2 Лекция 2. Уравнения на прямой.

2.1 Поля направлений и интегральные кривые

На прошлой лекции было сформулировано

Предложение 1 *Интегральные кривые поля направлений, заданного векторами* $(1, f(t, x))$ *- это в точности графики решений уравнения* $\dot{x} = f(t, x)$.

Доказательство *График решения касается направлений поля* $\Leftarrow$ производная - это наклон касательной.

Интегральная кривая поля - это график решения. Гладкая кривая на плоскости - это гладкое отображение интервала прямой в плоскость, производная которого нигде не равна нулю. Пусть $\gamma = \{(\varphi(\tau), \psi(\tau))\}, \dot{\gamma} \neq 0$ - интегральная кривая поля направлений, заданного векторами $(1, f(t, x))$. Вектор $\dot{\varphi}(\tau), \dot{\psi}(\tau)$ пропорционален $(1, f)$. Следовательно, $\dot{\varphi}(\tau) \neq 0$. Фиксируем произвольное τ_0. По локальной теореме об обратной, функция $t = \varphi(\tau)$ обратима в окрестности $\tau_0 : \tau = \zeta(t)$. Тогда $\gamma = \{(t, \psi \circ \zeta(t))\} = \{(t, x(t))\}$. Тем самым, γ - график функции $x(t)$. Наклон касательной к γ в точке $(t, x(t))$ равен $f(t, x(t))$. Значит, γ - график решения. $\square$

2.2 Решение простейшего уравнения:

$$\dot{x} = f(t) \tag{1}$$

Ниже доказана теорема сужествования и единственности для автономных уравнений с гладкой правой частью на прямой. Иногда мы рассматриваем уравнения с непрерывной правой частью.

Предложение 2 *Задача Коши для уравнения* (1) *с непрерывной правой частью, с начальным условием* $x(t_0) = x_0$ *имеет решение*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(t)dt.$$

Других решений нет.

Доказательство Формула Ньютона-Лейбница и теорема о нулевой производной. $\square$

2.3 Решение автономного уравнения на прямой

$$\dot{x} = v(x). \tag{2}$$

Предложение 3 *Пусть v - класса $C^1(\mathbb{R})$. Тогда через каждую точку плоскости $\mathbb{R}^2$ проходит одна и только одна интегральная кривая. Особым точкам соответствуют постоянные решения. Если x_0 - неособая точка, то интегральная кривая, проходящая через точку (t_0, x_0) имеет вид $(t(x), x)$:*

$$t(x) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \frac{1}{v(x)} dx. \tag{3}$$

Функция $t(x)$ обратима. Если x_0 принадлежит интервалу между соседними особыми точками a и b, то обратная функция $x(t)$ определена на всей прямой t.

Доказательство Интегральные кривые уравнения (2) - это интегральные кривые поля поля $(1, v(x))$. В области $v \neq 0$ это - интегральные кривые поля $\left(\frac{1}{v(x)}, 1\right)$, то есть гракфики решений уравнения

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{v(x)}.$$

Формула (3) следует из предложения 2.

Функция $t(x)$ монотонна на своей области определения. Если $v(a) = v(b) = 0,\ v|_{(a,b)} \neq 0,\ x_0 \in (a, b)$, то интеграл (3) расходится в точках a и b, поскольку функция v - C^1 гладкая. Поэтому область значений функции $t(x)$ - вся прямвя.

Единственность для неособых начальных условий следует из предложения 2. Единственность для особых начальных условий следует из расходимости интеграла (3) при $v \in C^1$. $\square$

2.4 Критерий единственности для автономных уравнений на прямой с непрерывной правой частью

Пусть теперь правая часть уравнения $\dot{x} = v(x)$ только непрерывна: $v \in C^0$. Выше уже доказано, что две интегральные кривые такого уравнения не могут пересечься в точке (t, x), если точка x неособая.

Предложение 4 *Решение уравнения $\dot{x} = v(x),\ v \in C^0$, с начальным условием $(t_0, a),\ v(a) = 0$ единственно $\Leftrightarrow$ интеграл (3) расходится в точке a.*

Доказательство Немедленное следствие из формулы (3). $\square$

2.5 Продолжимость на всю ось

Может показаться, что решение уравнения с "хорошей" правой частью продолжается на всю ось времени. Это не так, как показывает пример.

Решение задачи Коши

$$\dot{x} = x^2,\ x(0) = x_0$$

имеет вид:

$$x(t) = \frac{x_0}{1 - tx_0}.$$

При $x_0 > 0$ решение определено на $(-\infty, \frac{1}{x_0})$, при $x_0 < 0$ - на $(\frac{1}{x}0, \infty)$.

