1 Лекция 1. Основные понятия. Уравнения на прямой.

1.1 Процессы, описываемые дифференциальными уравнениями. Мета - гипотеза Лапласа.

1.2 Основные понятия:

фазовое пространство, векторное поле, поле направлений, автономное и неавтономное дифференциальное уравнение и его решения, интегральные и фазовые кривые, особые точки.

Решение дифференциального уравнения

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{1}$$

удовлетворяет тождеству

$$\dot{\varphi}(t) \equiv f(t, \varphi(t)). \tag{2}$$

1.3 Рисование интегральных кривых автономного уравнения на прямой без решения

Будет доказано:

Предложение 1 *Все решения уравнения*

$$\dot{x} = v(x), v \in C^1, \tag{3}$$

с начальными условиями между двумя особыми точками определены на всей оси и асимптотически стремятся к этим особым точкам.

Это дает возможность рисовать интегральные кривые уравнения (3), как только нарисован график правой части.

На лекции разобран пример.

1.4 Поля направлений и интегральные кривые

Теорема 1 *Интегральные кривые поля направлений на плоскости, заданного векторами* $(1, f(t, x))$ *- это в точности графики решений уравнения* $\dot{x} = f(t, x)$.

Доказательство *График решения касается направлений поля* $\Leftarrow$ производная - это наклон касательной.

Доказательство обратного утверждения будет рассказано на следующей лекции. □

1.5 Один пример

Уравнение $\dot{x} = x$ имеет решения $\varphi(t) = ce^t$. Оно описывает свободное размножение любой популяции, и в частности - человечества. Это открытие сделал Мальтус немногим более двухсот лет назад. Тогда оно вызвало панику - возникло опасение, что ресурсов Земли не хватит человечеству, размножающемуся по экспоненте. В то время тревога была преждевременной. Сейчас она вполне злободневна. Так будем же бережливы к нашему такому маленькому Земному Шару!