepsilon > 0$. Значит, поле v структурно неустойчиво.

Предложение 9.1.10. Пусть $v = (v_1, v_2)$ — поле (9.2). Тогда существуют окрестность U точки 0 и срезающая функция $\varphi : \varphi \equiv 0$ вне U такие, что при любом достаточно малом $\varepsilon > 0$ поле $v_\varepsilon = (v_1 + \varepsilon\varphi, v_2)$ не имеет особых точек в окрестности U , а при $\varepsilon < 0$ имеет две.

Доказательство. Мы будем пользоваться представлением (9.2). Особые точки поля v_ε находятся из уравнения

$$v_1 + \varepsilon\varphi = 0, \quad v_2 = 0.$$

Начнем со второго уравнения. По теореме о неявной функции, в некоторой окрестности нуля $U = \{|x| < \delta, |y| < \nu\}$, все решения уравнения $v_2(x, y) = 0$ лежат на кривой $y = \psi(x)$, где функция $\psi : [-\delta, \delta] \rightarrow [-\nu, \nu]$ является C^2 -гладкой, и $\psi(0) = 0$, $\psi'(0) = -\frac{(v_2)_x}{(v_2)_y}\Big|_{(0,0)} = 0$. Следовательно, $\psi(x) = O(y^2)$.

Особые точки поля v лежат на кривой $y = \psi(x)$ и удовлетворяют уравнению $v_1 = 0$. Ограничив это уравнение на кривую $y = \psi(x)$, мы получим

$$\alpha(x) := v_1(x, \psi(x)) = 0.$$

Левая часть этого уравнения, в силу (9.2), имеет вид

$$\alpha(x) = ax^2 + bx\psi(x) + c\psi^2(x) + R_1(x, \psi(x)) = ax^2 + O(x^3),$$

9.1.5. Необходимость гиперболичности в критерии Андронова-Понтрягина

то есть $\alpha'(0) = 0$ и $\alpha''(x) = 2a + O(x)$. Уменьшив при необходимости окрестность U , будем считать, что $\alpha''(x) > \text{const} > 0$.

График функции α близок к параболе, которая касается оси абсцисс в нуле. Неформально говоря, мы покажем, что при правильно выбранном возмущении поля v новая функция α может иметь два нуля (как функция $ax^2 - \varepsilon$) или не иметь нулей вовсе (как функция $ax^2 + \varepsilon$). Поэтому возмущенное поле может иметь две особые точки или не иметь ни одной.

Пусть срезающая функция φ — произвольная неотрицательная C^2 -гладкая функция, для которой $\varphi \equiv 0$ вне U и $\varphi((x, y)) \equiv 1$ в некоторой окрестности нуля, причем $0 \leq \varphi \leq 1$. Особые точки поля $v_\varepsilon = v + (\varepsilon\varphi, 0)$ лежат на кривой $v_2 = 0$ (то есть $y = \psi(x)$) и удовлетворяют уравнению $v_1 + \varepsilon\varphi = 0$, ограниченному на кривую $y = \psi(x)$:

$$\alpha_\varepsilon(x) \equiv \alpha(x) + \varepsilon\varphi(x, \psi(x)) = 0.$$

При всех малых ε , $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\alpha_\varepsilon(x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\alpha(x) + \varepsilon\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(x, \psi(x)) > 0$ на отрезке $[-\delta, \delta] = \sigma$. Следовательно, производная $\frac{\partial}{\partial x}\alpha_\varepsilon$ монотонна на отрезке σ , и имеет не более одного нуля. По теореме Ролля, функция $\alpha_\varepsilon(x)$ имеет не больше двух нулей на этом отрезке. С другой стороны, при малом $\varepsilon < 0$ выполнено $\alpha_\varepsilon(0) = \varepsilon\varphi(0) < 0$, и $\alpha_\varepsilon(\pm\delta) = \alpha(\pm\delta) > 0$. Значит, функция α_ε имеет не меньше двух нулей на σ . Следовательно, их ровно два.

График функции α_ε — выпуклый вверх и лежит над своей касательной в нуле, которая горизонтальна, поскольку $\frac{\partial}{\partial x}\alpha_\varepsilon|_{x=0} = \alpha'(0) = 0$. Следовательно, при $\varepsilon > 0$ функция α_ε не имеет нулей на σ . \square

Итак, поле v_ε имеет при $\varepsilon < 0$ на две особые точки больше, чем при $\varepsilon > 0$. Значит, поле v структурно неустойчиво.

Отсюда следует, что и поле w структурно неустойчиво, так как сколь угодно близко к нему мы нашли структурно неустойчивое поле v . \square

9.1.5.2 Необходимость гиперболичности циклов

Предельные циклы и топология одномерных отображений

Напомним, что предельный цикл — это изолированная замкнутая фазовая кривая. Рассмотрим трансверсаль к предельному циклу. В разделе 8.2.1 мы построили отображение Пуанкаре — отображение трансверсали в себя вдоль траекторий векторного поля. Само существование отображения Пуанкаре позволяет дать простое описание поведения траекторий в окрестности предельного цикла. Из определения следует, что отображение Пуанкаре имеет изолированную неподвижную точку на пересечении трансверсали с циклом.

Лемма 9.1.11. *В малой окрестности точки пересечения трансверсали с предельным циклом отображение Пуанкаре по одну сторону от этой точки либо приближает все точки к ней, либо удаляет.*

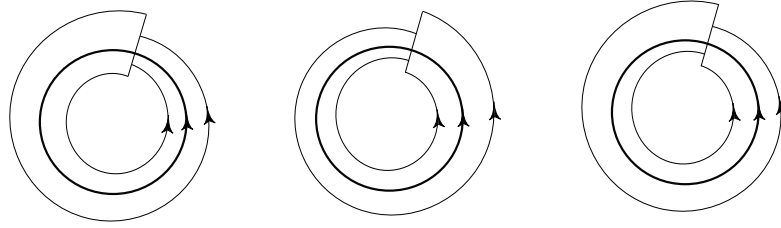


Рис. 9.2: Орбитально устойчивый, неустойчивый и полустойчивый циклы

Доказательство. По определению отображения Пуанкаре, его неподвижные точки соответствуют периодическим решениям уравнения. Так как предельный цикл — изолированное периодическое решение, мы можем выбрать окрестность U точки O на трансверсали Γ , в которой отображение Пуанкаре не имеет других неподвижных точек, кроме точки O .

Пусть x — координата на отрезке Γ , для которой $x(O) = 0$. Утверждение леммы следует из того, что выражение $P(x) - x$ не меняет знак по одну сторону от нуля в U . Действительно, $P(x) < x$ означает, что точки приближаются к нулю под действием P , а неравенство $P(x) > x$ — что удаляются. Предположим, что выражение $P(x) - x$ меняет знак справа от нуля; тогда для некоторых $0 < x_1 < x_2$ выражения $P(x_1) - x_1$ и $P(x_2) - x_2$ разных знаков. По теореме о промежуточном значении, существует точка $x_3 \in [x_1, x_2]$, в которой $P(x_3) - x_3 = 0$. Эта точка — неподвижная для отображения P , принадлежит окрестности U и отлична от нуля. Противоречие завершает доказательство леммы. \square

Итак, все траектории по одну сторону предельного цикла приближаются или удаляются от него. Соответственно, возможны лишь три варианта поведения траекторий вблизи предельного цикла: либо все близкие траектории приближаются к циклу, либо все траектории отдаляются от него, либо по одну сторону от цикла траектории приближаются, а по другую — отдаляются. В этих случаях цикл называют орбитально устойчивым, неустойчивым и полустойчивым соответственно, см. рис 9.2.

Хирургия

Чтобы доказать необходимость условия гиперболичности предельных циклов в критерии Андронова-Понтрягина, нам понадобится прием, который называется *хирургией*. А именно, из фазового пространства вырезается кусочек, и вместо него вставляется новое векторное поле с предписанными свойствами. Весь остальной фазовый портрет не меняется. Перейдем к точному изложению.

Лемма 9.1.12 (Лемма о хирургии). *Рассмотрим стандартное векторное поле e_1 в квадрате $K = \sigma^2$, $\sigma = [-1, 1]$. Для любого C^2 -гладкого диффеоморфизма $\varphi: \sigma \rightarrow \sigma$, тождественного в окрестности концов отрезка σ и близкого к тождественному на σ , существует C^1 -гладкое векторное поле w в квадрате K , совпадающее со стандартным в окрестности его границы, близкое к стандартному и такое, что отображение $\{-1\} \times \sigma \rightarrow \{1\} \times \sigma$ вдоль траекторий поля w совпадает с φ .*

9.1.5. Необходимость гиперболичности в критерии Андронова-Понтрягина

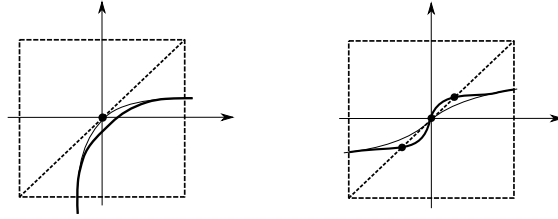


Рис. 9.3: Два типа отображений Пуанкаре негиперболического предельного цикла и их возмущения

Доказательство. Лемма кажется очевидной: есть огромная свобода в выборе поля w . Приведем подробное доказательство. Построим сначала первый интеграл F поля w , а потом уже само поле. Пусть x и y — естественные координаты на K , $e_1 = \frac{\partial}{\partial x}$. Положим: $F(-1, y) \equiv y$. Мы хотим, чтобы точки $(-1, y)$ и $(1, \varphi(y))$ лежали на одной фазовой кривой поля w , поэтому первый интеграл должен принимать одинаковые значения в точках $(-1, y)$ и $(1, \varphi(y))$:

$$F(1, \varphi(y)) = y, \text{ то есть } F(1, y) = \varphi^{-1}(y).$$

Продолжим теперь функцию F в квадрат K . Рассмотрим C^1 -гладкую функцию $\lambda(x)$ на σ : $\lambda(x) \equiv 1$ в односторонней окрестности -1 и $\lambda(x) \equiv 0$ в окрестности 1 . Положим:

$$F(x, y) = y\lambda(x) + \varphi^{-1}(y)(1 - \lambda(x)).$$

Теперь $F(-1, y) = y$ и $F(1, y) = \varphi^{-1}(y)$. Построим поле w с первым интегралом F :

$$w = \frac{\partial}{\partial x} + W \frac{\partial}{\partial y}, \quad W = -\frac{F_x}{F_y}.$$

Отметим, что $F_y \neq 0$ в K . Так как первый интеграл не зависит от x в окрестности границы квадрата, поле w совпадает с полем $\frac{\partial}{\partial x}$ на этих границах. Отображение вдоль траекторий поля w совпадает с φ : каждая точка $(-1, y)$ переходит в единственную точку на $(1, y)$ с тем же значением первого интеграла — точку $(1, \varphi(y))$. Искомое поле w построено. \square

Структурная неустойчивость негиперболических предельных циклов

Лемма 9.1.13. Пусть векторное поле имеет негиперболический предельный цикл. Тогда оно не структурно устойчиво.

Доказательство. Рассмотрим поле v с негиперболическим предельным циклом γ . По определению негиперболичности, график соответствующего этому циклу отображения Пуанкаре касается в нуле прямой неподвижных точек $y = x$. Поэтому либо график отображения Пуанкаре, либо график ему обратного, имеет вид, показанный на рисунке 9.3. В первом случае цикл параболический, $P(x) - x < 0$ при $x \neq 0$; во втором случае цикл притягивающий, $P(x) - x < 0$ при $x > 0$ и $P(x) - x > 0$ при $x < 0$.

В первом случае существует отображение Q , C^2 -близкое к P , которое совпадает с P вне малой окрестности нуля и не имеет неподвижных точек. Его график показан жирной линией на рисунке. По лемме о хирургии, существует векторное поле w , близкое к полю v , которое вблизи γ не имеет предельных циклов. Вне малой окрестности цикла γ поля v и w совпадают. Поэтому число предельных циклов поля w на единицу меньше, чем у поля v . Такие поля не могут быть орбитально топологически эквивалентными.

Во втором случае существует отображение Q , C^2 -близкое к P , $Q(0) = 0$, имеющее в нуле производную $Q'(0) = 1 + \varepsilon$, $0 < \varepsilon \ll 1$. Это отображение имеет две близких к нулю притягивающих неподвижных точки по теореме о промежуточном значении. По лемме о хирургии, существует поле w , совпадающее с v вне малой окрестности цикла γ и имеющее отображение Пуанкаре, равное Q . У поля w в окрестности цикла γ есть три предельных цикла. Всего предельных циклов у поля w на два больше, чем у поля v . Такие поля не могут быть орбитально топологически эквивалентными.

Значит, в обоих случаях поле v не является структурно устойчивым. \square

Доказательство структурной неустойчивости полей со связками сепаратрис сложнее. При возмущении такого поля связка сепаратрис может разрушиться — но при этом с фазовым портретом могут произойти и другие изменения, в том числе создание новой сепаратрисной связки. Мы отложим это доказательство до раздела 9.1.7.4 (см. лемму 9.1.38).

9.1.6 Предельное поведение траекторий. Теорема Пуанкаре-Бендиксона

В этом разделе мы опишем предельное поведение траекторий векторных полей на сфере (теорема 9.1.6).

9.1.6.1 α - и ω -предельные множества

Описывать предельное поведение траекторий векторного поля удобнее всего с помощью α - и ω -предельного множества. Неформально говоря, это множества, к которым накапливается траектория векторного поля в прошлом и в будущем.

Траекторию (орбиту) точки x под действием векторного поля мы будем обозначать $\text{orb } x = \{g_v^t x, t \in \mathbb{R}\}$; чтобы подчеркнуть зависимость от поля v , мы иногда будем писать $\text{orb}_v x$.

Определение 9.1.14. ω -предельное множество точки x — это множество точек накопления орбиты точки x в будущем: $y \in \omega(x)$ если и только если $y = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ для некоторой последовательности точек $x_n = g_v^{t_n} x$, где $t_n \rightarrow +\infty$.

α -предельное множество точки x — это множество точек накопления орбиты точки x в прошлом: $y \in \alpha(x)$ если и только если $y = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ для некоторой последовательности точек $x_n = g_v^{t_n} x$, где $t_n \rightarrow -\infty$.

Опять-таки, чтобы подчеркнуть зависимость от v , мы иногда будем писать $\alpha_v(x), \omega_v(x)$.

9.1.6. *Предельное поведение траекторий. Теорема Пуанкаре-Бендиксона*

Например, если траектория точки x стремится к особой точке, то множество $\omega(x)$ совпадает с этой точкой. Если траектория стремится к циклу, то $\omega(x)$ совпадает с циклом.

Лемма 9.1.15. *α - и ω -предельное множество любой точки под действием поля v на сфере непусто, замкнуто и связно.*

Доказательство. Рассмотрим ω -предельное множество точки x под действием поля v . Возьмем любую последовательность $t_n \rightarrow +\infty$. Из последовательности точек на сфере $x_n = g_v^{t_n}x$ всегда можно выбрать сходящуюся подпоследовательность, в силу компактности сферы. Предел этой последовательности принадлежит $\omega(x)$. Мы доказали, что ω -предельное множество непусто.

Докажем замкнутость $\omega(x)$. Пусть точка y не принадлежит множеству $\omega(x)$. Докажем, что для некоторого $T \in \mathbb{R}$ участок траектории точки x , $\{g_v^t x, t > T\}$, не пересекает некоторую малую окрестность точки y . Действительно, пусть для любого $T = 1, 2, 3, \dots$ такой участок траектории посещает любую малую окрестность точки y . Выберем последовательность точек $g_v^{t_k} x$, $t_k > k$, так, что точка $g_v^{t_k} x$ лежит в $1/k$ -окрестности точки y . Тогда $\lim_{k \rightarrow +\infty} g_v^{t_k} x = y$, и потому $y \in \omega(x)$.

Полученное противоречие показывает, что если точка y не принадлежит $\omega(x)$, то для некоторого T множество $\{g_v^t x, t > T\}$, не пересекает некоторую окрестность U точки y . Тогда $\omega(x)$ тоже не пересекает эту окрестность. Итак, дополнение к $\omega(x)$ содержит любую точку y вместе с её окрестностью, а потому является открытым; само же множество $\omega(x)$ замкнуто.