Предложение 5 *Пусть в уравнении (1) $v > 0$ ($v < 0$) на луче $x > a$. Тогда решение с начальным условием $(t_0, x_0), x_0 > a$ продолжается на весь луч $t > t_0$ (соответственно, $t < t_0$ если и только если $\int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{v(x)}$ расходится.*

Доказательство Чтобы решение было определено на всем луче оси t, нужно, чтобы соответствующая обратная функция $t(x)$, см. (**??**), отображала свою область на весь этот луч. Для этого нужно, чтобы интеграл (3) расходился на бесконечности. □

2.6 Прямые произведения фазовых портретов

Рассмотрим автономную ситему на плоскости, в которой каждое уравнение является автономным уравнением на своей координатной оси:

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x) \\ \dot{y} = G(y) \end{cases} \tag{4}$$

Тогда, если $F,\ G \in C^1(\mathbb{R})$, и $\varphi(t, x_0),\ \psi(t, y_0)$ - решения задачи Коши

$$\dot{x} = F(x),\ x(t_0) = x_0$$

и

$$\dot{y} = G(y),\ y(t_0) = y_0,$$

то вектор-функция $(\varphi(t), \psi(t))$ является решением задачи Коши для уравнения (4) с начальным условием:

$$(\varphi, \psi)(t_0) = (x_0, y_0).$$

Это немедленно следует из определений.

2.7 Примеры: седло, узел, седлоузел

1. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = -\lambda y, \ \ \lambda > 0. \end{cases} \tag{5}$$

Ее фазовый портрет изображен на рис. 3.15b (все ссылки даются на книгу ОДУ: Буфетов, Гончарук, Ильяшенко, Обыкновенные дифференциальные уравнения) и называется *седло*.

2. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda x \\ \dot{y} = \mu y, \ \ \lambda\mu > 0. \end{cases} \tag{6}$$

Ее фазовый портрет изображен на рис. 3.15a; это *узел*.

3. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ \dot{y} = -y \end{cases} \tag{7}$$

Ее фазовый портрет изображен на рис. 3.15c; это *седлоузел*.

Эти картинки, как детали пазла, встречаются на многих фазовых портретах; их полезно запомнить.

2.8 Связь интегральных кривых автономного уравнения и фазовых кривых неавтономного

Теорема 1 *Фазовые кривые уравнения*

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x, y) \\ \dot{y} = G(x, y) \end{cases} \tag{8}$$

в области $F \neq 0$ *являются интегральными кривыми неавтономного уравнения*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{G(x, y)}{F(x, y)}, \tag{9}$$

а в области $G \neq 0$ *интегральными кривыми неавтономного уравнения*

$$\frac{dx}{dy} = \frac{F(x, y)}{G(x, y)}. \tag{10}$$

Доказательство Нахождение фазовых кривых системы (8) и интегральных кривых уравнений (9) и (10) - это одна и та же задача. Действительно, фазовая кривая системы (8) в точке (x, y) касается вектора $(F(x,y),\ G(x,y))$. В области $F \neq 0$, этот вектор пропорционален вектору $\left(1, \frac{G(x,y)}{F(x,y)}\right)$, которого касается интегральная кривая уравнения (9). $\square$

2.9 Уравнения с разделяющимися переменными

Так называются уравнения вида

$$\frac{dy}{dx} = \frac{G(y)}{F(x)}. \tag{11}$$

В области $F = G = 0$ правая часть не определена. В области $F \neq 0$ фазовые кривые системы (4) совпадают с интегральными кривыми уравнения (11). Мы умеем решать систему (4), значит умеем решать и уравнение (11).

Более короткий способ решения дается следующим мнемоническим приемом: уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{G(y)}{F(x)}$$

в области $FG \neq 0$ заменяем на уравнение

$$\frac{dx}{F(x)} = \frac{dy}{G(y)}$$

и проинтегрируем обе части. Решение уравнения (11) с начальным условием $y(x_0) = y_0$ задается неявно уравнением:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{F(\xi)} = \int_{y_0}^{y} \frac{d\eta}{G(\eta)}.$$

Это так называемый *метод разделения переменных.*

Обоснование этого метода легко вывести из связи уравнения (11) с системой (4). Другое обоснование будет давно в следующих лекциях.

2.10 Система Лоттка-Вольтерра

В качестве примера рассмотрим следующую систему “хищник – жертва”:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax - Bxy \\ \dot{y} = -Cy + Dxy. \end{cases} \tag{12}$$

Эта система описывает динамику популяций, состоящих из двух видов: щуки (хищники, их число y) и караси (жертвы, их число x).

Мотивировка. В отсутствие щук караси свободно размножаются. Но щуки поедают их тем больше, чем больше есть карасей и щук. В отсутствие карасей щуки вымирают. Но при наличии карасей они размножаются со скоростью, пропорциональной наличию щук и карасей вместе.

Система (12) называется системой Лоттка-Вольтерра и объясняет следующее парадоксальное наблюдение: во время первой мировой войны, когда людям было не до карасей, и их перестали ловить, число карасей *уменьшилось*, а щуки расплодились.

Объяснение таково. Рассмотрим неавтономное уравнение, соответствующее системе (12) (все коэффициенты для простоты считаем единицами):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(x-1)}{x(1-y)}.$$

Отсюда

$$\frac{(1-y)dy}{y} = \frac{(x-1)dx}{x}$$

или

$$x - \ln x + y - \ln y = const.$$

Функция $x - lnx$ выпукла вниз и стремится к $+\infty$ при $x \to 0$ и $x \to \infty$.

Факт из анализа: сумма двух таких функций - одна от x, другая от y, в качестве линий уровня имеет замкнутые выпуклые кривые. Фазовый портрет уравнения Лоттка-Вольтерра изображен на рис. 4.6 книги: первый квадрант заполнен концентрическими замкнутыми кривыми, окружающими положение равновесия $(1,1)$.

Парадоксальное наблюдение, упомянутое выше, объясняется рассмотрением этого фазового портрета.