Ликбез по ТВ

1. Вероятностное пр-во

Ω — не более, чем счётное пр-во ("мн-во элементарных исходов"). На нём нет никакой структуры.

$\mathbb{P}: \Omega \to [0,1]$, $\sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\omega) = 1$. Расширяем $\mathbb{P}$ до функции на подмножествах $A \subset \Omega$ по правилу $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\omega)$.

Эта ф-ция множеств называется <u>вероятностью</u>.

<u>Опр</u> Пара $(\Omega, \mathbb{P})$ наз-ся вероятностным пр-вом.

<u>Св-ва $\mathbb{P}$:</u>
- $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$
- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$, если $A \cap B = \varnothing$

Легко видеть, что $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

<u>Пример</u> бросаем 2 кубика. Найти вер-ть, что в сумме выпало 3 очка.

$\Omega = \{\omega = (a, b) : 1 \le a, b \le 6\}$. $A = \{\omega : a + b = 3\}$

Разумно ввести вероятность так, чтобы $\mathbb{P}(\omega)$ не зависела от $\omega \in \Omega$.

Тогда $\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{36}$. Тогда $\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$.

Такое определение вероятности, когда $\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}$, наз-ся <u>классическим</u>.

Пример не классического опр-ия вероятности:

Кидаем кривую монетку, $\Omega = \{$Орел, решка$\}$, "О" "Р", $\mathbb{P}(\text{"О"}) = \frac{1}{3}$, $\mathbb{P}(\text{"Р"}) = \frac{2}{3}$.

<u>Пример</u> В группе N студентов. Найти вероятность, что хотя бы у двух из них дни рождения совпадают.

$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \dots, \omega_N): \ 1 \le \omega_i \le 365 \ \ \forall i\}$ + классическое опр-ие вероятности.

$A = \{\omega: \ \exists \ 1 \le i < j \le N$, для которых $\omega_i = \omega_j\}$.

$\mathbb{P}(A) = ?$

Математика начинается только отсюда. До этого — интерпретация. Она субъективна. Например, мы решили не учитывать високосные года, и допустили, что вероятность родиться в любой день одинакова.

$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c)$, где $A^c = \{\omega: \omega_i \ne \omega_j \ \forall i \ne j\}$, $\mathbb{P}(A^c) = \frac{|A^c|}{|\Omega|}$.

$|\Omega| = 365^N$, $\quad |A^c| = 365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365 - N + 1) = \frac{365!}{(365-N)!}$.

Если $\boxed{N = 23, \ \text{то} \ \mathbb{P}(A) \approx 0{,}51}$

2. Независимость, условная вер-ть.

<u>Опр</u> События $A, B \subset \Omega$ наз-ся <u>независимыми</u>, если $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$

<u>Пример</u> Бросаем симметричную монетку два раза.

$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2): \ \ \omega_j \in \{0, 1\}\}$, $\quad \mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{4} \ \forall \omega \in \Omega$.

орел решка

$A = \{\omega_1 = 0\}$, $B = \{\omega_2 = 0\}$, $C = \{\omega_1 = \omega_2 = 0\}$.

A, B — незав $\quad A, C$ — зависимы.

<u>Упражнение:</u> Бросаем кубик, A — выпало чётное число очков
B — нечётное.

Зависимы ли A и B?

Опр События $A_1, \dots, A_n$ — <u>независимы в совокупности</u>, если

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \cdots \mathbb{P}(A_{i_k})$$

для любого набора $1 \le i_1 < \dots < i_k \le n$ и $1 \le k \le n$.

События $A_1, \dots, A_n$ — <u>попарно независимы</u>, если

$$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\,\mathbb{P}(A_j) \quad \forall\, i \ne j.$$

Пример В примере про симметричную монетку события A, B, C не независимы ни попарно, ни в совокупности.

независимость в совокупности $\Rightarrow$ попарная независимость

попарная нез-ть $\not\Rightarrow$ нез-ть в совокупности.

Упражнение: Пусть $\Omega = \{1,2,3,4\}$, $\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{4}$ $\forall \omega \in \Omega$.