Докажем, что множество $\omega(x)$ связно. Предположим противное: пусть это множество можно разбить на замкнутые непустые подмножества Z_1, Z_2 , открытые окрестности которых U_1, U_2 не пересекаются. Рассмотрим последовательности точек $g_v^{t_k} x$, $g_v^{s_k} x$, которые сходятся к точкам из множеств Z_1 и Z_2 . Для достаточно большого k , имеем $g_v^{t_k} x \in U_1$, $g_v^{s_k} x \in U_2$. Дуга траектории $g_v^t x, t \in [t_k, s_k]$, идет из U_1 в U_2 , а потому содержит точку $g_v^{T_k} x$ из дополнения $S^2 \setminus (U_1 \cup U_2)$. Из последовательности точек $g_v^{T_k} x$ выберем сходящуюся подпоследовательность. Её предел — точка из $\omega(x)$, которая лежит вне $U_1 \cup U_2$, а потому не содержится в $Z_1 \cup Z_2 = \omega(x)$. Противоречие показывает, что множество $\omega(x)$ связно. □

Кроме того, мы покажем, что множества $\alpha(x)$, $\omega(x)$ инвариантны, то есть состоят из целых траекторий векторного поля.

Лемма 9.1.16. *Если точка y лежит в ω -предельном множестве точки x , то вся её орбита $\{g_v^t y, t \in \mathbb{R}\}$ тоже принадлежит $\omega(x)$. То же верно для $\alpha(x)$.*

Доказательство. Пусть $y = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ для последовательности $x_n = g_v^{t_n} x$, где $t_n \rightarrow +\infty$. Тогда точка $g_v^t y$ — предел последовательности точек $g_v^t x_n = g_v^{t+t_n} x$, в силу непрерывности отображения g_v^t . Отсюда следует, что точка $g_v^t y$ тоже принадлежит $\omega(x)$. Доказательство для α -предельного множества аналогично. □

9.1.6.2 Предельное поведение траекторий типичного векторного поля на сфере

Здесь мы докажем первое утверждение центрального результата этого параграфа — теоремы 9.1.6, по модулю теоремы 9.1.4 и теоремы Пуанкаре-Бендиксона.

Теорема 9.1.17 (Пуанкаре-Бендиксона). *Для любого C^1 -гладкого векторного поля на сфере с гиперболическими особыми точками, ω -предельное множество любой траектории — либо особая точка, либо цикл, либо полицикл (многоугольник, образованный связками сепаратрис).*

Теорема Пуанкаре-Бендиксона проиллюстрирована на рис. 9.4 и доказана в разделе 9.1.6.3. Там же дано более точное определение полицикла.

Доказательство первого утверждения теоремы 9.1.6. Пусть v — поле, удовлетворяющее критерию Андронова-Понтрягина. По теореме 9.1.4, множество таких полей открыто и всюду плотно. Рассмотрим произвольное начальное условие x . Теорема 9.1.6 утверждает, что ω -предельное множество точки x — либо особая точка, либо гиперболический предельный цикл. Это немедленно следует из теоремы Пуанкаре-Бендиксона и критерия Андронова-Понтрягина.

Действительно, все особые точки поля v — гиперболические. Поэтому применима теорема Пуанкаре-Бендиксона. В силу этой теоремы, ω -предельное множество точки x либо особая точка, либо замкнутая траектория (в силу критерия Андронова-Понтрягина это — гиперболический предельный цикл), либо полицикл. Но поле v не имеет полициклов, так как у него нет связок сепаратрис. Это доказывает первое утверждение теоремы. □

Для доказательства второй части теоремы 9.1.6 мы покажем, что если у поля на сфере все особые точки и все периодические орбиты гиперболические, то их конечное число. Конечность числа гиперболических особых точек следует из компактности сферы, а конечность числа гиперболических циклов доказывается гораздо сложнее. Доказательство завершается в разделе 9.1.6.4.

9.1.6.3 Теорема Пуанкаре-Бендиксона

Полициклы

Начнем с рисунка, на котором изображены различные возможные ω -предельные множества и стремящиеся к ним траектории. Случай (с) — один из бесконечного множества разнообразных примеров, которые покрываются следующим определением.

Определение 9.1.18. Полицикл векторного поля — это конечный ориентированный граф Γ на сфере, такой что:

- Γ — непрерывный образ ориентированной окружности;

9.1.6. Пределное поведение траекторий. Теорема Пуанкаре-Бендиксона

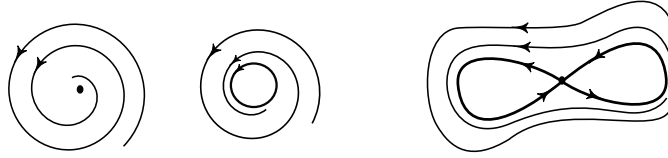


Рис. 9.4: (а) Особая точка (б) Цикл (с) Полицикл

- Вершины Γ — особые точки поля;
- Ребра графа — фазовые кривые поля. Ориентация ребер, индуцированная отображением окружности, совпадает с временной ориентацией ребер.

Для полей с гиперболическими особыми точками нетривиальный (состоящий более, чем из одной точки) полицикл — это сепаратрисный многоугольник, вершины которого — гиперболические седла S_1, \dots, S_k (некоторые из них могут совпадать), а ребра — сепаратрисы, идущие из предыдущего седла в следующее.

Приведенная выше формулировка теоремы Пуанкаре-Бендиксона больше не требует пояснений.

ω -предельные множества без особых точек

Теорема 9.1.19. Для любого C^1 -гладкого векторного поля на сфере ω -предельное множество, не содержащее особых точек, является циклом.

Собственно, это и есть оригинальная теорема Пуанкаре-Бендиксона. Предыдущая теорема — её естественное обобщение.

Доказательство. Пусть точка y принадлежит ω -предельному множеству точки x , не содержащему особых точек. По определению, это означает, что некоторая последовательность точек x_n из орбиты x , $x_n = g_v^{t_n} x$, $t_n \rightarrow +\infty$, сходится к точке y . По условию, y — неособая точка.

Докажем, что $\text{orb } y$ — цикл. Предположим противное. Рассмотрим точку z из ω -предельного множества точки y : $z = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$, $y_n = g_v^{t_n}(y)$, $t_n \rightarrow +\infty$. Точка z принадлежит замыканию орбиты точки y ; эта орбита целиком лежит в $\omega(x)$ в силу инвариантности ω -предельного множества. Поэтому $z \in \overline{\omega(x)} = \omega(x)$. Последнее равенство следует из замкнутости ω -предельного множества. Значит, точка z — неособая.

Воспользуемся теоремой о выпрямлении. Пусть U , $z \in U$ — окрестность точки z , в которой определено выпрямляющее отображение H , $H_*v = (1, 0)$. Пусть Γ — трансверсаль к полю v , проходящая через точку z , и $\pi : U \rightarrow \Gamma$ — проекция U на трансверсаль вдоль дуг траекторий поля, расположенных в U . Для больших n определены точки $y'_n = \pi(y_n)$ на Γ ; по непрерывности проекции, $\lim y'_n = z$.

Так как $\text{orb}(y)$ — не цикл, $y'_n \neq y'_{n+1}$. Рассмотрим мешок Бендиксона — область Ω , содержащую z , ограниченную дугой α фазовой кривой поля v от точки y'_n до точки y'_{n+1} и отрезком трансверсали $\sigma = [y'_n, y'_{n+1}]$ (см. рис. 9.5).

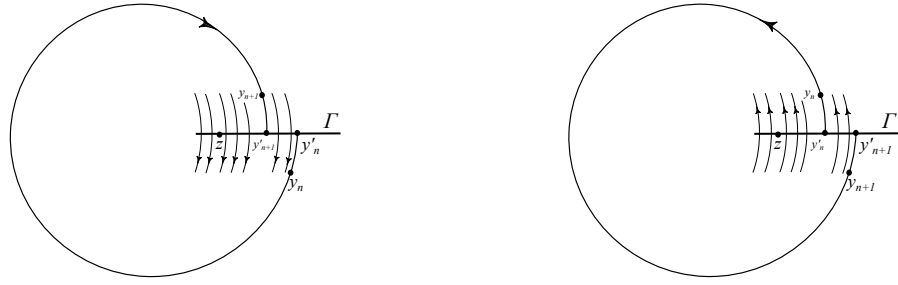


Рис. 9.5: Мешок Бендиксона.

На отрезке σ поле направлено или внутрь, или вне области Ω .

В первом случае (см. рис. 9.5 слева) никакая траектория поля v не может выйти из области Ω . Через дугу α выход невозможен по теореме единственности, через отрезок σ — потому, что через него все орбиты входят в область Ω . Но тогда никакая орбита поля v не может накапливаться к точке y_n . Действительно, по теореме о непрерывной зависимости, она должно пересечь отрезок σ ; но пересечь этот отрезок она может только один раз, после чего она попадет в область Ω и оттуда не выйдет. Следовательно, $y_n \notin \omega(x)$. Противоречие.

Рассмотрим теперь второй случай: пусть поле v на отрезке σ направлено вне области Ω (это возможно, только если $y'_n \in [y'_{n+1}, z]$); см. рис. 9.5 справа. В этом случае все орбиты поля v выходят из Ω . Но поскольку $z \in \Omega$, точка z не может лежать в ω -предельном множестве точки y . Противоречие показывает, что $\text{orb}(y) \subset \omega(x)$ — цикл.

Итак, траектория точка x накапливается к циклу. Поэтому для некоторого t точка $g_v^t x$ принадлежит полуокрестности цикла, в которой отображение Пуанкаре притягивает к циклу. Значит, $\omega(x)$ совпадает с этим циклом. \square

Второе ω -предельное множество

Вместе с множеством $\omega(x)$ естественно определить множество $\omega^2(x)$.

Определение 9.1.20. Множество $\omega^2(x)$ — это объединение

$$\omega^2(x) = \cup_{y \in \omega(x)} \omega(y).$$

В доказательстве предыдущей теоремы мы использовали это множество, когда рассмотрели точку $z \in \omega(y)$ для $y \in \omega(x)$. Так как множество $\omega(x)$ инвариантно и замкнуто, то множество $\omega^2(x)$ в нем содержится.

Упражнение 159. Выясните, чему равно $\omega^2(x)$, если $\omega(x)$ — особая точка, цикл и полицикл соответственно.

Упражнение 160. Пусть $\omega^2(x)$ содержит аттрактор. Докажите, что $\omega(x)$ совпадает с этим аттрактором.

λ -лемма и полициклы

Теорема Пуанкаре-Бендиксона следует из следующего предложения.

Предложение 9.1.21. Пусть v — C^1 -гладкое векторное поле на сфере с гиперболическими особыми точками. Если орбита точки x под действием поля v совпадает со своим ω -предельным множеством (а значит, $\omega(x) = \omega^2(x)$), то эта орбита — либо особая точка, либо цикл. Если же $\omega(x) \neq \omega^2(x)$, то $\omega(x)$ — полицикл.

Доказательство. Пусть множество $\omega^2(x)$ содержит неособую точку $z = \lim y_n, y_n = g_v^{t_n}(y)$, где $y \in \omega(x)$. Как и в теореме 9.1.19, построим мешок Бендиксона с помощью точек y_n . Если все точки y_n различны, построение возможно; так как орбита точки x накапливается к каждой из точек y_n , она зайдет в мешок и никогда не выйдет из него. Значит, она не может накапливаться к тем элементам последовательности y_n , которые оказались снаружи мешка.

Упражнение 161. Проведите это рассуждение подробно.

Противоречие показывает, что среди точек y_n есть совпадающие, то есть множество $\omega(x)$ содержит цикл. Значит, как и в предыдущей теореме, $\omega(x)$ совпадает с этим циклом.

Теперь пусть множество $\omega^2(x)$ состоит из особых точек. Если $\omega^2(x) = \omega(x)$, то это множество одноточечное, так как множество $\omega(x)$ связно и состоит из изолированных особых точек. В этом случае заключение леммы выполнено. Пусть $\omega^2(x) \neq \omega(x)$.

Очевидно, особые точки из множества $\omega^2(x)$ не могут быть отталкивающими. Если $\omega^2(x)$ содержит аттрактор z , то к нему притягиваются орбиты точек из $\omega(x)$, достаточно близких к z , а значит, и орбита точки x , которая накапливается к точкам из $\omega(x)$. Поэтому $z = \omega(x) = \omega^2(x)$.

Остается случай, когда множество $\omega^2(x)$ состоит из седел.

Дальнейшее доказательство основано на утверждении, многомерный аналог которого называется λ -леммой.

Лемма 9.1.22. Пусть для некоторой точки z седло S поля v принадлежит множеству $\omega(z)$. Тогда есть две сепаратрисы этого седла: входящая s и выходящая u (они могут и совпадать), которые целиком принадлежат множеству $\omega(z)$.

Доказательство. Достаточно доказать, что малые дуги u' и s' сепаратрис u и s с началом и концом S соответственно, принадлежат $\omega(z)$.

Выберем малую окрестность U точки S . Пусть $\text{orb}(z) \ni z_n, z_n \rightarrow S$. Тогда орбита точки z содержит и дуги γ_n фазовых кривых, проходящие через точки z_n и принадлежащие U . Покажем, что эти дуги накапливаются к $s' \cup u'$.

Воспользуемся теоремой Гробмана-Хартмана. Применим в окрестности U гомеоморфизм H , который переведет фазовый портрет поля v в фазовый портрет линейного поля

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda x \\ \dot{y} = -y, \end{cases} \quad \lambda > 0 \tag{9.3}$$

Пусть точки z_n переходят в точки $\tilde{z}_n = (x_n, y_n) \rightarrow 0$ под действием H , а дуги γ_n — в $\tilde{\gamma}_n$; без ограничения общности можно считать, что $x_n > 0, y_n > 0$. Уравнение 9.3 легко решить и получить, что дуги $\tilde{\gamma}_n$ задаются уравнениями $x = c_n y^{-\lambda}$, где $c_n = x_n y_n^\lambda \rightarrow 0$. Видно, что при $n \rightarrow \infty$ такие графики накапливаются к объединению отрезков сепаратрис нуля $\{0\} \times [0, \delta] \cup [0, \delta] \times \{0\}$. Значит, дуги γ_n накапливаются к их прообразам под действием H — объединению малых дуг u', s' сепаратрис седла S . □

Теперь завершим доказательство предложения 9.1.21. Нам осталось рассмотреть случай, когда $\omega(x) \neq \omega^2(x)$ и множество $\omega^2(x)$ состоит из седел. Обозначим одно из седел S_1 . По λ -лемме, $\omega(x)$ содержит выходящую сепаратрису u_1 седла S_1 . Так как ω -предельное множество этой сепаратрисы содержится в $\omega^2(x)$, оно тоже является седлом; обозначим его S_2 . По индукции строим последовательность седел S_k и соединяющих их сепаратрис u_k , принадлежащих $\omega(x)$.

Осталось доказать, что построенная таким образом последовательность сепаратрис циклическая — это будет означать, что мы имеем дело с полициклом.

Поскольку сфера ориентируема, каждая направленная кривая коориентируема: у её малой окрестности определена правая и левая сторона. Левая сторона определяется так: вектор скорости ориентированной кривой в любой точке и направленная влево нормаль образуют положительно ориентированный репер. Пусть орбита точки x проходит близко к входящей сепаратрисе s гиперболического седла слева от нее; тогда она покидает окрестность этого седла, проходя близко от выходящей сепаратрисы u , по-прежнему находясь слева от нее. То есть орбита точки x всегда находится слева от сепаратрисы из $\omega(x)$, к которой она близка. Заметим, что сама сепаратриса u в этом случае тоже уходит влево от s . Поэтому для каждой сепаратрисы, содержащейся в $\omega(x)$, однозначно определена следующая — она уходит влево от предыдущей. Поскольку число всех таких сепаратрис конечно, последовательность, которую мы построили выше, циклическая. Итак, $\omega(x)$ — полицикл.

Поскольку ω -предельное множество связно, других полициклов оно не содержит. □

Тем самым доказана и теорема Пуанкаре-Бендиксона.

9.1.6.4 Конечность числа гиперболических циклов

Замкнутость множества $\text{Per } v$

Чтобы доказать, что число гиперболических предельных циклов в условиях теоремы 9.1.6 конечно, мы докажем более сильное утверждение, которое понадобится ниже.

Обозначим через \mathcal{V} множество всех C^1 -гладких векторных полей на сфере, имеющих только гиперболические особые точки и не имеющих седловых связок. Обозначим через $\text{Per } v$ объединение всех замкнутых фазовых кривых поля v .

Лемма 9.1.23. *Для любого поля $v \in \mathcal{V}$ множество $\text{Per } v$ замкнуто.*

9.1.6. Предельное поведение траекторий. Теорема Пуанкаре-Бендиксона

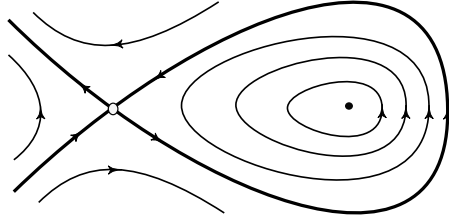


Рис. 9.6: Фазовый портрет уравнения Ньютона

Замечание 9.1.24. Это предложение неверно для произвольного поля v на сфере, см. рис. 9.6. В замыкание множества $\text{Per } v$ могут входить и негиперболические особые точки, и полициклы.

