1. Лекция 1. Группы Ли.

1.1. **Основные понятия.**

Определение 1.1. Вещественной (комплексной) *группой Ли* называется группа G со структурой вещественного (комплексного) гладкого многообразия (1.8), согласованной с групповыми операциями. А именно

(1) отображение умножения $m : G \times G \to G,\ m(g,h) := gh$ гладко (голоморфно);
(2) отображение обращения $i : G \to G,\ i(g) := g^{-1}$ гладко (голоморфно).

Замечание 1.2. Любая комплексная группа Ли естественным образом является вещественной группой Ли вдвое большей размерности.

В дальнейшем $\mathbb{k}$ обозначает либо поле вещественных чисел $\mathbb{R}$, либо поле комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Примеры.

(1) Любая не более чем счётная дискретная группа (в частности, конечная);
(2) Группа $\mathbb{R}$ по сложению – вещественная группа Ли размерности 1; группа $\mathbb{C}$ по сложению – комплексная группа Ли размерности 1, вещественная группа Ли размерности 2;
(3) Группа $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ по умножению – вещественная группа Ли размерности 1; группа $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ по умножению – комплексная группа Ли размерности 1, вещественная группа Ли размерности 2;
(4) Группа S^1 комплексных чисел, по модулю равных 1 по умножению – вещественная группа Ли размерности 1;
(5) Группа
$$GL_n(\mathbb{k}) = \{A \in M_n(\mathbb{k}) \mid \det A \neq 0\},$$
вещественная(комплексная) группа Ли размерности n^2: как открытое подмножество векторного пространства $M_n(\mathbb{k})$ наделяется структурой гладкого многообразия. Умножение задаётся многочленами, обращение – рациональными функциями со знаменателем не обращающимся в ноль, то есть гладкими отображениями. $GL_n(\mathbb{C})$ является вещественной группой Ли размерности $2n^2$.
(6) Группа
$$Aff_n(\mathbb{k}) = \{X \to AX + b \,| A \in GL_n(\mathbb{k}), b \in \mathbb{k}^n\},$$
вещественная(комплексная) группа Ли размерности n^2+n. Элементы матрицы A и столбца b задают координаты на $Aff_n(\mathbb{k})$.
(7) Группа кватернионов $\mathbb{H}$ по сложению и группа $\mathbb{H}^* = \mathbb{H} \setminus \{0\}$ по умножению являются вещественными группами Ли размерности 4.
(8) Если G_1 и G_2 – группы Ли, то $G_1 \times G_2$ тоже группа Ли. Отсюда $\mathbb{k}^n, (S^1)^n, (\mathbb{k}^*)^n$ – группы Ли.

Топологической группой Ли называется такое топологическое пространство, являющееся группой, что отображения умножения и взятия обратного элемента непрерывны. Предположим, что топологическая группа является топологическим многообразием. Сколько существует способов снабдить такую группу структурой группы Ли? Ответ следующий: на такой группе существует единственная структура вещественной группы Ли [**?**].

Отметим также, что комплексная группа Ли является аналитической по определению. В вещественном случае группа Ли автоматически аналитична, то есть умножение и обращение – аналитические отображения, [**?**].

Определение 1.3. *Подгруппой Ли* в группе Ли называется вложенное подмногообразие (1.10), являющееся подгруппой.

В дальнейшем мы будем называть подмногообразием вложенное подмногообразие.

Предложение 1.4. Подгруппа Ли группы Ли сама является группой Ли.

Доказательство. Достаточно проверить, что ограничение умножения и обращения – гладкие функции, что верно для любого подмножества группы Ли с индуцированной топологией. □

Примеры.

(1) $SL_n(\Bbbk)$ является подгруппой Ли $GL_n(\Bbbk)$. Действительно, в $GL_n(\Bbbk)$ группа $SL_n(\Bbbk)$ задаётся уравнением $\det X - 1 = 0$. Ранг матрицы Якоби размера $n^2 \times 1$ имеющей вид $\left(\frac{\partial det}{\partial x_{ij}}\right)$ равен 1 в любой точке группы $SL_n(\Bbbk)$, так как частная производная определителя – это соответствующий минор матрицы X. При этом если все миноры нулевые, то и сама матрица вырождена. Это означает, что $SL_n(\Bbbk)$ – локально-замкнутое подмногообразие группы Ли $GL_n(\Bbbk)$ (1.12).
(2) Любая дискретная подгруппа группы Ли является подгруппой Ли.
(3) Единичные кватернионы образуют подгруппу Ли в мультипликативной группе Ли $\mathbb{H}^*$. Действительно, они задаются уравнением $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$, то есть являются трёхмерной сферой S^3 как многообразие.
(4) Группа B нестрого верхнетреугольных матриц является подгруппой Ли в $GL_n(\Bbbk)$, так как задаётся системой уравнений $a_{21} = \ldots = a_{n,n-1} = 0$ в $GL_n(\Bbbk)$ и матрица Якоби имеет ранг $\frac{n(n-1)}{2}$ в любой точке группы B.

Предложение 1.5. Пусть H – подгруппа Ли группы Ли G. Тогда H является замкнутым подмногообразием в G.

Доказательство. Из непрерывности операций умножения и обращения следует, что замыкание $\overline{H}$ подгруппы H – тоже подгруппа группы G. Более того, так как H – подмногообразие в G, то H является открытым подмножеством в $\overline{H}$ (**??**). Отображение $L_g : G \to G, x \mapsto xg$ является диффеоморфизмом, следовательно Hg открыто в $\overline{H}$ для любого $g \in \bar{H}$. Тогда

$$H = \overline{H} \setminus \bigcup_{g \in \overline{H} \setminus H} Hg$$

замкнуто в $\overline{H}$, а следовательно, $H = \overline{H}$.

