Листок 1
ТЕОРИЯ МИНИМАЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЙ
ВВЕДЕНИЕ

1. Пусть M — подмногообразие риманова многообразия $(\bar{M}, \bar{g})$ и g — индуцированная метрика на M. Обозначим через $\bar{R}$ и R тензоры Римана метрик $\bar{g}$ и g соответственно и через B — вторую квадратичную форму M. Отождествим касательные векторные поля X, Y, Z, W с их образами при вложении многообразия M в $\bar{M}$.

(а) Докажите *уравнение Гаусса*

$$\langle R(X,Y)Z,W\rangle_{\bar{g}} = \langle \bar{R}(X,Y)Z,W\rangle_{\bar{g}} - \langle B(X,W),B(Y,Z)\rangle_{\bar{g}} + \\ +\langle B(X,Z),B(Y,W)\rangle_{\bar{g}},\ \forall X,Y,Z,W \in \Gamma(TM).$$

(б) Докажите *уравнение Кодацци*

$$(\nabla_X B)(Y,Z) - (\nabla_Y B)(X,Z) = -(\bar{R}(X,Y)Z)^{\perp},\ \forall X,Y,Z \in \Gamma(TM).$$

(в) Докажите *уравнение Риччи*

$$\langle R(X,Y)\mu,\nu\rangle_{\bar{g}} = \langle \bar{R}(X,Y)\mu,\nu\rangle_{\bar{g}} + \langle B(X,e_i),\mu\rangle_{\bar{g}}\langle B(Y,e_i),\nu\rangle_{\bar{g}} - \\ -\langle B(X,e_i),\nu\rangle_{\bar{g}}\langle B(Y,e_i),\mu\rangle_{\bar{g}},\ \forall X,Y \in \Gamma(TM), \mu,\nu \in \Gamma(NM),$$

здесь e_i — локальный ортонормированный базис в $\Gamma(TM)$.

г) Остаются ли верными эти уравнения, если M *погружено* в M? Ответ обоснуйте.

2. Докажите, что подмногообразие риманова многообразия вполне геодезично тогда и только тогда, когда его вторая квадратичная форма тождественно равна нулю.

3. Докажите, что следующие поверхности в $\mathbb{E}^3$ являются минимальными

(а) *Катеноид*

$$\begin{cases} x = \operatorname{ch} u \cos v, \\ y = \operatorname{ch} u \sin v, & u \in \mathbb{R},\ v \in [0; 2\pi). \\ z = u, \end{cases}$$

(б) *Геликоид*

$$\begin{cases} x = u \cos v, \\ y = u \sin v, & u, h \in \mathbb{R},\ v \in [0; 2\pi). \\ z = hv, \end{cases}$$

(в) *Поверхность Эннепера*

$$\begin{cases} x = u(1 - u^2/3 + v^2)/3, \\ y = -v(1 - v^2/3 + u^2)/3, & u, v \in \mathbb{R}. \\ z = (u^2 - v^2)/3, \end{cases}$$

(г) Убедитесь в том, что геликоид и катеноид являются вложенными поверхностями, а поверхность Эннепера - погруженной.

4. Докажите *теорему Бонне*: всякая минимальная поверхность вращения в $\mathbb{E}^3$ является либо плоскостью, либо катеноидом.

5. Докажите *теорему Каталана*: всякая минимальная линейчатая поверхность в $\mathbb{E}^3$ является либо плоскостью, либо геликоидом.