Доказательство. Пусть γ_n — последовательность циклов поля v . Рассмотрим ее верхний топологический предел — множество

$$\Sigma = \limsup \gamma_n = \{y \mid \exists x_n \in \gamma_n, x_n \rightarrow y\}.$$

По теореме о непрерывной зависимости от начального условия, множество Σ состоит из целых траекторий поля v . Нам надо доказать, что оно состоит из циклов.

Пусть Σ содержит изолированную точку. Тогда эта точка — особая, и в любой ее окрестности лежат замкнутые кривые γ_n при достаточно больших n . Это возможно для центра по линейным членам, но невозможно для гиперболической особой точки.

Итак, в множестве Σ нет изолированных точек. Тогда множество Σ бесконечно. Значит, оно содержит неособую точку y .

Если орбита точки y замкнута, мы докажем, что она совпадает с Σ . Это рассуждение приведено в самом конце доказательства. Сначала предположим, что орбита точки y не замкнута. По теореме Пуанкаре-Бендиксона $\omega(y)$ может быть особой точкой, циклом или полициклом. Полициклов у полей $v \in \mathcal{V}$ нет. Поэтому возможны только два случая.

1. $\alpha(y)$ и $\omega(y)$ — особые точки. Они не могут быть аттракторами или репеллерами; в противном случае орбиты γ_n не были бы замкнутыми, а оставались бы навечно в будущем в окрестности $\omega(y)$ или в прошлом вблизи $\alpha(y)$.

Итак, $\alpha(y)$ и $\omega(y)$ — седла. Тогда орбита y — седловая связка, которой не должно быть у поля v . Противоречие.

2. $\alpha(y)$ или $\omega(y)$ — цикл. Мы приведем это предположение к противоречию. Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 9.1.25 (Лемма о незадевании). У каждого цикла C^1 -гладкого поля v на сфере существует окрестность U , которую “не задевают” другие циклы поля v : каждый цикл либо принадлежит окрестности U , либо не пересекает её.

Более того, для любой окрестности \tilde{U} этого цикла существует меньшая окрестность $U \subset \tilde{U}$, которую не задевают циклы поля v .

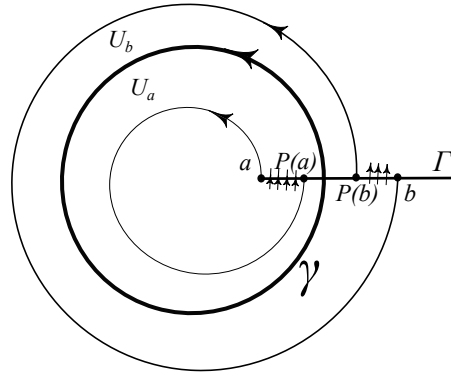


Рис. 9.7: Лемма о незадевании

Доказательство. Рассмотрим цикл γ поля v и отображение Пуанкаре этого цикла, обозначаемое P и определенное на трансверсали Γ . Пусть $O = \gamma \cap \Gamma$. Выберем точки a и b на трансверсали Γ по разные стороны от точки O (для второго утверждения леммы эти точки нужно выбрать достаточно близко к O). Рассмотрим область U , ограниченную двумя замкнутыми кривыми: первая кривая состоит из дуги γ_a траектории векторного поля от a до $P(a)$ и отрезка $[a, P(a)]$ (он может вырождаться в точку), а вторая — из дуги γ_b траектории поля от b до $P(b)$ и отрезка $[b, P(b)]$. Область U разделена на две части кривой γ : $U_a \ni a$ и $U_b \ni b$. Докажем, что область U_a обладает тем же свойством, которое мы хотим доказать для U , то есть “не задевает” циклов поля v . Доказательство для U_b будет аналогично.

Утверждение следует из того, что U_a является мешком Бендиксона для поля v или $-v$, из которого вырезана область, ограниченная циклом γ .

Действительно, орбиты поля v могут попадать в область U_a только через отрезок $[a, P(a)]$. Если на этой трансверсали поле направлено внутрь U_a , траектории, зайдя в область U_a , не смогут выйти из неё; поэтому замкнутые траектории должны или содержаться внутри области U_a , или не пересекать её. Если на отрезке $[a, P(a)]$ поле направлено вовне области U_a , то траектория, выйдя из области U , не может вернуться обратно; мы снова получаем, что замкнутые траектории не задевают область U_a . \square

Мы можем теперь вернуться к доказательству леммы 9.1.23. Пусть $\gamma = \omega(y)$ — цикл. Пусть U — окрестность цикла γ , которую не задевают циклы поля v ; выберем её достаточно маленькой, так, что $y \notin U$. Так как $\text{orb } y$ накапливается к γ , по теореме о непрерывной зависимости решения уравнения от начального условия, циклы γ_n при достаточно большом n пересекают окрестность U . Тогда они принадлежат ей целиком и не могут накапливаться к точке y — противоречие.

Осталось рассмотреть случай, когда орбита точки y сама является циклом. Тогда циклы γ_n для большого n пересекают малую окрестность этого цикла, а значит, находятся в ней целиком. В этом случае $\Sigma = \text{orb } y$. Лемма доказана. \square

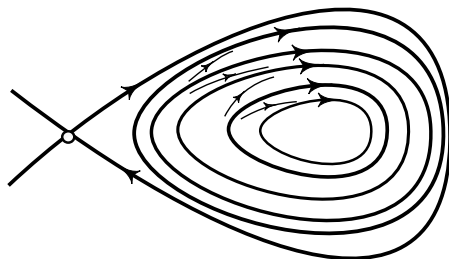


Рис. 9.8: Счетное число предельных циклов

Доказательство конечности числа гиперболических предельных циклов

Предложение 9.1.26. *Для векторных полей, удовлетворяющих критерию Андронова-Понтрягина, число предельных циклов конечно.*

Замечание 9.1.27. *Это утверждение неверно для полей, имеющих негиперболические особые точки или замкнутые орбиты, а также полициклы, см. рис. 9.8.*

Доказательство. Предположим противное. Выберем бесконечную последовательность γ_n циклов поля v и рассмотрим её верхний топологический предел. Из компактности сферы следует, что он непуст. В доказательстве леммы 9.1.23 мы выяснили, что тогда некоторая подпоследовательность последовательности γ_n сходится к циклу γ поля v : в каждой окрестности цикла γ лежит бесконечно много циклов из последовательности γ_n . Но тогда γ не является предельным циклом (изолированной периодической траекторией). Противоречие завершает доказательство. \square

Мы доказали, что поле v , удовлетворяющее критерию Андронова-Понтрягина, имеет лишь конечное число особых точек и предельных циклов. Этим закончено доказательство теоремы 9.1.6.

9.1.7 Типичность структурно устойчивых полей

Мы переходим к доказательству теоремы 9.1.4: мы докажем, что множество полей, удовлетворяющих критерию Андронова-Понтрягина, открыто и всюду плотно.

9.1.7.1 Лемма Сарда

Лемма Сарда — фундаментальный факт, лежащий в основе целой области — теории катастроф.

Напомним несколько определений из анализа.

Определение 9.1.28. Критическая точка C^1 -гладкого отображения $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ — это такая точка x , в которой ранг дифференциала отображения f меньше размерности образа: $\text{rank } df(x) < m$.

Для наших целей основным является случай $m = n$. В этом случае определение упрощается.

Определение 9.1.29. Точка x — критическая для C^1 -гладкого отображения $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, если в ней якобиан отображения равен нулю: $\det df(x) = 0$.

Определение 9.1.30. Критическое значение отображения — это его значение в критической точке.

Определение 9.1.31. Подмножество \mathbb{R}^n имеет меру ноль, если его можно покрыть объединением счетного числа параллелепипедов сколь угодно малого суммарного объема.

Упражнение 162. Докажите, что (а) любое конечное множество, (б) множество натуральных чисел на прямой, (с) любое счетное множество на прямой имеет меру ноль.

Упражнение 163. Докажите, что счетное объединение множеств меры ноль имеет меру ноль.

Лемма 9.1.32 (Лемма Сарда для $m = n$). Множество критических значений C^1 -гладкого отображения из \mathbb{R}^n в \mathbb{R}^n имеет меру 0.

Аналог этой теоремы верен для любых m и n , но в этом случае отображение должно быть C^N -гладким, где N зависит от m и n .

Доказательство. Достаточно доказать лемму для отображения f , определенного в окрестности единичного куба K с вершинами на решетке \mathbb{Z}^n , а затем воспользоваться тем, что счетное объединение множеств меры 0 само имеет меру 0 (см. упражнение 163).

Мы приведем доказательство для случая $n = 2$; общий случай отличается от двумерного только техническими деталями.

Неформально говоря, мы увидим, что если покрыть критическую точку отображения f маленьким прямоугольником Π , то площадь его образа $f(\Pi)$ будет гораздо меньше, чем площадь самого прямоугольника Π . Это следует из того, что дифференциал в критической точке вырожден. Осталось покрыть все критические точки объединением прямоугольников; образы этих прямоугольников покрывают критические значения отображения f . Предыдущее соображение позволяет оценить площадь этого покрытия и доказать, что множество критических точек имеет меру ноль.

Превращать это рассуждение в формальное доказательство приходится с осторожностью, потому что множества $f(\Pi)$ — не прямоугольники и могут иметь сложное строение. Мы покажем, как обойти эту трудность.

Рассмотрим отображение

$$(x, y) \mapsto G(x, y) = \frac{|f(y) - f(x) - df(x)(y - x)|}{|y - x|},$$

доопределенное нулем при $x = y$. Нам понадобится следующее утверждение.

Предложение 9.1.33. *Отображение G равномерно непрерывно.*

Доказательство. Докажем, что это отображение непрерывно. Непрерывность в точках (x, y) , $x \neq y$, очевидна. Докажем непрерывность в точке (z, z) : проверим, что если $x, y \rightarrow z$, то $G(x, y) \rightarrow 0$.

По теореме Ньютона-Лейбница для ограничения $f|_{[x,y]}$,

$$f(y) - f(x) - df(x)(y-x) = \int_0^1 df(x+t(y-x))(y-x)dt - df(x)(y-x) = \int_0^1 (df(x+t(y-x)) - df(x))(y-x)dt. \quad (9.4)$$

Если точки x, y достаточно близки к z , то оба дифференциала в скобках близки к $df(z)$ в операторной норме, поэтому операторная норма их разности мала. Значит, для любого ε , если x, y достаточно близки к z , то норма разности (9.4) меньше $\varepsilon|y-x|$, а потому $|G(x, y)| < \varepsilon$.

Мы получили, что отображение G непрерывно на компактном множестве $x \in K, y \in K$. Значит, оно равномерно непрерывно. \square

Поскольку $G(x, x) = 0$ для любого x , мы получаем, что для любого ε можно найти δ , так что из $|x-y| < \delta$ следует $|G(x, y)| < \varepsilon$.

Далее, так как линейный оператор $df(x)$ непрерывно зависит от точки x , существует максимум его нормы $M = \max_{x \in K} \|df(x)\|$.

Рассмотрим разбиение квадрата K на прямоугольники с диагональю $l < \delta$. Пусть U — объединение тех прямоугольников, которые содержат (хотя бы одну) критическую точку отображения f . Тогда множество $f(U)$ содержит все критические значения отображения f .

Пусть Π — один из прямоугольников в U , x — критическая точка внутри него. В силу выбора δ , имеем

$$|f(y) - f(x) - df(x)(y-x)| \leq \varepsilon|x-y| \leq \varepsilon l$$

для любого $y \in \Pi$. Кроме того, $df(x)$ — вырожденное линейное отображение, поэтому образ прямоугольника Π под действием аффинного отображения $y \mapsto f(x) + df(x)(y-x)$ с линейной частью $df(x)$ — отрезок. Так как норма $df(x)$ не больше M , длина этого отрезка не превышает lM .

Итак, образ прямоугольника Π под действием f принадлежит εl -окрестности отрезка, длина которого не превышает lM . Понятно, что эта окрестность принадлежит прямоугольнику площади $l\varepsilon \cdot (lM + l\varepsilon)$. Поскольку в квадрате K помещается всего $2/l^2$ прямоугольников с диагональю l , образ $f(U)$ можно покрыть прямоугольниками общей площади не более

$$\frac{2}{l^2} l\varepsilon \cdot (lM + l\varepsilon) = 2M\varepsilon + 2\varepsilon^2.$$

Так как ε можно выбрать произвольно малым, такое покрытие может иметь сколь угодно малую площадь.

Мы построили покрытие множества критических значений прямоугольниками сколь угодно малой суммарной площади. Значит, это множество имеет меру 0. \square

Следствие 9.1.34. Для любого C^1 -гладкого отображения из \mathbb{R}^n в \mathbb{R}^n существует сколь угодно малое некритическое значение.

9.1.7.2 Гиперболические особые точки: плотность

Лемма 9.1.35. В пространстве C^1 -гладких векторных полей на сфере множество полей, все особые точки которых гиперболические, плотно.

Доказательство. Векторному полю v на плоскости соответствует отображение $x \mapsto v(x) = (v_1(x_1, x_2), v_2(x_1, x_2))$. Особая точка — это прообраз нуля при отображении v . Она невырождена, если в ней якобиан отображения v отличен от нуля. Другими словами, она невырождена, если она некритична.

Рассмотрим произвольное поле v , и пусть малое ε — его некритическое значение. Оно существует по следствию 9.1.34. Тогда 0 — некритическое значение отображения $v_\varepsilon = v - \varepsilon$. В силу сказанного выше, все особые точки поля v_ε невырождены. По теореме об обратном отображении, невырожденная особая точка изолирована. Замкнутое множество, состоящее из изолированных точек на сфере, конечно. Итак, у поля v_ε конечное число невырожденных особых точек на сфере. Они могут быть или гиперболическими, или центрами по линейным членам. Во втором случае поле v_ε можно возмутить так, что все особые точки возмущенного поля станут гиперболическими. Это показано в доказательстве леммы 9.1.7. Итак, сколь угодно близко к полю v мы нашли поле, все особые точки которого гиперболические. \square

Мы доказали, что множество векторных полей на сфере с гиперболическими особыми точками плотно. Докажем, что оно открыто.

9.1.7.3 Гиперболические особые точки: открытость

Лемма 9.1.36. В пространстве C^1 -гладких векторных полей на сфере множество полей, все особые точки которых гиперболические, открыто.

Доказательство. Рассмотрим поле v , все особые точки которого — гиперболические. Фиксируем одну из них, скажем, O . Мы докажем, что существует такая окрестность U точки O на сфере и такая окрестность W поля v в пространстве C^1 -гладких векторных полей, что любое поле $w \in W$ имеет в окрестности U единственную особую точку, и эта точка — гиперболическая.

Отсюда следует открытость условия гиперболичности особых точек. А именно, для каждой особой точки мы выбираем соответствующие окрестности U_j на сфере и W_j в пространстве C^1 -гладких векторных полей, а затем рассматриваем конечное пересечение $W = \cap W_j$. Каждое поле $w \in W$ имеет только гиперболические особые точки внутри окрестности $U = \cup U_j$. Но вне окрестности U поле v отделено от нуля, поэтому, уменьшая при необходимости окрестность W , мы можем считать, что поля $w \in W$ не имеют особых точек вне U .

Итак, докажем существование U и W . Выберем координату x в окрестности точки O , так что $x(O) = 0$, и положим $\frac{\partial v}{\partial x}(0) = A$. По условию, матрица A гиперболическая,

9.1.7. Типичность структурно устойчивых полей

следовательно, невырожденная. Возьмем $\varepsilon = \frac{1}{2\|A^{-1}\|}$. Тогда для любого $x \neq 0$, $|Ax| > \varepsilon|x|$. В качестве U возьмем диск с центром 0 столь малый, что всюду в U выполнено $|v(x)| > \frac{\varepsilon}{2}|x|$. Пусть r — радиус диска. Тогда на ∂U , $|v(x)| > m := \frac{\varepsilon}{2}r$. В окрестности U имеем $v = Ax + R_1$, $R_1 = o(x)$. Будем считать r столь малым, что в окрестности U выполнено $\|\frac{\partial R_1}{\partial x}\| = \|\frac{\partial v}{\partial x}(x) - A\| < \delta$; δ выбрано ниже. Этим завершается выбор U .

