ОДУ-2023. Домашнее задание №1

Выдано 14.09.2023 Срок сдачи до **24:00 24.09.2023**

Аккуратно записанную и оформленную в виде единого pdf-файла работу надо послать на адрес закреплённого за Вами учебного ассистента. Распределение студентов по учебным ассистентам см. вверху на странице курса.

Задача 1.1. Ускорение лодки с выключенным мотором отрицательно и пропорционально её скорости.

(а) Какое время потребуется до замедления скорости с начальной $v = 1$ м/с до нулевой? Какое при этом будет пройдено расстояние?

(б) Пусть замедление со скорости 6,4 м/с до 3,2 м/с заняло 20 с. Какое время потребуется для замедления с 3,2 м/с до 0,1 м/с? Какое расстояние будет при этом пройдено?

Задача 1.2. При распаде радиоактивного вещества скорость распада пропорциональна массе имеющегося вещества, поэтому изменение со временем массы $x(t)$ радиоактивного материала задается дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = -c \cdot x\,. \tag{1}$$

Константа c называется постоянной распада, она зависит только от вида радиоактивного вещества.

Известно, что в течение года из каждого грамма радия-226 распадается 0,44 мг. Найдите постоянную распада радия-226 двумя способами:

(а) *точно*, подбирая константу c, для которой имеется решение уравнения (1), такое что $x(0) = 1$, $x(1) = 1 - 0{,}00044$;

(б) *приближённо*, считая 1 год «достаточно малым временем» и полагая, что распад в течение года происходит примерно по линейному закону $\Delta x = -\hat{c}x\Delta t$.

(в) Оцените, не пользуясь вычислительными устройствами, величину $(c - \hat{c})/c$.

Задача 1.3. Рассмотрим наполненный несжимаемой жидкостью сосуд, в дне которого проделано отверстие малой площади σ. Скорость истечения жидкости из отверстия приближённо задаётся законом Торричелли: $v = \sqrt{2gh}$, где g — ускорение свободного падения, h — высота уровня жидкости в сосуде. Символом $S(h)$ обозначим площадь сечения сосуда на уровне h. Вычисляя двумя способами уменьшение объёма жидкости в сосуде, получим

$$S(h)\Delta h = -\sqrt{2gh} \cdot \sigma \cdot \Delta t$$

Здесь слева оценка через понижение уровня жидкости, справа — через объём жидкости, вытекающей из отверстия.

Пусть стенка сосуда получена вращением кривой $y = x^\alpha$ $(\alpha > 0)$ вокруг вертикальной оси Oy. Вначале сосуд заполнен жидкостью до высоты H, в момент времени $t = 0$ в дне сосуда открывается отверстие площади σ.

(а) Напишите дифференциальное уравнение, определяющее зависимость уровня жидкости $h(t)$ от времени. Решите его и найдите время T полного вытекания жидкости из сосуда.

(б) Опишите, как в зависимости от α меняется скорость изменения $h(t)$ при $t \to T$.

Задача 1.4. Эволюция популяции рыб с квотой вылова, линейно зависящей от ее численности, задается уравнением

$$\dot{x} = x - x^2 - bx.$$

Здесь функция $x(t) \geq 0$ описывает численность популяции, а первое, второе и третье слагаемые в правой части уравнения учитывают, соответственно, размножение, конкуренцию за ресурсы и квоту вылова. Для всех возможных значений коэффициента $b > 0$

(а) постройте явно все (как неотрицательные, так и отрицательные) решения этого уравнения,

(б) нарисуйте фазовые портреты и эскизы интегральных кривых.

Задача 1.5. Рассмотрим семейство уравнений

$$\dot{x} = x^2 + \varepsilon.$$

(а) Опишите качественно, как устроен его фазовый портрет и семейство интегральных кривых в зависимости от ε.

(б) Пусть $\varepsilon > 0$. Рассмотрим решение с начальным условием $x(0) = -1$, и пусть $x(T) = 1$. Докажите, что при $\varepsilon \to +0$ $T = T(\varepsilon)$ имеет степенную асимптотику, то есть для некоторых констант $c, \alpha \in \mathbb{R}$ (каких?) верно, что $T(\varepsilon) \sim c\,\varepsilon^{\alpha}$.

Задача 1.6. Опишите качественно поведение *всех* решений следующего уравнения, удовлетворяющих начальному условию $x(0) = 0$.

(а) $\dot{x} = \sqrt{|\sin x|}$, (б) $\dot{x} = \sqrt{|\sin x|}\,\mathrm{sgn}(\sin(x/2))$.