□

На самом деле для вещественных групп Ли верно и обратное: замкнутая подгруппа вещественной группы Ли является подгруппой Ли. Для комплексных групп Ли это неверно, например S^1 не является комплексной подгруппой Ли группы $\mathbb{C}^\times$ из соображений размерности.

Определение 1.6. Гладкое отображение групп Ли, являющееся гомоморфизмом групп, называется гомоморфизмом групп Ли. *Изоморфизмом* групп Ли называется биективный гомомоморфизм, такой, что обратное отображение также является гомоморфизмом групп Ли.

Замечание 1.7. Отметим, что не очевидно, что биективный гомоморфизм групп Ли – изоморфизм. Например, для гладких многообразий биективное гладкое отображение не обязано быть диффеоморфизмом. Тем не менне, ниже мы покажем, что для групп Ли биективный гомоморфизм – это изоморфизм.

Примеры. Следующие отображения являются гомоморфизмами групп Ли:

(1) Для любой подгруппы Ли H группы Ли G вложение
$$\mathrm{in} : H \hookrightarrow G;$$
(2) Отображение $\Bbbk \to \Bbbk^*, x \mapsto exp(x)$;
(3) Отображение $\mathbb{R} \to S^1, t \mapsto e^{2\pi i t}$ с ядром $\mathbb{Z}$;
(4) Отображение $Aff_n(\Bbbk) \to GL_n(\Bbbk)$, $AX + B \mapsto A$ с ядром $\Bbbk^n$;
(5) Любой гомоморфизм не более чем счётных дискретных групп;
(6) Отображение $\det : GL_n(\Bbbk) \to \Bbbk^*$ с ядром $SL_n(\Bbbk)$.

Замечание. Ниже мы покажем, что ядро гомоморфизма групп Ли – это подгруппа Ли. Но, вообще говоря, неверно что гомоморфный образ группы Ли является подгруппой Ли. Например образ отображения $\mathbb{Z} \to S^1, x \mapsto \exp(ix)$ всюду плотен, следовательно, не является подгруппой Ли. Ещё один пример – "всюду плотная обмотка тора": отображение $\mathbb{R} \to S^1 \times S^1, x \mapsto (e^{2\pi it}, e^{2\pi i\alpha t})$ для иррационального α. Его образ всюду плотен, следовательно, не является подгруппой Ли. Ниже мы покажем, что образ гомоморфизма групп Ли является *виртуальной подгруппой Ли.*

Аппендикс. Гладкие многообразия.

Через $\Bbbk$ мы обозначаем поле $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Под *гладким отображением* вещественных или комплексных многообразий мы будем понимать бесконечно дифференцируемое отображение в вещественном случае и голоморфное – в комплексном.

Определение 1.8. Гладкое многообразие X размерности n над полем $\Bbbk$ – это хаусдорфово топологическое пространство со счётной базой снабженное набором открытых множеств $U_\alpha, \alpha \in I$ и гомеоморфизмов $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \Bbbk^n$ (атласом) таким, что $\bigcup U_\alpha = X$ и для любых $\alpha, \beta \in I$ отображение $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \Bbbk^n \to \Bbbk^n$ гладко.

Определение 1.9. Пусть N, M – многообразия. Погруженным подмногообразием многообразия M называется образ инъективной иммерсии $i : N \to M$, то есть такого инъективного гладкого отображения, что для любой точки $y \in Y$ дифференциал $d_y i : T_y N \to T_{i(y)} M$ – инъективен. При этом топология и гладкая структура на $i(N)$ задаётся таким образом, что i – диффеоморфизм между N и $i(N)$.

Отметим, что, вообще говоря, топология на погруженном подмногообразии не совпадает с индуцированной топологией. Например, рассмотрим отображение открытого отрезка в плоскость, который делает из отрезка цифру 6. Это очевидно инъективная иммерсия, при этом индуцированная топология на отрезке не совпадает с топологией шестёрки. Более того, на одном и том же подмножестве многообразия M могут быть, вообще говоря, две разные структуры вложенного подмногообразия.

Определение 1.10. Вложенным подмногообразием называется такое погруженное подмногообразие, что иммерсия $i : N \to M$ является гомеоморфизмом между N и образом $i(N)$. Здесь на образе $i(N)$ топология – индуцированная с M.

Более явно вложенное подмногообразие можно определить следующим образом.

Определение 1.11. Вложенное подмногообразие – это такое подмножество $Y \subset X$, надлённое индуцированной топологией, что для любой точки $y \in Y$ существует карта $y \in U_y \subset X, \varphi_y : U \to \Bbbk^n$ такая, что $\varphi(Y \cap U) \subset \Bbbk^k$. В этом случае набор $(Y \cap U_y, \varphi_y|_Y)$ составляет атлас для Y.

Приведём способ построения вложенных подмнообразий многообразия M.

Предложение 1.12. Пусть N такое подмножество многообразия M, что для любой точки $a \in N$ существует такая окрестность $U \subset M$ точки a, что $\psi(U \cap N)$ задаётся системой уравнений $f_i(x_1, \ldots, x_n) = 0, i = 1, \ldots, m$, причём ранг матрицы Якоби в точке a равен m. Тогда N является локально-замкнутым подмногообразием размерности $n - m$. Более того, касательное пространство в точке a к N совпадает с пересечением ядер дифференциалов отображений f_i в точке a.