Возьмем теперь окрестность W поля v в пространстве C^1 -гладких векторных полей, столь малую, что для любого поля $w \in W$ выполнены неравенства:

$$w = v + R_2, |R_2| < \frac{m}{2}, \left\| \frac{\partial R_2}{\partial x} \right\| \leq \delta.$$

Пусть δ столь мало, что для любого оператора B , для которого $\|B\| < 2\delta$, оператор $A + B$ — гиперболический.

Из выбора окрестностей и констант видно следующее:

- Поля $w \in W$ не имеют особых точек на границе U , поскольку $|v| > m$ на ∂U , и $|w - v| = |R_2| < \frac{m}{2}$.
- Все особые точки полей $w \in W$ в U гиперболические, поскольку

$$\left\| \frac{\partial w}{\partial x} - A \right\| = \left\| \frac{\partial R_1}{\partial x} + \frac{\partial R_2}{\partial x} \right\| \leq 2\delta. \quad (9.5)$$

В силу выбора δ , оператор $\frac{\partial w}{\partial x}$, 2δ -близкий к A , является гиперболическим.

Кроме того, мы будем считать, что $\delta < \frac{\varepsilon}{3}$ — в конце доказательства станет понятно, для чего.

Докажем, что любое поле $w \in W$ имеет в окрестности U гиперболическую особую точку, и притом только одну. Идея доказательства следующая: мы рассмотрим семейство векторных полей $w_s \in W$, для которых $w_0 = v$ и $w_1 = w$,

$$w_s = v + s(w - v), \quad s \in [0, 1],$$

и исследуем, как движутся особые точки полей w_s при изменении s .

Рассмотрим отображение

$$\mathbf{W} : [0, 1] \times U \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (s, x) \mapsto w_s(x).$$

Линии уровня этого отображения $\{\mathbf{W}(s, x) = a\}$ задаются вектор-функциями $\varphi_a(s) : [0, 1] \rightarrow U$. По теореме о неявной функции,

$$\frac{\partial}{\partial s} \varphi_a(s) = \left(\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} \right)^{-1} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial s}(s, \varphi_a(s)). \quad (9.6)$$

Это условие является дифференциальным уравнением на функцию $\varphi_a(s)$. Рассмотрим его решение $\varphi_0(s)$ с начальным условием $\varphi_0(0) = 0$; поле w_s имеет ноль в точке

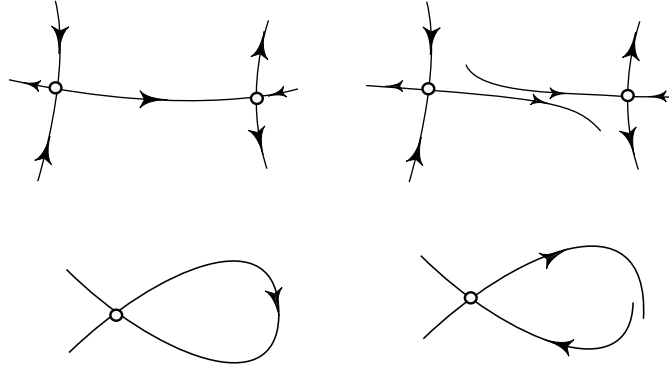


Рис. 9.9: Наивное размыкание седловых связей

$\varphi_0(s)$. Соответствующая интегральная кривая не может выходить за границу области $[0, 1] \times U$ в точках множества $[0, 1] \times \partial U$, так как поля w_s не имеют особых точек на ∂U . Значит, функция $\varphi_0(s)$ определена при всех $s \in [0, 1]$ по теореме о выходе за границу компакта. Поэтому каждое поле w_s имеет хотя бы одну особую точку — $\varphi_0(s) \in U$. Как мы отметили выше, эта особая точка гиперболическая.

Докажем, что она единственна. Это следует из того, что $\frac{\partial w_s}{\partial x}$ близко к A .

Действительно, для любого $x \in U$, учитывая, что $w_s(\varphi_0(s)) = 0$, получаем:

$$w_s(x) = \int_0^1 \frac{\partial w_s}{\partial x} \Big|_{\varphi_0(s) + \tau(x - \varphi_0(s))} (x - \varphi_0(s)) d\tau.$$

В силу (9.5), подынтегральное выражение близко к $A(x - \varphi_0(s))$. Интеграл можно оценить следующим образом:

$$|w_s(x) - A(x - \varphi_0(s))| \leq 2\delta|x - \varphi_0(s)|.$$

Осталось заметить, что в силу выбора ε при любом $x \neq \varphi_0(s)$

$$|A(x - \varphi_0(s))| > \varepsilon|x - \varphi_0(s)|,$$

и так как $\delta < \frac{\varepsilon}{3}$, получаем, что $w_s(x) \neq 0$. Итак, особая точка $\varphi_0(1)$ поля $w_1 = w$ единственна и гиперболична. □

Лемма об открытости условия гиперболичности особых точек доказана.

9.1.7.4 Отсутствие седловых связей: плотность

Напомним, что \mathcal{V} — это пространство всех C^1 -гладких векторных полей на сфере, имеющих только гиперболические особые точки и не имеющих седловых связей.

Лемма 9.1.37. *Множество \mathcal{V} плотно в пространстве C^1 -гладких векторных полей на сфере.*

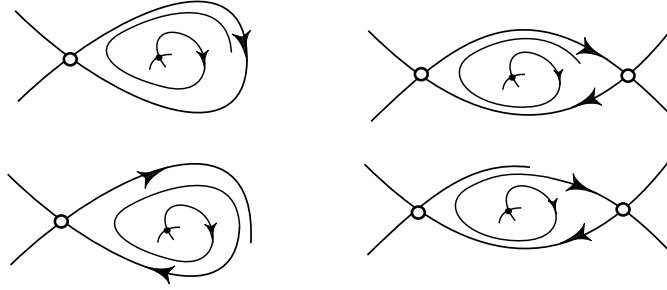


Рис. 9.10: Мелькающие сепаратрисные связки

Доказательство. Возьмем произвольное поле v , имеющее только гиперболические особые точки. Докажем, что в любой его окрестности есть поле w без седловых связок.

Если поле v не имеет седловых связок, то его можно взять в качестве поля w , и лемма доказана.

Если множество седловых связок поля v не пусто, то оно, по крайней мере, конечно. Действительно, поле v имеет лишь конечное число особых точек, и все они гиперболические; значит, число его седел тоже конечно, а у каждого из них ровно четыре сепаратрисы.

Мы докажем лемму индукцией по числу связок. А именно, мы докажем, что рядом с полем v , имеющим k связок, находится поле w , имеющее $k - 1$ связок.

На первый взгляд кажется, что можно просто разомкнуть одну связку (обозначим ее s), как показано на рис. 9.9. Однако это не так. Дело в том, что связка может принадлежать α - или ω -предельному множеству какой-нибудь сепаратрисы, см. рис. 9.10.

Проводя хирургию в окрестности связки s и разрушая эту связку, мы неизбежно меняем форму сепаратрис, накапливающихся к s . Две такие сепаратрисы могут совпасть друг с другом — или одна из них может совпасть с одной из двух сепаратрис, на которые распалась связка s . В обоих случаях образуется новая связка сепаратрис. Такие связки называются “мелькающими”; они появляются и исчезают при сколь угодно малых возмущениях поля v .

Поэтому возмущенное векторное поле нужно искать с осторожностью.

Рассмотрим окрестность U точки $O \in s$, в которой определено выпрямление H поля v , $H_*v = (1, 0)$; будем считать, что $H(U)$ — прямоугольник, и что U не пересекается с другими седловыми связками, кроме s . Пусть Γ^+ и Γ^- — входная и выходная трансверсали U , то есть прообразы вертикальных сторон прямоугольника $H(U)$ под действием H . Пусть Σ^-, Σ^+ — пересечение всех сепаратрис поля v с Γ^-, Γ^+ соответственно (берутся те сепаратрисы, для которых это пересечение непусто). Это пересечение не более чем счетно. Выберем C^2 -гладкое отображение $\varphi: \Gamma^+ \rightarrow \Gamma^-$, тождественное в окрестности концов трансверсалей и такое, что $\varphi(\Sigma^-) \cap \Sigma^+ = \emptyset$. Такое отображение существует. Действительно, в любом гладком семействе отображений φ_ε , монотонных по ε , есть только счетное множество запрещенных значений ε

— решений уравнений $\varphi_\varepsilon(a_k) = b_l$ для каждой пары точек $a_k \in \Sigma^-, b_l \in \Sigma^+$.

По лемме о хирургии, возмутим векторное поле v так, что для нового поля w отображение Γ^+ на Γ^- вдоль фазовых кривых этого поля совпадает с φ ; вне окрестности U поле не меняется. Тогда все связки поля v , кроме s , сохранятся, а связка s будет разрушена, и новых связок не возникнет.

Индукцией по k строим поле w , близкое к v и не имеющее седловых связок. \square

Отметим, что множество \mathcal{V} плотно, но не открыто.

Задача 164. Докажите это.

Заодно мы доказали такое утверждение:

Лемма 9.1.38. Условие отсутствия сепаратрисных связок необходимо для структурной устойчивости: если все особые точки поля v на сфере гиперболические, но поле имеет связки сепаратрис, то оно не структурно устойчиво.

Доказательство. Выше показано, как найти сколь угодно близкое к v поле без связок сепаратрис. Очевидно, такое поле не может быть орбитально топологически эквивалентно v . Поэтому поле v не структурно устойчиво. \square

9.1.7.5 Гиперболические предельные циклы: плотность

Лемма 9.1.39. В пространстве C^1 -гладких векторных полей на сфере множество полей, все замкнутые орбиты которых — гиперболические предельные циклы, плотно.

Доказательство. Мы докажем плотность таких полей в \mathcal{V} . Поскольку множество \mathcal{V} плотно в пространстве C^1 -гладких векторных полей на сфере, этого будет достаточно.

Докажем, что для любого поля $v \in \mathcal{V}$ множество $\text{Per } v$ можно покрыть конечным числом так называемых *монодромных колец*.

Пусть γ — замкнутая траектория поля v , Γ — трансверсаль к ней, $O = \gamma \cap \Gamma$. Пусть отображение Пуанкаре P поля v , соответствующее γ , определено на (открытом) интервале $\Gamma_1 \subset \Gamma$, содержащем точку O внутри, и пусть $P(\Gamma_1) = \Gamma_2 \subset \Gamma$.

Определение 9.1.40. Монодромное кольцо A , соответствующее γ и Γ_1 — это объединение дуг фазовых кривых φ_x поля v от точки $x \in \Gamma_1$ до точки $P(x) \in \Gamma_2$:

$$A = \cup_{x \in \Gamma_1} \varphi_x,$$

см. рис. 9.2.

Заметим, что определенное выше монодромное кольцо не открыто: оно содержит отрезки Γ_1, Γ_2 , симметрическая разность которых $\Gamma_1 \Delta \Gamma_2$ принадлежит границе монодромного кольца A . Внутренность $A \setminus (\Gamma_1 \Delta \Gamma_2)$ монодромного кольца A называется открытым монодромным кольцом, соответствующим γ и Γ_1, Γ_2 . Везде далее мы рассматриваем открытые монодромные кольца.

Монодромные кольца могут быть довольно сложными: множество неподвижных точек отображения Пуанкаре может быть любым подмножеством, замкнутым в Γ_1 .

Лемма 9.1.41. *Для любого поля $v \in \mathcal{V}$ существует дизъюнктное объединение монодромных колец, содержащее все циклы поля v .*

Доказательство. Фиксируем поле $v \in \mathcal{V}$. Покроем каждый цикл открытым монодромным кольцом A , для которого выполняется лемма о незадевании. По лемме 9.1.23, множество $\text{Per } v$ замкнуто. Значит, из полученного покрытия можно выбрать конечное подпокрытие: конечный набор открытых монодромных колец, объединение которых содержит $\text{Per } v$.

Предложение 9.1.42. *Два пересекающихся монодромных кольца A, A' можно заменить*

- *или одним монодромным кольцом, которое содержится в $A \cup A'$ и содержит все циклы, принадлежащие $A \cup A'$;*
- *или двумя непересекающимися монодромными кольцами $B \subset A, B' \subset A'$, которые содержат все циклы, принадлежащие A и A' соответственно.*

Лемма немедленно получается из предложения: достаточно провести индукцию по числу пар пересекающихся монодромных колец в построенном выше конечном покрытии множества $\text{Per } v$. \square

Доказательство предложения. Пусть монодромное кольцо A (соотв. A') соответствует циклу γ , трансверсали Γ и интервалам $\Gamma_1 \subset \Gamma, \Gamma_2 = P(\Gamma_1)$ (соответственно, $\gamma', \Gamma', \Gamma'_1, \Gamma'_2$).

Рассмотрим два случая.

Случай 1. Монодромные кольца A и A' имеют общий цикл γ_0 . В этом случае докажем, что пересечение $Q = \text{Per } v \cap (A \cup A')$ принадлежит одному монодромному кольцу $B \subset A \cup A'$. Каждый цикл поля v делит сферу на две области: внешнюю, содержащую точку бесконечности, и внутреннюю. Пусть D_1 — область внутри γ_0 , и пусть γ^- — самый внутренний цикл множества Q в D_1 . Если он принадлежит A , то положим $B_1 = A \cap D_1$; такое кольцо будет содержать все циклы $Q \cup D_1$. Если же $\gamma^- \subset A'$, мы положим $B_1 = A' \cap D_1$. Аналогичным образом определяется кольцо B_2 ; оно содержит все циклы из Q , лежащие вне γ_0 . Осталось показать, что $B = B_1 \cup B_2$ является монодромным кольцом, то есть построить соответствующую ему трансверсаль.

Возможно, $B = (A \cap D_1) \cup (A \cap D_2) = A$ или $B = A'$; тогда доказывать нечего. Но может быть и так, что $B_1 = A \cap D_1$ и $B_2 = A' \cap D_2$, или наоборот. В этом случае трансверсали $\Gamma_1 \subset A$ и $\Gamma'_1 \subset A'$ мы заменим одной трансверсалью кольца B , как показано на рисунке 9.11 слева. Мы пользуемся тем, что цикл γ_0 пересекает и Γ_1 , и Γ'_1 ; новая трансверсаль состоит из участков трансверсалей Γ_1 и Γ'_1 и дуги, близкой к дуге цикла γ_0 и трансверсальной полю v .

Случай 2. Кольца A и A' не имеют общего цикла. В этом случае их можно заменить на два непересекающихся кольца $B \subset A$ и $B' \subset A'$, объединение которых содержит множество $Q = \text{Per } v \cap (A \cup A')$.

Пусть $x \in A \cap A'$ — любая точка пересечения колец A и A' . Заметим, что для любой точки p монодромного кольца или множество $\alpha(p)$, или множество $\omega(p)$ является циклом из этого кольца. Так как $x \in A \cap A'$ и у колец A и A' нет общих циклов, должно быть $\alpha(x) \in A, \omega(x) \in A'$ или наоборот. Циклы $\alpha(x), \omega(x)$ мы будем обозначать $\gamma_A \subset A$ и $\gamma_{A'} \subset A'$.

Каждый цикл γ множества Q ограничивает внутреннюю область D_γ . Будем считать, что x лежит внутри $\gamma_{A'}$ и вне γ_A (остальные случаи рассматриваются аналогично). Так как циклы не могут отделять точку x от её α - и ω - предельных множеств $\gamma_A, \gamma_{A'}$, то все циклы кольца A целиком лежат в D_{γ_A} , а циклы кольца A' лежат вне $D_{\gamma_{A'}}$.

Возьмем интервалы $\Sigma_1 \subset \Gamma_1$ и $\Sigma'_1 \subset \Gamma'_1$, пересекающие γ_A и $\gamma_{A'}$ соответственно и достаточно маленькие, так что монодромные кольца C и C' , соответствующие γ_A, Σ_1 и $\gamma_{A'}, \Sigma'_1$, не пересекаются. Заменяем часть кольца A , которая лежит вне цикла γ_A (и потому не содержит циклов), на меньшее кольцо $C \setminus D_{\gamma_A}$; заменяем часть кольца A' , которая лежит внутри цикла $\gamma_{A'}$ (и тоже не содержит циклов), на $C' \cap D_{\gamma_{A'}}$, см. рис. 9.11. Тогда кольца A и A' превратятся в непересекающиеся монодромные кольца B и B' , объединение которых содержит Q . □

Теперь докажем лемму 9.1.39, пользуясь леммой 9.1.41.

Пусть монодромное кольцо B — одно из конечного множества попарно непересекающихся колец, объединение которых содержит $\text{Reg } v$. Тогда граница ∂B состоит из двух незамкнутых дуг фазовых кривых поля v и двух отрезков трансверсали. Действительно, ∂B не может содержать цикла γ поля v ; иначе кольцо B пересеклось бы с кольцом покрытия, содержащим γ .

