Задачи по группам и алгебрам Ли. Листок №1.

Для получения оценки 10 по данному листку необходимо сдать 100% пунктов задач без звездочек (остальные оценки высчитываются пропорционально). Дедлайн 8 октября. Задачи, сданные после дедлайна, стоят на 25% меньше.

Задача 1.

(а) Вложите (явно) $GL_n(\mathbb{C})$ в $GL_{2n}(\mathbb{R})$ и докажите, что $GL_n(\mathbb{C})$ является вещественной подгруппой Ли $GL_{2n}(\mathbb{R})$.

(б) * Докажите, что при вложении из предыдущего пункта $U(n) = O(2n) \cap Sp2n(\mathbb{R})$.

(в) Докажите, что $GL_n(\mathbb{H})$ является вещественной подгруппой Ли $GL_{4n}(\mathbb{R})$.

(г) Докажите, что любой элемент из $x \in \mathbb{H}$ можно единственным образом представить в виде

$$x = w + j \cdot z, \quad w, z \in \mathbb{C}.$$

Постройте (явно) соответствующее вложение групп $GL_n(\mathbb{H}) \to GL_{2n}(\mathbb{C})$.

(д) Для $x = a + bi + cj + dk$ определим $\overline{x} = a - bi - cj - dk$ и для $A \in GL_n(\mathbb{H})$ определим $A^* = \overline{A}^T$. Докажите, что группа

$$U(\mathbb{H}) = \{A \in GL_n(\mathbb{H}) \,|\, AA^* = E\}$$

является вещественной подгруппой Ли $GL_{4n}(\mathbb{H})$ и найдите её размерность.

(е) * Докажите, что при вложении из предыдущего пункта $U_n(\mathbb{H}) = Sp(2n, \mathbb{C}) \cap U(2n)$.

(ж) * Докажите, что $GL_n(\mathbb{H})$ и $U_n(\mathbb{H})$ не являются комплексными подгруппами Ли группы $GL_{2n}(\mathbb{C})$.

Задача 2. Рассмотрим группу $G = SO_n(\Bbbk)$ и её касательное пространство в единице T_eG обозначим через $\mathfrak{g}$. Определим *преобразование Кэли*

$$C : A \to (1 - A)(1 + A)^{-1}, A \in G$$

Докажите что:

(а) $C(G) \in \mathfrak{g}$ и отображение C обратимо и C – это биекция между открытым плотным подмножеством G и открытым плотным подмножеством $\mathfrak{g}$.

(б) С помощью преобразования Кэли введите структуру (вещественной и комплексной соответственно) группы Ли на G.

Задача 3. Группа $PGL_n(\Bbbk)$ определяется как фактор $GL_n(\Bbbk)/\Bbbk^*$. Группа $PSL_n(\Bbbk)$ определяется как фактор $SL_n(\Bbbk)$ по подгруппе диагональных матриц с определителем 1.

а) Докажите, что $PSL_n(\mathbb{C}) \simeq PGL_n(\mathbb{C})$ и $PSL_n(\mathbb{R}) \simeq PGL_n(\mathbb{R})$ при $n = 2k + 1$.

б) Докажите, что $PSL_n(\mathbb{R})$ является подгруппой Ли группы $PGL_n(\mathbb{R})$, при $n = 2k$.

в) Докажите, что $PSL_n(\mathbb{R}) \not\simeq PGL_n(\mathbb{R})$ при $n = 2k$.

г)* Докажите, $PGL_n(\Bbbk)$ является подгруппой Ли группы Ли $GL_{n^2}(\Bbbk)$.

Задача 4. Опишите все гомоморфизмы (в любом направлении) между группами Ли

(а) $(\Bbbk, +)$ и $GL_n(\Bbbk)$;

(б) $(\Bbbk, *)$ и $GL_n(\Bbbk)$.

Задача 5.

(а) Покажите, что любое многообразие (неполных) флагов $Fl_{k_1,\ldots,k_m}$ в пространстве $\Bbbk^n$ – компактно (где $\Bbbk = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$). Найдите размерность $Fl_{k_1,\ldots,k_m}$.

(б) Реализуйте верхнюю полуплоскость $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$ в виде однородного пространства.

Задача 6. Докажите, что группа Ли B невырожденных треугольных матриц является полупрямым произведением подгрупп Ли верхнетреугольных матриц с единицами на диагонали и невырожденных диагональных матриц.