Семинарский листок 1

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ-I

Счётные и несчётные множества, иррациональные числа, упорядоченные поля, аксиома Архимеда, ограниченные множества, аксиома непрерывности

1. Докажите, что множества целых и рациональных чисел счётны, а множество вещественных чисел континуально.

2. Докажите, что множество всех возрастающих последовательностей натуральных чисел несчётно.

3. Пусть E — счётное подмножество $\mathbb{R}$. Докажите, что найдётся число a такое, что пересечение множеств $E+a$ и E пусто.

4. Докажите, что всякое упорядоченное поле содержит бесконечное количество элементов.

5. Докажите, что на поле комплексных чисел нельзя ввести отношение порядка.

6. Докажите, что существует число $\sqrt{2}$, то есть вещественное число, которое в квадрате даёт 2, и оно иррационально.

7. Найдите точные верхние и нижние грани следующих множеств:

$$(a)\ \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}; \quad (b)\ \{x \in \mathbb{Q} \mid x^3 > 2\}; \quad (c)\ \left\{(-1)^n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}.$$

8. Докажите, что теорема о существовании верхней грани эквивалентна аксиоме непрерывности. Иными словами, упорядоченное множество, у которого каждое ограниченное сверху множество имеет точную верхнюю грань есть $\mathbb{R}$.

9. Докажите архимедовость полей $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ и неархимедовость поля рациональных функций над $\mathbb{R}$ с отношением порядка определённым на лекции.