Применим теперь к кольцу B лемму о хирургии. Пусть $\tilde{\Gamma}$ — трансверсаль кольца B , параметризованная отрезком $[0, 1]$. В силу предыдущих рассуждений, $P(0) \neq 0$ и $P(1) \neq 1$. По лемме Сарда, существует сколь угодно малое не критическое значение ε функции $P(x) - x$.

Рассмотрим C^2 -гладкую функцию φ со следующими свойствами:

$$\begin{aligned} \varphi &\equiv 0 && \text{на } [0, \delta] \cup [1 - \delta, 1]; \\ \varphi(x) &\in [0, \varepsilon] && \text{на } [\delta, 2\delta] \cup [1 - 2\delta, 1 - \delta]; \\ \varphi &\equiv \varepsilon && \text{на } [2\delta, 1 - 2\delta]. \end{aligned}$$

Значение δ должно быть выбрано так, чтобы $\max \varphi'$ был достаточно мал на отрезке $[0, 1]$. Тогда функция $P - \varphi$ является диффеоморфизмом (её производная не обращается в ноль, так как значение φ' мало), не имеет неподвижных точек на $[0, 2\delta] \cup [1 - 2\delta, 1]$ (это верно для малых ε , так как $P(0) \neq 0$ и $P(1) \neq 1$), а на $[2\delta, 1 - 2\delta]$ имеет только гиперболические неподвижные точки (последнее свойство следует из того, что значение ε не критическое для P).

По лемме о хирургии, примененной в кольце B , поле v можно мало изменить так, что для нового поля w область B будет по-прежнему монодромным кольцом, а отображение Пуанкаре на этом кольце будет равно $P - \varphi$. Значит, все циклы поля w в B будут гиперболическими. Отметим, что вне кольца B поле w совпадает с v .

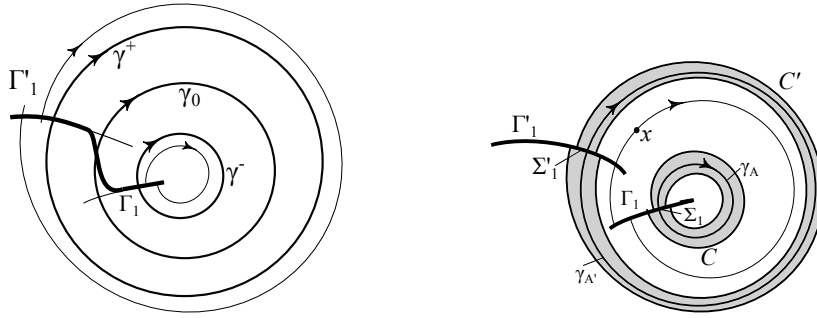


Рис. 9.11: Объединение монодромных колец (слева); замена пересекающихся монодромных колец непересекающимися (справа).

Проводя аналогичное построение в каждом из непересекающихся монодромных колец, получаем поле w , близкое к v , все замкнутые орбиты которого — гиперболические предельные циклы. \square

9.1.7.6 Отсутствие седловых связей: открытость

Обозначим через \mathcal{W} множество всех C^1 -гладких векторных полей на сфере, удовлетворяющих критерию Андронова-Понтрягина.

Предложение 9.1.43. *Все поля, C^1 -близкие к полю $v \in \mathcal{W}$, не имеют седловых связей.*

Доказательство. Поле w , близкое к полю v , имеет гиперболические особые точки и предельные циклы, близкие к особым точкам и циклам поля v . Сепаратрисы седел поля w в окрестности этих седел близки сепаратрисам седел поля v . ω -предельное множество сепаратрисы поля v может быть только притягивающим гиперболическим предельным циклом или гиперболическим аттрактором поля v . Значит, близкая к ней неустойчивая сепаратриса поля w наматывается на близкий цикл или стремится к близкому аттрактору поля w , а потому не может образовывать связку. Аналогично исследуются устойчивые сепаратрисы.

Это доказывает предложение 9.1.43. \square

9.1.7.7 Гиперболические предельные циклы: открытость

Лемма 9.1.44. *Множество векторных полей, удовлетворяющих условиям критерия Андронова-Понтрягина, открыто.*

Доказательство. Пусть поле v удовлетворяет условиям критерия Андронова-Понтрягина. Пусть не существует его окрестности, в которой все поля имеют только гиперболические предельные циклы. Тогда найдется последовательность полей $v_n \rightarrow v$, которые имеют негиперболические предельные циклы. Следующее усиление леммы 9.1.23 показывает, что это невозможно.

Лемма 9.1.45. Пусть подмножество $\text{Per } \mathcal{W}$ множества $\mathcal{W} \times S^2$ имеет вид:

$$\text{Per } \mathcal{W} = \cup_{v \in \mathcal{W}} (\{v\} \times \text{Per } v).$$

Тогда множество $\text{Per } \mathcal{W}$ замкнуто. Более того, если $(v_n, x_n) \rightarrow (v, y)$, и $\text{orb } x_n = \gamma_n$ — цикл поля v_n , то $\text{orb } y$ — цикл γ_0 поля v , и $\gamma_n \rightarrow \gamma_0$. отображения Пуанкаре вдоль циклов γ_n сходятся в пространстве C^1 к отображению Пуанкаре вдоль цикла γ_0 .

Действительно, эта лемма показывает, что негиперболические циклы полей v_n могут накапливаться только к гиперболическим циклам поля v ; но соответствующие отображения Пуанкаре полей v_n не могут сгуститься к отображению Пуанкаре поля v , так как имеют негиперболические неподвижные точки.

Доказательство. Доказательство похоже на доказательство леммы 9.1.23. Пусть v и y выбраны так, как в формулировке леммы. Пусть траектория $\text{orb}_v y$ не замкнута. Приведем это предположение к противоречию. Рассмотрим множества $\alpha_v(y)$ и $\omega_v(y)$. Эти множества не могут быть одновременно седлами или полициклами, поскольку у поля v нет седловых связок.

Напомним, что негиперболических циклов и особых точек у поля v нет. Значит, одно из множеств $\alpha(y)$ или $\omega(y)$ — аттрактор (притягивающая гиперболическая особая точка или цикл) или репеллер (отталкивающая гиперболическая особая точка или цикл). В любом случае, это предельное множество можно окружить окрестностью Ω с гладкой границей, на которой поле v направлено внутрь окрестности (в случае аттрактора) или вовне окрестности (для репеллера). Для большого n , то же верно для поля v_n .

Фиксируем малую окрестность точки y ; все траектории из этой малой окрестности под действием v попадают в область Ω (в прямом или обратном времени). Для больших n то же верно и для полей v_n . Поэтому эти траектории незамкнуты: зайдя в область Ω , они не могут её покинуть. Итак, у точки y есть окрестность, такая, что при больших n все траектории полей v_n с начальными условиями из этой окрестности незамкнуты. Поэтому циклы не могут накапливаться к точке y . Противоречие.

Итак, $\text{orb}_v y = \gamma_0$ — цикл. Поскольку $v \in \mathcal{W}$, этот цикл — гиперболический. Без ограничения общности можно считать, что он — притягивающий (в противном случае обратим время). Пусть Γ — трансверсаль к γ_0 , и P — сжимающее отображение Пуанкаре трансверсали Γ внутрь себя. Для близких к v полей v_n определено отображение P_n трансверсали Γ в себя вдоль траекторий поля. Нам понадобится такое предложение.

Предложение 9.1.46. Отображения Пуанкаре для C^1 -близких векторных полей сами C^1 -близки.

По предложению 9.1.46, отображение P_n C^1 -близко к отображению P . Следовательно, оно сжимающее и имеет притягивающую неподвижную точку. Поэтому каждое из полей v_n имеет гиперболический цикл λ_n , близкий к γ_0 . Докажем, что этот цикл совпадает с γ_n .

9.1.7. Типичность структурно устойчивых полей

Рассмотрим отрезок $[a, b]$ трансверсали Γ к циклу γ_0 , пересекающий γ_0 , на котором определено отображение Пуанкаре P для поля v и P_n для всех полей v_n при больших n ; отображения P и P_n имеют на отрезке $[a, b]$ единственную неподвижную точку. При этом отрезок $[P_n(a), P_n(b)]$ пересекает γ_0 , а дуги фазовых кривых полей v_n от a до $P_n(a)$ и от b до $P_n(b)$ — не пересекают. Тогда эти дуги вместе с отрезками $[a, P_n(a)], [b, P_n(b)]$ ограничивают кольцо U_n , которое не задевает циклы поля v_n , причем $\lambda_n \subset U_n$ — единственный цикл поля v_n в U_n и $\gamma_0 \in U_n$. С другой стороны, мы знаем, что и циклы γ_n пересекают любую окрестность цикла γ_0 , так как накапливаются к γ_0 . Значит, они пересекают U_n , и потому принадлежат U_n . Но в U_n есть единственный цикл поля v_n — это λ_n . Значит, $\gamma_n = \lambda_n$, и $\gamma_n \rightarrow \gamma_0$. Это доказывает лемму по модулю предложения 9.1.46. \square

Доказательство предложения 9.1.46. Пусть γ — предельный цикл векторного поля v , $O \in \gamma$, Γ — трансверсаль к γ в точке O , T — период цикла γ поля v . Пусть π_v — проектирование окрестности точки O на Γ вдоль фазовых кривых поля v . Тогда для некоторых отрезков $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \Gamma$, $O \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2$, определено отображение Пуанкаре

$$P_v : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2, P_v = \pi_v \circ g_v^T.$$

Проектирование π_v выражается через выпрямляющее отображение для поля v . Пусть H_v — отображение, выпрямляющее v в окрестности точки O и переводящее Γ в отрезок Σ оси y , а точку O в 0 . Пусть π_0 — проектирование плоскости (x, y) на ось y вдоль вектора $\frac{\partial}{\partial x}$. Тогда

$$\pi_v = H_v^{-1} \circ \pi_0 \circ H_v.$$

Пусть w — C^1 -близкое к v поле. Тогда преобразования фазовых потоков полей v и w C -близки по неравенству Гронуолла. Но системы уравнений в вариациях для полей v и w тоже C -близки. Поэтому C -близки и их решения. Это влечет C^1 -близость преобразований фазовых потоков полей v и w . Отсюда следует C^1 -близость выпрямляющих отображений H_v и H_w и отображений проектирования

$$\pi_v = H_v^{-1} \circ \pi_0 \circ H_v, \pi_w = H_w^{-1} \circ \pi_0 \circ H_w,$$

а значит, и C^1 -близость отображений Пуанкаре

$$P_v = \pi_v \circ g_v^T, P_w = \pi_w \circ g_w^T.$$

Отметим, что хотя предельные циклы для полей v и w могут иметь разный период ($O = g_v^T(O)$, но, возможно, $O \neq g_w^T(O)$), отображение проектирования “компенсирует” эту разницу. \square

Итак, поле v_n , близкое к v , имеет только гиперболические предельные циклы, близкие к циклам поля v .

Вместе с предыдущими утверждениями, это доказывает открытость множества векторных полей, удовлетворяющих критерию Андронова-Понтрягина. Тем самым, доказана теорема 9.1.4. \square

Вместе с этим доказано, что множество полей, предельное поведение орбит которых описано теоремой 9.1.6, открыто и всюду плотно. Тем самым, доказана теорема 9.1.6.

9.1.8 О достаточности в критерии Андронова-Понтрягина

Подробное доказательство структурной устойчивости полей, удовлетворяющих трем условиям критерия Андронова-Понтрягина, довольно сложно. Мы приведем набросок этого доказательства, оставляя в стороне рутинные детали — очевидные утверждения, требующие подробных обоснований.

Определение 9.1.47. Кривая без контакта — это замкнутая гладкая кривая, которая ни в одной своей точке не касается векторного поля.

Построим кривые без контакта вокруг каждого гиперболического аттрактора и репеллера поля v . Для этого заметим, что рядом с особой точкой система близка к своей линейной части, а для линейного гиперболического аттрактора (или репеллера) кривой без контакта является правильно выбранный эллипс. Поэтому и для нелинейного поля достаточно маленький эллипс вокруг гиперболического аттрактора и репеллера является кривой без контакта.

Нам понадобится следующая локальная лемма.

Лемма 9.1.48. Пусть P — гиперболический репеллер или аттрактор поля v , γ — достаточно близкая к нему кривая без контакта, U — область внутри γ . Пусть поле w достаточно близко к полю v . Тогда поля $v|_U$ и $w|_U$ орбитально топологически эквивалентны, и ограничение сопрягающего гомеоморфизма на γ можно выбрать любым.

Доказательство. Пусть P — аттрактор; на кривой γ , векторы поля v направлены внутрь U . Понятно, что для любого близкого поля w кривая γ тоже будет кривой без контакта.

В силу леммы 9.1.36, если окрестность U достаточно маленькая и поле w достаточно близко к полю v , то поле w имеет в U единственную особую точку P' , и она тоже является аттрактором. Докажем, что ω -предельное множество любой точки на кривой γ под действием w — точка P' .

Если поле w достаточно близко к v , то в области U оно не имеет предельных циклов. Это следует из леммы 9.1.45. Заметим, что ω -предельное множество каждой точки на γ под действием поля w содержится в области U (так как траектории поля w не выходят из U); но так как в области U нет предельных циклов и есть только один аттрактор P' , это ω -предельное множество совпадает с P' .

Дальнейшее доказательство повторяет доказательство леммы 8.3.12 из раздела 8.3. Каждая точка $z \in U$, кроме аттрактора P , имеет вид $g_v^t x$, где $x = x(z) \in \gamma$, $t = t(z) > 0$. Пусть $h: \gamma \rightarrow \gamma$ — любой гомеоморфизм кривой без контакта в себя. Тогда положим $H(g_v^t x) = g_w^t(h(x))$ (то есть продолжим гомеоморфизм h вдоль траекторий полей v, w внутрь U). Положив $H(P) = P'$, мы получим гомеоморфизм окрестности U в себя, переводящий траектории поля v в траектории поля w . Его непрерывность

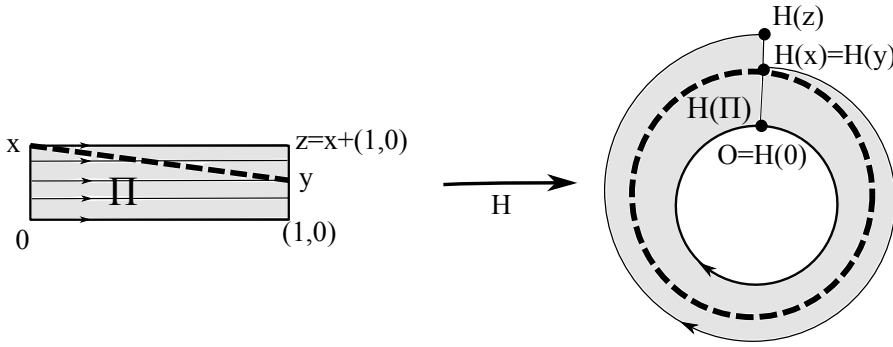


Рис. 9.12: Построение кривой без контакта для предельного цикла. H^{-1} — выпрямляющее отображение разрезанного монодромного кольца; искомая кривая отмечена пунктиром в карте H и в исходной карте.

в точке P следует из того, что при $z \rightarrow P$ имеем $t(z) \rightarrow +\infty$, и потому точка $H(z) = H(g_v^t(x)) = g_w^t(h(x))$ стремится к ω -предельному множеству точки $h(x) \in \gamma$, то есть к P' . □

Вокруг каждого предельного цикла тоже можно построить две кривые без контакта — одну внутри цикла, другую снаружи; ω -или α -предельное множество всех точек на такой кривой будет совпадать с циклом. На рис. 9.12 показано, как это сделать: нужно взять монодромное кольцо вокруг цикла, разрезать его вдоль соответствующей трансверсали и выпрямить поле в этом разрезанном кольце (ср. с теоремой 7.3.4 о трубке траекторий). Отметим, что выпрямляющее отображение не будет взаимно однозначным — обе вертикальные стороны прямоугольника в выпрямляющей карте будут переходить в отрезки одной и той же трансверсали к циклу. Искомая кривая без контакта в выпрямляющей карте будет отрезком прямой, соединяющим два разных прообраза одной и той же точки на трансверсали. Строго говоря, при такой конструкции мы можем получить кривую с изломом, но этот излом легко сгладить.

Для циклов верев аналог леммы 9.1.48:

Лемма 9.1.49. Пусть γ — гиперболический предельный цикл поля v , $\lambda_{1,2}$ — достаточно близкие к нему кривые без контакта по разные стороны от γ , U — кольцо между λ_1 и λ_2 . Пусть поле w достаточно близко к v . Тогда поля $v|_U$ и $w|_U$ орбитально топологически эквивалентны, и ограничение сопрягающего гомеоморфизма на λ_1 и λ_2 можно выбрать любым.