$A = \{1,2\}$, $B = \{1,3\}$, $C = \{2,3\}$. Проверьте, что A, B, C попарно независимы, но не независимы в совокупности.

либо просто "вероятность A при условии $\underline{B}$"

Опр Пусть $A, B \subset \Omega$, $\mathbb{P}(B) \ne 0$. Вероятностью события A при условии того, что событие $\underline{B}$ произошло, называется величина

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Это <u>определение</u>. Оно ни откуда не следует, кроме как из нашей интуиции. А интуиция такая:

$$\mathbb{P}(\omega | B) = \begin{cases} \dfrac{\mathbb{P}(\omega)}{\mathbb{P}(B)}, & \omega \in B \\ 0, & \omega \notin B \end{cases}$$

То есть, мы кладем нулем вер-ть $\omega \notin B$, а для $\omega \in B$ сохраняем отношения их вероятностей: $\dfrac{\mathbb{P}(\omega/B)}{\mathbb{P}(\omega'/B)} = \dfrac{\mathbb{P}(\omega)}{\mathbb{P}(\omega')}$ $\forall \omega, \omega' \in B$.

Заметим, что ф-ция множеств $\mathbb{P}(\cdot|B)$ — тоже вероятность: $\mathbb{P}(\Omega/B) = 1$.

Пример. В семье 2 ребенка. Найти вероятность того, что оба — мальчики при условии, что хотя бы один из них мальчик.

Если бы у нас не было определения условной вер-ти — мы решали бы эту задачу вот так:

$\Omega = \{ MM, MД, ДМ \}$, классическое опр-ие в-ти.

$A = \{MM\}$. $\mathbb{P}(A) = ?$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{3}.$$

Это очень неудобно. Даже в этой простейшей задаче, если мы захотим поменять условие "хотя бы один из них — мальчик" на другое, скажем, "хотя бы одна — девочка", нам придётся менять вероятностное пр-во. А в более сложных задачах всё ещё сильнее усложнится. Поэтому такие задачи решают с помощью данного выше определения условной вероятности:

$\Omega = \{ MM, MД, ДМ, ДД \}$, $A = \{MM\}$, $B = \{ MM, MД, ДМ \}$

$\mathbb{P}(A|B) = ?$ $\quad \mathbb{P}(A|B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \dfrac{1/4}{3/4} = \dfrac{1}{3}.$

Ответы совпадают $\Rightarrow$ интуиция, заложенная в определение $\mathbb{P}(A|B)$, нас не подводит.

$\boxed{\text{Задача. Покажите, что } \mathbb{P}(A|B \cup C) \text{ вообще говоря } \neq \mathbb{P}(A|B) + \mathbb{P}(A|C), \text{ даже если } B \cap C = \varnothing.}$

Лемма (Формула полной вероятности). Пусть $A, B_1, \dots, B_n \subset \Omega$, $A \subset \bigcup_i B_i$, $B_i \cap B_j = \varnothing$. Тогда

$$\mathbb{P}(A) = \sum_i \mathbb{P}(A \cap B_i) = \sum \mathbb{P}(A|B_i)\,\mathbb{P}(B_i).$$

Д-во: упражнение.

<u>Пример</u> В первой урне 4 белых и 7 красных шаров, во второй — только белые, в третьей — только красные. Вынимаем шар наугад.

$\mathbb{P}($вынули красный$) = ?$

$$\mathbb{P}(K) = \mathbb{P}(K \mid У_1)\,\mathbb{P}(У_1) + \mathbb{P}(K \mid У_2)\,\mathbb{P}(У_2) + \mathbb{P}(K \mid У_3)\,\mathbb{P}(У_3)$$

выбрали урну 1 вер-ть выбрать У1.

вынули красный.

$\mathbb{P}(У_i) = \frac{1}{3}$, $\quad \mathbb{P}(K \mid У_1) = \frac{7}{11}$, $\quad \mathbb{P}(K \mid У_2) = 0$, $\quad \mathbb{P}(K \mid У_3) = 1$.

$$\mathbb{P}(K) = \frac{7}{11} \cdot \frac{1}{3} + 0 + 1 \cdot \frac{1}{3} = \boxed{\frac{18}{33}}$$

Scanned by TapScanner