Подробное доказательство этого утверждения не так просто, так как сопрягающий гомеоморфизм должен непрерывно продолжаться на предельный цикл. Мы не будем его приводить.

Чтобы исследовать (возможно, очень сложно устроенный) фазовый портрет поля на сфере, удобно разбить сферу на просто устроенные области — ячейки. Для поля $v \in \mathcal{W}$, удовлетворяющего условиям критерия Андронова – Понтрягина, мы построим набор точек и гладких кривых на сфере следующим образом.

- Возьмем все аттракторы и репеллеры поля v . Вокруг каждого репеллера и аттрактора возьмем кривую без контакта.
- Возьмем все предельные циклы поля v . Возьмем замкнутые кривые без контакта с обеих сторон от каждого цикла.
- Возьмем все седла и все *усеченные сепаратрисы* — дуги сепаратрис седел поля v от самого седла до пересечения с какой-нибудь кривой без контакта.

Замечание 9.1.50. *Так как сепаратрисных связей у поля v нет, ω -предельное множество неустойчивой сепаратрисы может быть только аттрактором или предельным циклом. Поэтому каждая неустойчивая сепаратриса пересекается с кривой без контакта, и дуги всех неустойчивых сепаратрис войдут в такой набор кривых. То же верно для устойчивых сепаратрис.*

Эти точки и гладкие кривые разбивают сферу на открытые области — *ячейки*, которые устроены довольно просто.

Лемма 9.1.51. *Ячейки поля $v \in \mathcal{W}$ бывают трех типов:*

- *Проколотый диск между аттрактором (или репеллером) и его кривой без контакта, или кольцо между предельным циклом и его кривой без контакта;*
- *Криволинейный шестиугольник, ограниченный четырьмя сепаратрисами двух седел и двумя кривыми без контакта, см. рис. 9.13(d). Эти седла и две из четырех сепаратрис на границе ячейки могут совпадать — см. рис. 9.13(b), (c). При этом все траектории внутри ячейки пересекают одну из кривых без контакта в будущем, а другую — в прошлом.*
- *Кольцо между двумя кривыми без контакта, см. рис. 9.13(a). Все траектории внутри ячейки пересекают одну из кривых без контакта в будущем, а другую — в прошлом.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку z , не принадлежащую сепаратрисам седел и ячейкам первого типа, и докажем, что ячейка, в которой она лежит, может быть только типа 2 или 3.

По теореме Пуанкаре-Бендиксона, для поля $v \in \mathcal{W}$ все α - и ω -предельные множества точек, не принадлежащих сепаратрисам — это гиперболические особые точки и циклы, отталкивающие и притягивающие. Для краткости мы будем называть их аттракторами и репеллерами поля v . Пусть a — ω -предельное множество точки z , r — ее α -предельное множество. Приближаясь к a , орбита точки z пересекает окружающую a кривую без контакта (обозначим ее l_a) в точке y_0 ; приближаясь к r в обратном времени, эта орбита пересекает кривую без контакта l_r в точке x_0 . Это следует из того, что z не принадлежит ячейке первого типа. Обозначим дугу фазовой кривой от x_0 до y_0 через φ_{x_0} .

Аналогично тому, как строится отображение Пуанкаре, можно построить гладкое отображение P некоторой окрестности точки x_0 на кривой l_r на окрестность точки

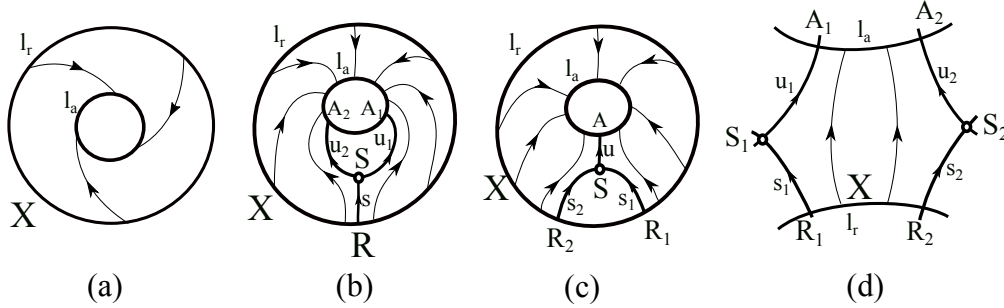


Рис. 9.13: Построение ячейки третьего типа и три разных построения ячеек второго типа

y_0 на кривой l_a так, что x и $y = P(x)$ являются началом и концом дуги фазовой кривой φ_x . Продолжим отображение P на максимальную открытую дугу X кривой l_r , на которой это отображение определено. Возможны четыре случая.

1) $X = l_r$. Отображение P определено на всей топологической окружности l_r и локально гомеоморфно. Тогда оно является гомеоморфизмом $l_r \rightarrow l_a$ (докажите это!). Область между l_r и l_a — ячейка третьего типа, см. Рис. 9.13 (а).

2) $X = l_r \setminus R$: отображение P продолжается на всю кривую l_r без одной точки R . Тогда ω -предельное множество точки R не может совпадать с аттрактором a : в противном случае траектория φ_R с началом в точке R пересекала бы кривую l_a , и отображение P было бы определено в окрестности точки R . Множество $\omega(R)$ не может быть и аттрактором, отличным от a , иначе траектории, которые начинаются достаточно близко к R , тоже стремились бы к тому же аттрактору. Значит, $\omega(R)$ — седло (обозначим его S), и φ_R — устойчивая сепаратриса этого седла. Заметим, что орбиты точек дуги l_a , близких к R слева и справа, идут сперва вдоль φ_R , а потом вдоль неустойчивых сепаратрис седла S — вдоль u_1 и u_2 . Значит, u_1 и u_2 тоже пересекают кривую без контакта l_a в некоторых точках A_1, A_2 .

Кривая l_r , дуга сепаратрисы φ_R , дуги сепаратрис u_1, u_2 до точек A_1, A_2 и дуга кривой l_a , равная $P(l \setminus R)$, ограничивают ячейку второго типа, содержащую точку z , см. Рис. 9.13 (b).

3) X — дуга кривой l_r между точками R_1 и R_2 , $R_1 \neq R_2$. Мы снова получаем, что φ_{R_1} и φ_{R_2} — сепаратрисы гиперболических седел S_1 и S_2 . Пусть эти седла совпадают: $S_1 = S_2 = S$ (ниже мы разберем случай (4), когда эти седла различны). Орбиты точек дуги l_a , близких к R_1 и R_2 , идут сперва вдоль φ_{R_1} и φ_{R_2} , а потом вдоль неустойчивой сепаратрисы u седла S . Поэтому сепаратриса u пересекает l_a в точке, которую мы обозначим A . Тогда $P(X) = l_r \setminus A$.

Ячейка точки z (второго типа) ограничена следующими кривыми: дугой $X \subset l_r$; устойчивыми сепаратрисами φ_{R_1} и φ_{R_2} седла S ; дугой неустойчивой сепаратрисы u до точки A ; кривой $l_a \setminus A$, см. Рис. 9.13 (c).

4) Пусть теперь седла S_1 и S_2 не совпадают. Тогда у них есть неустойчивые сепаратрисы u_1 и u_2 , выходящие на l_a в точках A_1 и A_2 . Образ $P(X) \subset l_a$ — дуга с концами A_1 и A_2 . Ячейка точки z — шестиугольник, ограниченный следующими

кривыми: дугой $X \subset l_r$; дугами устойчивыми сепаратрисами φ_{R_1} и φ_{R_2} седел S_1, S_2 ; дугами неустойчивых сепаратрис u_1 и u_2 от точек S_1, S_2 до точек A_1, A_2 ; кривой $P(X)$, см. Рис. 9.13 (d). Эта ячейка тоже второго типа. □

Пусть поле w близко к полю v . Сначала мы построим гомеоморфизм H на усеченных сепаратрисах, потом продолжим его внутрь ячеек второго и третьего типа, а потом и внутрь ячеек первого типа.

Из лемм 9.1.36, 9.1.45 следует, что все особые точки и предельные циклы поля w близки к особым точкам и предельным циклам поля v . Ясно, что кривые без контакта для поля v будут кривыми без контакта и для w . Несложно доказать, что усеченная сепаратриса мало меняется при возмущении поля v (в частности, сепаратрисы поля w пересекают те же кривые без контакта, что и сепаратрисы поля v).

Поэтому разбиения на ячейки для полей v и w близки.

Начнем строить гомеоморфизм — орбитальную топологическую эквивалентность полей v и w . Определим гомеоморфизм на седлах и усеченных сепаратрисах поля v так, чтобы он переводил эти седла и усеченные сепаратрисы в близкие к ним седла и усеченные сепаратрисы поля w . Продолжим гомеоморфизм внутрь ячеек второго и третьего типа так, чтобы он переводил траектории поля v в траектории поля w , а кривые без контакта — в кривые без контакта. Грубо говоря, мы определим гомеоморфизм произвольным образом на одной из кривых без контакта, а потом продолжим вдоль траекторий полей v, w внутрь ячейки примерно так, как в доказательстве леммы 9.1.48; дословно повторить это доказательство не получится, так как нам надо обеспечить непрерывность H на границах ячейки.

Наконец, воспользуемся леммами 9.1.48 и 9.1.49, чтобы продолжить гомеоморфизм внутрь ячеек первого типа. Гомеоморфизм определен на всей сфере — критерий Андронова-Понтрягина доказан.

В этом доказательстве мы пропустили следующие моменты: доказательство того, что при возмущении поля усеченные сепаратрисы мало меняются; продолжение гомеоморфизма с усеченных сепаратрис на ячейки второго и третьего типа; доказательство леммы 9.1.49. Эти рассуждения интуитивно ясны, но требуют большой аккуратности, и мы предпочитаем опустить их.

На этом заканчивается изложение двумерной теории. В следующих разделах мы скажем о её дальнейшем развитии и многомерных аналогах.

9.1.9 Несколько слов о теории бифуркаций

Теория бифуркаций изучает резкие, скачкообразные изменения топологии фазового портрета, которые происходят в окрестности структурно неустойчивых уравнений. Эти изменения и называются бифуркациями. Некоторые из этих бифуркаций мы уже рассматривали. Седлоузел при малом возмущении может распасться на седло и узел, а может совсем исчезнуть. Негиперболический предельный цикл при возму-

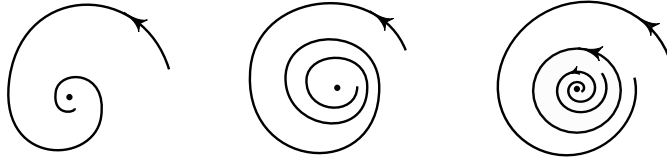


Рис. 9.14: Бифуркация Андронова–Хопфа: (a) $\varepsilon < 0$; (b) $\varepsilon = 0$; (c) $\varepsilon > 0$.

щении может распасться на несколько циклов, а может тоже исчезнуть. При размыкании петли сепаратрисы могут возникнуть мелькающие сепаратрисные связки.

Мы касались также бифуркации особой точки с двумя чисто мнимыми собственными значениями в семействе векторных полей $v_\varepsilon = v + \varepsilon x$, где v — центр по линейным членам. При $\varepsilon > 0$ особая точка неустойчива, а при $\varepsilon < 0$ — устойчива. Но мы не коснулись самой интересной бифуркации — рождения предельного цикла.

Пусть, благодаря влиянию нелинейных членов, поле v имеет устойчивый фокус (рис. 9.14). При $\varepsilon < 0$ этот фокус остается устойчивым. При малых $\varepsilon > 0$ орбиты, далекие от нуля, продолжают приближаться к нулю по теореме о непрерывной зависимости. А орбиты, близкие к нулю, от него удаляются из-за неустойчивости. Что-то должно разделять эти два семейства спиралей. Это что-то — предельный цикл.

Эта бифуркация была открыта и строго обоснована Андроновым. Она была обобщена Хопфом на многомерный случай и называется в литературе “бифуркацией Андронова-Хопфа” (или — бифуркацией Хопфа).

Бесконечномерные обобщения этой бифуркации объясняют некоторые явления, наблюдаемые в гидродинамике. В конце прошлого столетия этой бифуркации была посвящена целая книга [ссылка].

Следующий пример демонстрирует бифуркацию Андронова-Хопфа:

$$\dot{z} = (\varepsilon + i\omega)z - z|z|^2.$$

В полярных координатах эта система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{r} = r(\varepsilon - r^2) \\ \dot{\varphi} = \omega \end{cases}$$

В этой системе переменные разделяются. Легко проверить, что при $\varepsilon < 0$, $\varepsilon = 0$, $\varepsilon > 0$ фазовые портреты — такие, как на рис. 9.14.

Упражнение 165. Проверьте это.

Теория бифуркаций векторных полей на плоскости естественно разделяется на три части:

- локальная теория: бифуркации негиперболических особых точек, происходящие в их окрестности;

- полулокальная теория: бифуркации полициклов, происходящие в их окрестности;
- глобальные бифуркации — перестройки фазовых портретов на всей сфере.

Первая часть практически завершена, вторая продолжает развиваться, третья только создается.

Что до бифуркаций в многомерном пространстве — это целый мир, во многом не похожий на двумерный.

9.1.10 Теория динамических систем: взгляд с птичьего полета

Теория динамических систем — это далеко идущее продолжение теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Можно сказать, что динамические системы — это дифференциальные уравнения на многообразиях “любых форм и размерностей”. Кроме того, динамические системы изучают диффеоморфизмы и их итерации. Диффеоморфизмы получаются как (глобализованные) отображения Пуанкаре для векторных полей, причем так может быть получен любой диффеоморфизм. Поэтому в следующем параграфе мы изучаем диффеоморфизм одной области на другую и ничего не говорим о дифференциальных уравнениях.

В середине XX века был поставлен вопрос: как устроены типичные динамические системы? Более подробно, какими свойствами обладают векторные поля (или диффеоморфизмы) из открытого всюду плотного множества в функциональном пространстве? Такие поля и отображения называют типичными. (Выбор функционального пространства — это отдельная тема; от этого выбора сильно зависит ответ на поставленный вопрос).

9.1.10.1 Периодические траектории многомерных динамических систем

Изложенная выше теория вдохновила Стива Смейла в середине прошлого века попытаться перенести ее результаты на многомерный случай. В конце 50-х годов он опубликовал работу, в которой, в частности, утверждалось, что “большинство” динамических систем удовлетворяет теореме 9.1.6: все начальные условия выходят асимптотически на стационарный или периодический режим, и этих режимов конечное число. Он тут же получил письмо от Нормана Левинсона со ссылкой на работы Картрайт и Литтлвуда, в которых доказано противоположное. Работы были длинные и трудные. Смейл стоял перед выбором: погрузиться в разбор трудных работ или придумать самому, как может диффеоморфизм иметь счетное число периодических траекторий и притом сохранять это свойство при малых возмущениях. Смейл выбрал второй путь. Результатом явилась подкова Смейла, которой посвящен следующий параграф.

Вопрос о том, что понимать под “большинством” векторных полей, нетривиален. Мы здесь считаем, что векторные поля, составляющие “большинство”, содержат счетное пересечение открытых всюду плотных множеств в пространстве C^1 -гладких

векторных полей на поверхности M^n . Класс гладкости 1 очень важен для теории структурной устойчивости.

С тех пор теория динамических систем развивалась как цепочка прозрений и их опровержений; но каждый такой виток развития приносил новые знания о динамических системах.

9.1.10.2 Явление Ньюхауса

Следующим прозрением была гипотеза Тома: большинство динамических систем имеет лишь конечное число притягивающих периодических орбит. Эта гипотеза была опровергнута Ньюхаусом в 70-е годы прошлого века: существует область в пространстве C^1 -гладких векторных полей на трехмерной сфере S^3 , “большинство” векторных полей из которой имеет счетное множество притягивающих периодических орбит.

9.1.10.3 Лемма Пью о замыкании

А много ли есть векторных полей без периодических орбит вообще? Чарльз Пью доказал, что открытое всюду плотное множество векторных полей на компактном многообразии имеет хотя бы одну периодическую орбиту. На первый взгляд, это нетрудно доказать. Если орбита векторного поля на компактном многообразии не замкнута, то у нее есть непустое ω -предельное множество. Тем самым, на ней есть последовательность точек $x_n \rightarrow y$, которые поэтому неограниченно сближаются между собой. В окрестности точки y можно произвести хирургическую операцию, близкую к тождественной, которая склеит близкие точки x_n и x_m . Трудность состоит в том, что эта хирургия неминуемо сместит другие точки орбиты, близкие к x_n и x_m . В результате орбита, замкнувшись в одном месте, разомкнется в другом. Если хирургия C^1 -малая, то эту трудность удастся преодолеть ценой больших усилий. Но аналог леммы о замыкании для C^2 -гладких векторных полей до сих пор не опровергнут и не доказан: не удастся сделать хирургию, малую в C^2 и замыкающую орбиту.

9.1.10.4 Структурная устойчивость

Вопреки бытовавшей одно время гипотезе, структурно устойчивые векторные поля не плотны в пространстве всех векторных полей. Это явление было открыто Смейлом. Существует большая область пространства векторных полей, свободная от структурно устойчивых систем.

Одновременно необходимые и достаточные условия структурной устойчивости в пространстве 1-гладких векторных полей были найдены. Их сформулировали в виде гипотезы Смейл и Палис. В отличие от двумерного случая, доказательство необходимости оказалось гораздо труднее доказательства достаточности. Достаточность в 70-е годы доказал Робинсон, необходимость в 80-е — Манье.

Мы коснулись здесь лишь вопросов, связанных с темами, затронутыми в этом параграфе. В XX веке возникли другие мощные разделы теории динамических систем: эргодическая теория, гиперболическая теория, теория КАМ... Их создатели:

9 Окно в теорию динамических систем

Аносов, Арнольд, Бирхгоф, Колмогоров, Мозер, Палис, Синай, Смейл и другие вырастили мощные научные школы, насчитывающие несколько поколений, которые продолжают работать и сейчас.

9.2 Хаос: подкова Смейла

В этом параграфе описан пример диффеоморфизма, имеющего счетное число периодических траекторий. Ценность этого примера двойка. Во-первых, он обладает многими замечательными свойствами. Его орбиты чувствительны к изменению начальных условий: малейшее изменение начальной точки влечет радикальные изменения орбиты за сравнительно короткий период времени. Говорят, что такой диффеоморфизм демонстрирует хаотическое поведение орбит. Во-вторых, эти замечательные свойства сохраняются при малом возмущении. Они оказываются общими для широкого класса динамических систем — так называемых гиперболических.

Мы подробно опишем модифицированную версию подковы — пример, который можно рассказывать школьникам, и изучим ее замечательные свойства. В конце параграфа будет сказано несколько слов об исходной конструкции подковы. То, что свойства подковы сохраняются при малых возмущениях, — глубокий факт теории динамических систем. Мы не будем здесь касаться его доказательства.

9.2.1 Олимпиадная задача о целых частях

На Московской математической олимпиаде для старшеклассников в 1993 году была предложена следующая задача.

Для каждой пары действительных чисел a и b рассмотрим последовательность чисел

$$p_n = [2\{an + b\}].$$

Любые k подряд идущих членов этой последовательности назовём словом. Верно ли, что любой упорядоченный набор из нулей и единиц длины k будет словом последовательности, заданной некоторыми a и b при $k = 4$; при $k = 5$?

Примечание: $[c]$ — целая часть, $\{c\}$ — дробная часть числа c .

У этой задачи есть естественная геометрическая интерпретация. Рассмотрим окружность $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ и поворот

$$f: S^1 \rightarrow S^1, \quad x \mapsto x + a. \quad (9.7)$$

Рассмотрим орбиту точки b под действием поворота: $b_n = f^n(b)$, $n \in \mathbb{Z}$. Тогда последовательность p_n описывает поведение орбиты в следующем смысле: $p_n = 0$, если b_n принадлежит верхней полуокружности $[0, 1/2)$, и $p_n = 1$ в противном случае.

Теперь легко решить задачу. Если последовательность $\{p_n\}$ содержит много нулей подряд, то орбита проводит много времени в верхней полуокружности и, значит, угол поворота мал. Когда орбита в конце концов попадет в нижнюю полуокружность, она проведет много времени и там. Поэтому последовательность, имеющая много нулей подряд, а затем одну единицу и ноль после нее, не может быть реализована как слово.

Например, не реализуется последовательность 00010. Действительно, три нуля подряд могут встретиться лишь при $|a| < 1/4$. С другой стороны, комбинация 010 показывает, что точка орбиты переходит при одном повороте с верхней полуокружности на нижнюю, а при следующем — с нижней на верхнюю. Из этого следует, что $|a| > 1/4$. Полученное противоречие показывает, что при $k = 5$ ответ в задаче — НЕТ.

Ответ ДА при $k = 4$ легко получается приведением конкретных примеров.

9.2.2 Понятия символической динамики

Символическая динамика изучает орбиты отображений со следующей точки зрения. Рассмотрим отображение f некоторой области, называемой фазовым пространством, на себя. Разложим фазовое пространство в объединение конечного числа попарно непересекающихся множеств D_j ; такое разложение называется *разбиением*. Любая точка x фазового пространства определяет последовательность $\{\omega_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$:

$$\omega_n = j \iff f^n x \in D_j.$$

Вместо рассмотрения точных формул для орбит, мы помним только, какой области данного разбиения принадлежит n -я точка орбиты. Последовательность $\{\omega_n\}$ называется *судьбой точки*. В литературе также используется термин *маршрут*. Один из основных изучающихся в символической динамике вопросов таков: *Какие последовательности могут быть реализованы как судьбы точек данного отображения? Какие точки имеют одинаковую судьбу?*

Замечание 9.2.1. Для иррационального вращения окружности ($\alpha \notin \mathbb{Q}$ в (9.7)) судьба определяет точку однозначно. Это неверно для рационального вращения.

Пример 9.2.2. Задача пункта 9.2.1 показывает, что многие последовательности не могут быть реализованы как судьбы точек для вращения окружности на какой бы то ни было угол.

9.2.3 Отображение подковы

Отображение, описанное здесь, несколько не напоминает подкову. Первоначальное отображение подковы, предложенное Смейлом, будет описано в пункте 9.2.10.

Возьмем единичный квадрат $B = [0, 1] \times [0, 1]$ на координатной плоскости. Разделим его на пять равных горизонтальных прямоугольников и обозначим второй и четвертый снизу через D_0 и D_1 соответственно. Разделим этот же квадрат на пять равных вертикальных прямоугольников и обозначим второй и четвертый слева через D'_0 и D'_1 соответственно.

Рассмотрим *гиперболический поворот* f_0 прямоугольника D_0 с центром в точке $(1/4, 1/4)$, который сжимает в пять раз в горизонтальном направлении и растягивает в пять раз в вертикальном направлении и, значит, отображает D_0 на D'_0 . Рассмотрим аналогичный гиперболический поворот $f_1: D_1 \rightarrow D'_1$ с центром в точке $(3/4, 3/4)$.

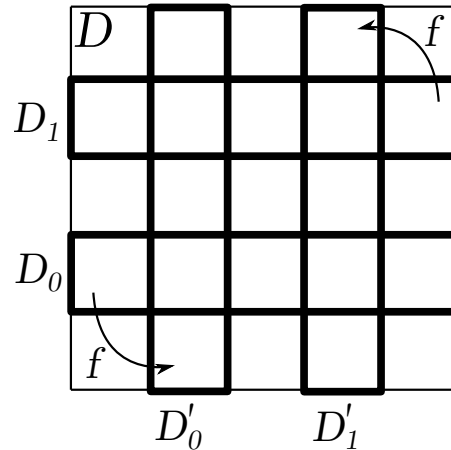


Рис. 9.15: Подкова Смейла: отображение подковы

Пусть

$$f|_{D_0} = f_0, \quad f|_{D_1} = f_1 \quad (9.8)$$

(см. рис. 9.15). *Отображение подковы* f — это кусочно-линейное отображение, определенное в несвязной области. Область определения отображения подковы обозначим через $D := D_0 \cup D_1$ и назовем *фазовым пространством* отображения. Итерации f определены не на всем фазовом пространстве. *Орбитой* точки x называется последовательность всех итераций x , которые определены. Если итерации определены для всех целых показателей, то орбита называется *полной*. Множество всех полных орбит оказывается очень маленьким: оно является произведением двух нигде не плотных канторовых⁴ множеств.

Для любого $x \in D$ её *судьбой* называется двусторонняя бесконечная последовательность

$$\omega(x) = \{\omega_n(x) | n \in \mathbb{Z}\}, \quad \omega_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{если точка } f^n x \text{ лежит в } D_0, \\ 1 & \text{если точка } f^n x \text{ лежит в } D_1, \\ * & \text{если итерация } f^n \text{ не определена в } x. \end{cases}$$

Мы интересуемся точками, судьбы которых не содержат звездочек.

Теорема 9.2.3. *Любая двусторонняя бесконечная последовательность нулей и единиц может быть реализована как судьба ровно одной точки $x \in D$ при отображении f .*

Теорема будет доказана в двух следующих пунктах.

⁴Георг Фердинанд Кантор (1845 – 1918) — математик, создатель теории множеств. Также занимался теорией чисел.

9.2.4 Точки с предписанным будущим

Рассмотрим конечную последовательность нулей и единиц:

$$\omega_n^+ = \omega_0 \dots \omega_{n-1}. \quad (9.9)$$

Назовем её *будущей судьбой длины n* . Рассмотрим множество

$$D(\omega_n^+) = \{x \in D \mid \omega_j(x) = \omega_j, j = 0, \dots, n-1\}. \quad (9.10)$$

Оно состоит из точек с данной будущей судьбой длины n , равной ω_n^+ . Мы опишем это множество ниже в лемме 9.2.4. Начнем с малых n .

Случай $n = 1$. Множество $D(\omega_0^+)$ — это множество всех точек, переходящих в D_{ω_0} при отображении $f^0 = \text{id}$; оно совпадает с D_{ω_0} . Итак, $D(0) = D_0, D(1) = D_1$.

Случай $n = 2$. Будущая судьба длины 2 может иметь следующий вид: 00, 01, 10, 11. Множество $D(00)$ состоит из тех точек, которые принадлежат прямоугольнику D_0 вместе с их образом. Так как $f(D_0) = D'_0$, образ такой точки должен лежать в квадрате $D_0 \cap D'_0$ — во второй снизу пятой части прямоугольника D'_0 . Так как отображение f линейно, сама точка должна лежать во второй снизу пятой части прямоугольника D_0 .

Разделим D_0 на пять равных горизонтальных прямоугольников. Второй снизу прямоугольник и есть $D(00) = f^{-1}(D_0 \cup D'_0)$.

Точно так же получаем, что $D(01)$ — четвертый снизу прямоугольник этого разбиения. Если аналогичным образом разбить прямоугольник D_1 , то $D(10)$ и $D(11)$ будут вторым и четвертым снизу прямоугольниками этого разбиения.

Чтобы описать точки с фиксированной будущей судьбой в общем случае, нам понадобится конструкция, похожая на конструкцию канторова множества.

Модифицированное канторово множество C

Мы построим модифицированное канторово множество на отрезке $[0, 1]$. Сначала определим и занумеруем отрезки n -го ранга по индукции.

Отрезки первого ранга — $\sigma(0) = [1/5, 2/5]$ и $\sigma(1) = [3/5, 4/5]$. Они имеют номера 0 и 1 соответственно.

Отрезки ранга n будут занумерованы последовательностями ω_n^+ длины n и обозначены $\sigma(\omega_n^+)$. Пусть отрезок $\sigma(\omega_n^+)$ уже построен. Пусть $\omega_{n+1}^+ = \omega_n^+0$ или ω_n^+1 . Разобьем отрезок $\sigma(\omega_n^+)$ на пять равных отрезков. Пусть $\sigma(\omega_n^+0)$ — второй слева отрезок разбиения, а $\sigma(\omega_n^+1)$ — четвертый слева отрезок разбиения.

Обозначим объединение всех отрезков ранга n через W_n (см. рис. 9.16). *Модифицированное канторово множество C* — это пересечение $C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} W_n$.

Лемма 9.2.4. 1) Для любого ω_n^+ вида (9.9) множество точек с будущей судьбой ω_n^+ имеет вид

$$D(\omega_n^+) = [0, 1] \times \sigma(\omega_n^+). \quad (9.11)$$

Кроме того, множество $Y_n = f^{n+1}(D(\omega_n^+))$ — вертикальный прямоугольник высоты 1.

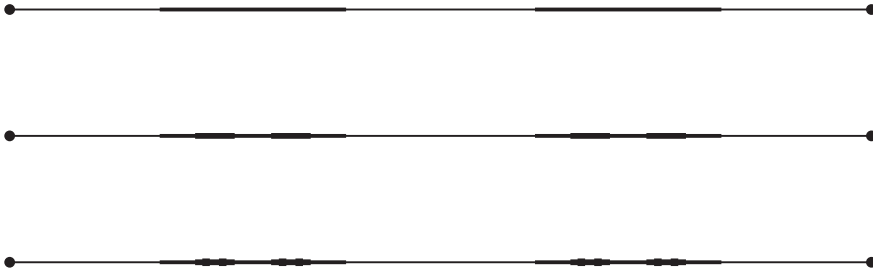


Рис. 9.16: Построение модифицированного канторова множества C

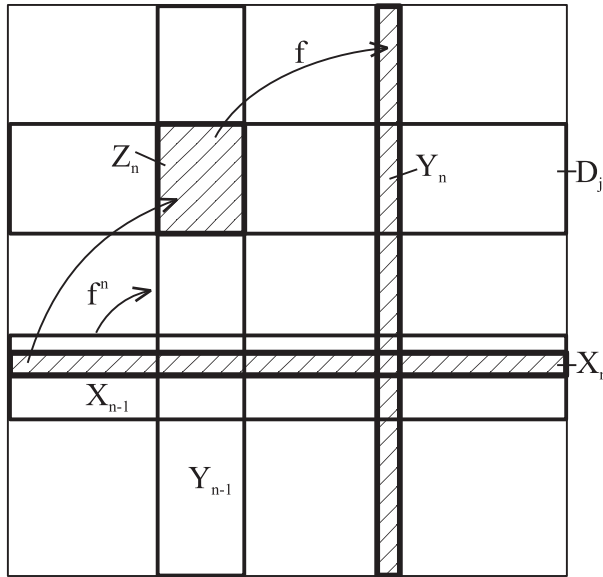


Рис. 9.17: Точки с предписанным будущим

2) Множество всех точек, для которых определена итерация f^n , имеет вид:

$$D_n = [0, 1] \times W_n.$$

Доказательство. Утверждение 2) есть очевидное следствие утверждения 1). Утверждение 1) доказывается индукцией по n . База индукции, случай $n = 1$, уже был рассмотрен. Перейдем к шагу индукции (см. рис. 9.17).

Предположим, что (9.11) верно для слова ω_{n-1}^+ . Докажем это утверждение для слова ω_{n-1}^+1 (доказательство для слова ω_n^+0 аналогично). По определению

$$X_n := D(\omega_{n-1}^+1) = \{x \in D(\omega_{n-1}^+) \mid f^n(x) \in D_1\}. \quad (9.12)$$

Под действием линейного отображения f^n прямоугольник $X_{n-1} = D(\omega_{n-1}^+)$ переходит в прямоугольник Y_{n-1} , который имеет высоту 1 в силу предположения индукции. Пересечение $Z_n = Y_{n-1} \cap D_1$ — это образ под действием отображения f

множества X_n , которое мы ищем. Это пересечение является четвертым снизу прямоугольником, полученным при разбиении Y_{n-1} горизонтальными линиями на пять равных прямоугольников. В силу линейности f^n , искомое множество $X_n = f^{-n}(Z_n)$ является четвертым снизу прямоугольником разбиения X_{n-1} на пять равных прямоугольников. Теперь формула (9.11) следует из построения отрезков $\sigma(\omega_n^+)$

В силу сказанного, прямоугольник $f^n(D(\omega_{n-1}^+ 1))$ совпадает с $Z_n = Y_{n-1} \cap D_1$. Его горизонтальные стороны принадлежат горизонтальным сторонам D_1 . Значит, $Y_n = f^{n+1}(D(\omega_{n-1}^+ 1)) = f(Z_n)$ — вертикальный прямоугольник высоты 1. Это доказывает утверждение 1) и лемму 9.2.4. \square

Теперь мы можем найти множество всех точек с предписанным бесконечным будущим

$$\omega^+ = \omega_0 \dots \omega_n \dots$$

Пусть ω_n^+ — n -значное укорочение этой последовательности. Напомним, что выше мы построили модифицированное канторово множество

$$C = \bigcap W_n.$$

Пусть $x(\omega^+)$ — точка этого множества:

$$x(\omega^+) = \bigcap_{n \geq 0} \sigma(\omega_n^+). \quad (9.13)$$

Из леммы 3.1 немедленно следует

Следствие 9.2.5. *Множество $D(\omega^+)$ точек с предписанным будущим ω^+ дается формулой*

$$D(\omega^+) = [0, 1] \times x(\omega^+) \quad (9.14)$$

и является горизонтальным отрезком.

9.2.5 Точки с предписанным прошлым. Доказательство теоремы 9.2.3

Прошлое точки при отображении f совпадает с ее будущим при обратном отображении с небольшими изменениями в нумерации, описанными ниже. Отображение f^{-1} имеет те же свойства, что и f , только вертикальные и горизонтальные координаты меняются местами. Точнее, определим *обращение* последовательности, занумерованной отрицательными числами

$$\omega^- = \omega_{-1} \dots \omega_{-n} \dots,$$

как последовательность, занумерованную неотрицательными числами

$$\alpha^+ = \alpha_0 \dots \alpha_{n-1} \dots, \quad \alpha_n = \omega_{-n-1}.$$

Обозначим

$$\alpha^+ = \text{rev}(\omega^-).$$

Следующая лемма является полным аналогом следствия 9.2.5.

9.2.6. Вычисление координат точки по её судьбе

Лемма 9.2.6. Множество всех точек $D(\omega^-)$ с предписанным прошлым ω^- имеет вид

$$D(\omega^-) = x(\alpha^+) \times [0, 1] \quad (9.15)$$

(где α^+ — обращение ω^-), и является вертикальным отрезком.

Доказательство. Прошлое точки x под действием отображения f^{-1} есть $\alpha^+ = \alpha_0\alpha_1\dots\alpha_n\dots$ если и только если $f^{-n}x \in D'_{\alpha_n}$. Последнее эквивалентно $f^{-(n+1)}x \in D_{\alpha_n}$. Значит, если прошлое точки x под действием f есть ω^- , то будущее точки x под действием f^{-1} есть $\alpha^+ = \text{rev } \omega^-$.

Лемма 9.2.6 теперь следует из леммы 9.2.4, при этом вертикальное и горизонтальное направления меняются местами. \square

Теорема вытекает из следствия 9.2.5 вместе с леммой 9.2.6. Действительно, искомая точка ω может быть построена следующим образом. Разделим ω на будущую и прошлую части

$$\omega = \omega^- \omega^+.$$

Тогда точка $x(\omega)$ с судьбой ω есть пересечение

$$x(\omega) = D(\omega^+) \cap D(\omega^-). \quad (9.16)$$

Это единственная точка пересечения вертикального и горизонтального отрезков. Теорема 9.2.3 доказана.

9.2.6 Вычисление координат точки по её судьбе

Формула (9.16), расшифрованная при помощи (9.13), (9.14), (9.15), позволяет выразить координаты x, y точки $x(\omega)$ в терминах ω . Действительно, канторово множество C в предыдущей конструкции есть множество всех точек единичного отрезка, в пятеричном разложении которых встречаются только цифры 1 и 3. Более того,

$$x = x(\omega^+) = \sum_0^{\infty} \frac{\gamma_j}{5^{j+1}}, \quad y = x(\alpha^+) = \sum_{-1}^{-\infty} \frac{\gamma_j}{5^{-j}}, \quad (9.17)$$

где $\gamma_j = 1$, если $\omega_j = 0$, и $\gamma_j = 3$, если $\omega_j = 1$; $\alpha^+ = \text{rev}(\omega^-)$.

9.2.7 Сдвиг Бернулли

Рассмотрим множество Σ^2 всех двусторонних бесконечных последовательностей нулей и единиц

$$\omega = \dots \omega_{-n} \dots \omega_{-1} \omega_0 \omega_1 \dots \omega_n \dots$$

и рассмотрим отображение сдвига

$$\omega \mapsto \sigma\omega, \quad \sigma\omega = \dots \omega'_{-n} \dots \omega'_{-1} \omega'_0 \omega'_1 \dots \omega'_n \dots, \quad \omega'_j = \omega_{j+1}.$$

Оно называется *сдвигом Бернулли*.

Метрика на пространстве Σ^2 задается нормой:

$$\|\omega\| = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega_n}{2^{|n|}}. \quad (9.18)$$

Замечание 9.2.7. Сдвиг Бернулли определен также и в пространстве Σ^N всех двусторонних бесконечных последовательностей, состоящих из элементов $\{0, 1, \dots, N-1\}$.

Если точка x имеет судьбу ω , то точка $f(x)$ имеет судьбу $\sigma(\omega)$. Соответствие (точка \mapsto судьба):

$$\Phi: x \mapsto \omega(x)$$

сопрягает отображение f , ограниченное на $C \times C$, со сдвигом σ , то есть диаграмма

$$\begin{array}{ccc} C \times C & \xrightarrow{f} & C \times C \\ \Phi \downarrow & & \downarrow \Phi \\ \Sigma^2 & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma^2 \end{array}$$

коммутативна. Более того, отображение Φ является гомеоморфизмом метрических пространств. Напомним, что метрика на Σ^2 задана формулой (9.18), а метрика на $C \times C$ индуцируется из объемлющей плоскости. Гомеоморфность отображения Φ следует из формул (9.17), (9.18) и может рассматриваться как одна из мотивировок определения метрики на Σ^2 .

Упражнение 166. Дайте подробное доказательство гомеоморфности Φ .

Сопряжение со сдвигом Бернулли есть мощное средство для описания отображений при помощи символической динамики. Некоторые приложения будут даны в следующем пункте.

9.2.8 Следствия

Следствие 9.2.8. *Отображение f имеет бесконечно много периодических орбит.*

Доказательство. Периодическая точка отображения — это точка, которая возвращается в исходное место после конечного числа итераций. Такой точке соответствует периодическая судьба. Предыдущая теорема показывает, что обратное тоже верно: точка с периодической судьбой является периодической. Действительно, предположим, что судьба точки x периодична с периодом N . Это означает, что точки x и $f^N x$ имеют одинаковую судьбу. Из утверждения единственности теоремы 9.2.3 следует, что эти точки совпадают.

Так как периодических судеб бесконечно много, периодических орбит отображения f тоже бесконечно много. \square

9.2.9. Динамика и философия: детерминизм и хаос

Напомним, что отображение f имеет две неподвижных точки: $a_0 = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) \in D_0$ и $a_1 = (\frac{3}{4}, \frac{3}{4}) \in D_1$. Их судьбы — $(\dots 00000 \dots)$ и $(\dots 1111 \dots)$ соответственно. Траектория называется *гомоклинической* траекторией неподвижной точки, если она стремится к этой точке при $n \rightarrow +\infty$ и при $n \rightarrow -\infty$.

Следствие 9.2.9. *Для каждой из двух неподвижных точек отображения f найдется бесконечное количество траекторий, гомоклинических к этой точке.*

Доказательство. Мы рассмотрим только гомоклинические траектории точки a_0 ; для второй неподвижной точки доказательство аналогично.

Из определения гомоклинической траектории следует, что если траектория точки x гомоклиническая к неподвижной точке $a_0 \in D_0$, то её судьба состоит из нулей, за исключением конечного числа элементов. Докажем, что обратное тоже верно: последовательность, состоящая из нулей (за исключением конечного числа элементов), является судьбой точки, гомоклинической к неподвижной точке a_0 .

Действительно, положительные сдвиги $\sigma^n \omega$ таких последовательностей стремятся к нулевой последовательности в Ω при $n \rightarrow +\infty$ в смысле метрики (9.18). То же верно и для отрицательных сдвигов, $n \rightarrow -\infty$. Нулевая последовательность — судьба неподвижной точки a_0 . Соответствие (ω : точка \rightarrow судьба) является непрерывным, поэтому из сходимостей $\sigma^n \omega \rightarrow (\dots 0000 \dots)$, $n \rightarrow \pm\infty$, следуют сходимости $f^n(x) \rightarrow a_0$, $n \rightarrow \pm\infty$. Итак, последовательность с конечным числом ненулевых элементов является судьбой точки, имеющей гомоклиническую траекторию. Утверждение следует из того, что таких последовательностей бесконечно много. \square

Гетероклиническая орбита — это орбита, стремящаяся к одной неподвижной точке при $n \rightarrow +\infty$ и к другой — при $n \rightarrow -\infty$.

Следствия ниже доказываются так же, как предыдущие.

Следствие 9.2.10. *Отображение f имеет бесконечно много гетероклинических орбит.*

Следствие 9.2.11. *Для любых точек $x, y \in C \times C$ существует такая точка, что ее орбита приближает орбиту точки x при $n \rightarrow +\infty$ и орбиту точки y при $n \rightarrow -\infty$.*

Следствие 9.2.12. *Для любого N отображение f имеет лишь конечное число периодических орбит периода N .*

Открытие подковы Смейла было сенсацией не только в динамике. Чтобы понять это, мы должны вернуться на два века в прошлое.

9.2.9 Динамика и философия: детерминизм и хаос

Повторим здесь слова Пьера Симона Лапласа, приведенные во введении:

«Ум, которому были бы известны для какого-либо данного момента все силы, одушевляющие природу, и относительное расположение ее составных частей, если бы вдобавок он оказался достаточно обширным, чтобы

подчинить эти данные анализу, обнял бы в одной формуле движение величайших тел Вселенной наравне с движениями мельчайших атомов: не осталось бы ничего, что было бы для него недостоверно, но и будущее, также как и прошедшее, предстало бы перед его взором».

Большое философское открытие стоит за этими словами — понимание того, что все эволюционные процессы во Вселенной могут быть описаны обыкновенными дифференциальными уравнениями, естественно, в фазовом пространстве очень большой размерности.

Эта концепция базируется на математическом факте, который в то время оставался за горизонтом науки. Имеется в виду теорема существования и единственности для решений обыкновенных дифференциальных уравнений, которая была доказана позже Огюстеном Луи Коши.

Долгое время считалось, что философия, основанная на этой теореме (которая сейчас входит в любой курс дифференциальных уравнений), адекватно описывает реальность. Подкова Смейла мотивирует совершенно иную точку зрения. Пусть мы рассматриваем процесс, моделируемый отображением f , описанным выше, и изучаем орбиты этого отображения. Мы интересуемся, как и раньше, не самими орбитами, а лишь судьбой точек. Предположим, что мы дважды рассматриваем орбиту одной и той же точки, начиная с вычисления координат этой точки. Проблема состоит в том, что вычисления координат могут быть произведены лишь приблизительно. Если мы имеем дело с данными экспериментальной природы, то результат двух вычислений будет немного разным. Чем меньше разница, тем дольше судьбы будут совпадать. Однако через большое время они обязательно разойдутся.

Рассмотрим полную судьбу некоторой точки x и предположим, что одновременно бросается монетка. Результат n -го бросания есть n -й член последовательности: единица — в случае орла и ноль — в случае решки. Затем две последовательности объединяются: до некоторого номера, скажем, до 1000, берутся члены первой последовательности, а потом — члены второй. В силу теоремы реализации из пункта 9.2.3 найдется точка, судьба которой совпадает с получившейся последовательностью. Эта точка очень близка к x — расстояние между ними порядка 5^{-1000} , и поэтому невозможно увидеть, что это различные точки. Тем не менее, начиная с некоторого момента, их судьбы разойдутся и их различие будет хаотическим.

Это явление возникает в различных процессах, моделируемых дифференциальными уравнениями. Оно обычно называется *невоспроизводимостью эксперимента*. Можно повторять эксперимент в условиях, которые кажутся полностью совпадающими, и получать каждый раз разные результаты. Это связано с эффектом *экспоненциального разбегания траекторий*, которое описано здесь для подковы Смейла.

В последние десятилетия изучение хаотического поведения детерминированных систем стало предметом живого интереса. Многие системы, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями даже в фазовом пространстве малого числа измерений, являются детерминированными лишь теоретически. Это объясняется невоспроизводимостью эксперимента, связанной с экспоненциальным разбеганием траекторий.

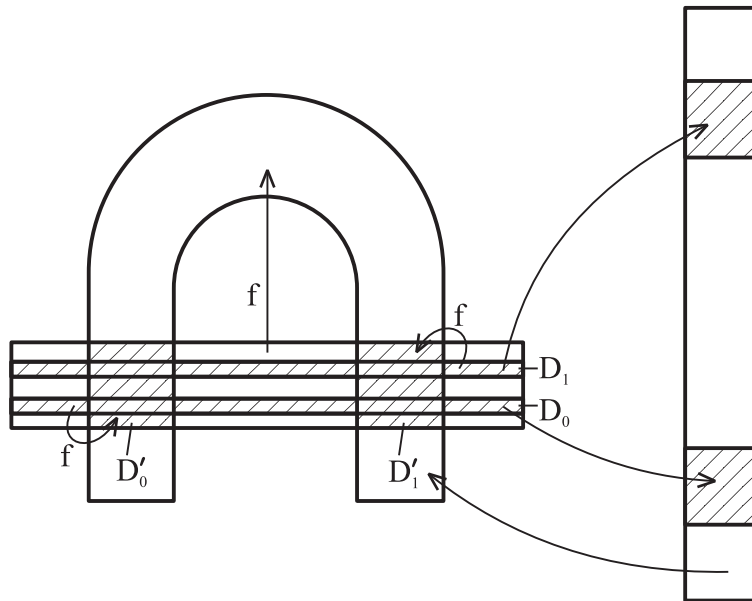


Рис. 9.18: Подкова

Теперь мы вернемся к нашему примеру. Мы собираемся объяснить, почему отображение, определенное в пункте 9.2.3, известно как *подкова* Смейла.

9.2.10 Подкова

Изначально подкова Смейла строилась следующим образом. Длинный прямоугольник сильно сжат в горизонтальном направлении и сильно растянут в вертикальном. Затем он согнут в подкову и после этого наложен на свой прообраз (см. рис. 9.18). Композиция этих отображений и есть подкова. На первый взгляд она совсем не похожа на отображение, определенное в пункте 9.2.3. Но на самом деле после несложного анализа легко увидеть похожие детали (см. рис. 9.18).

Рассмотрим пересечение области определения подковы с ее образом. Оно состоит из двух прямоугольников, заштрихованных на рисунке 9.18. Обозначим левый прямоугольник через D'_0 , а правый — через D'_1 . Предположим, что обратное отображение, ограниченное на объединение этих прямоугольников, линейно; это предположение было частью оригинальной конструкции Смейла. Тогда прообразы D'_0 и D'_1 — это длинные горизонтальные прямоугольники. Обозначим их D_0 и D_1 соответственно. Отображение подковы переводит горизонтальные прямоугольники в вертикальные так же, как отображение f , изученное раньше. Это гиперболический поворот на меньшем нижнем прямоугольнике и композиция гиперболического поворота и центральной симметрии — на верхнем. Оно имеет такие же свойства, как и f .

Примеры этого параграфа кусочно-линейны и потому сильно вырождены. Каковы свойства их нелинейных возмущений? Оказывается, что с точки зрения символичес-

ской динамики все свойства сохраняются. Доказательства используют *гиперболическую теорию*.

Создание этой теории (Смейл, Аносов⁵, Синай⁶ и другие) произвело “гиперболическую революцию” в теории динамических систем. Изложение этой теории выходит за рамки нашего учебника.

1. Опишите множество всех точек единичного квадрата, для которых определены все отрицательные итерации отображения f . Дайте схематический рисунок этого множества.
2. Докажите следствия 9.2.10 – 9.2.12.
3. Для отображения f найдите точку $p \in D_0$ такую, что $f^k p \in D_0$ при всех $k > 0$, и $f^k p \in D_1$ при всех $k < 0$.
4. Для отображения f найдите судьбу точки $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ под действием отображения f .
5. Точка называется *предпериодической* для некоторого отображения, если один из её образов — периодическая точка. Докажите, что рациональные точки и только они — предпериодические в прямом и обратном времени для отображения подковы.
6. Рассмотрим отображение подковы f . Пусть точка p обладает следующим свойством: $f^k p \in \{x = \frac{1}{4}\}$ при $k \geq 0$; $f^k p \in \{y = \frac{1}{4}\}$ при $k \leq -1$. Существуют ли такие точки p , и если да, то сколько?
7. (*) Постройте точку x , орбита которой плотна в подкове: для любой окрестности любой точки y , для которой определены прямые и обратные итерации отображения f , некоторый образ точки x под действием f попадает в эту окрестность.
Указание: докажите, что если в судьбах двух точек есть одинаковая длинная последовательность нулей и единиц, то образы этих точек под действием f^k очень близки для некоторого k .
8. (а) Постройте аналог отображения подковы, для которого точки, имеющие полную орбиту, кодируются последовательностями из трех символов.
(б) Для построенного отображения вычислите координаты точки по ее судьбе.

⁵Дмитрий Викторович Аносов (1936 – 2014) — математик, один из авторов «гиперболической революции» в теории динамических систем.

⁶Яков Григорьевич Синай (род. 1935) — математик, известен своими работами на стыке статистической физики, теории вероятностей и теории динамических систем.